

对称图形——圆专题讲义

2.1 圆

课标知识与能力目标

- 1.理解圆的定义及相关概念
- 2.掌握点与圆的位置关系，会运用点到圆心的距离与圆的半径之间的数量关系判断点与圆的位置关系
- 3.理解弧、弦、半圆、优弧、劣弧、等圆、同心圆等与圆有关的概念

知识点 1：圆的概念及与圆的相关概念

1. 圆的概念

(1) 定义 1：把线段 OP 绕着端点 O 在平面内旋转 1 周，端点 P 运动所形成的图形叫做**圆**。其中，点 O 叫做**圆心**，线段 OP 叫做**半径**。

(2) 定义 2：平面内到定点的距离等于定长的点组成的集合叫做圆。其中定点叫做圆心，定长叫做半径。

(3) 圆的有关概念与基本性质是解决圆的有关问题的基础。如圆与三角形结合的题目，经常利用半径相等，构造等腰三角形，再利用等腰三角形性质证明线段或角相等。

2. 与圆有关的概念

(1) 弦：连接圆上任意两点的线段叫做**弦**。

(2) 直径：经过圆心的弦叫做**直径**。

(3) 弧、优弧、劣弧：圆上任意两点间的部分叫做**圆弧**，简称**弧**。用符号“ \frown ”表示。圆的任意一条直径的两个端点把圆分成两条弧，每条弧都叫做**半圆**。大于半圆的弧叫做**优弧**，小于半圆的弧叫做**劣弧**。

(4) 等圆、同心圆：能够互相重合的两个圆叫做**等圆**；圆心相同，半径不相等的两个圆叫做**同心圆**。

(5) 圆心角：顶点在圆心的角叫做**圆心角**。

(6) 等弧：能够互相重合的弧叫做**等弧**。

典型例题

考点 1: 命题判定

例 1 以下命题：①直径是弦；②弦是直径；③半圆是弧，但弧不一定是半圆；④长度相等的两条弧是等弧；⑤圆心相同的圆是同心圆．其中正确的命题有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

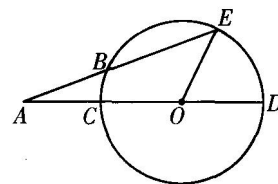
例 2 下列命题中是真命题的有 ()

①两个端点能够重合的弧是等弧；②圆的任意一条弦把圆分成优弧和劣弧两部分；③长度相等的弧是等弧；④半径相等的圆是等圆；⑤直径是最大的弦；⑥半圆所对的弦是直径．

- A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

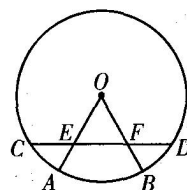
考点 2: 圆的性质应用

例 1 如图，CD 是 $\odot O$ 的直径，BE 是 $\odot O$ 的弦，DC、EB 的延长线相交于点 A. 若 $\angle A=20^\circ$ ， $AB=OC$ ，求 $\angle EOD$ 的度数.



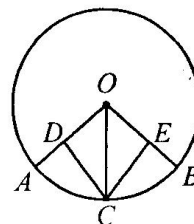
考点 3: 利用圆的性质进行证明

例 1 如图， $\odot O$ 的半径 OA、OB 分别交弦 CD 于点 E、F，且 $CE=DF$ ．试说明 $\angle OEF$ 与 $\angle OFE$ 的关系．



例 2 如图，在 $\odot O$ 中，D、E 分别为半径 OA、OB 上的点，且 $AD=BE$ 点 C 为 \widehat{AB} 上一点，连接 CD、CE、CO， $\angle AOC=\angle BOC$ ．

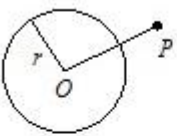
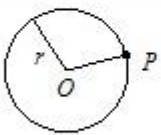
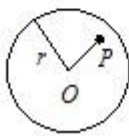
求证： $CD=CE$ ．



知识点 2：点与圆的位置关系

点与圆的位置关系有三种：点在圆内、点在圆上、点在圆外。

设 $\odot O$ 的半径为 r ，点 P 到圆心 O 的距离为 d ，用图形表示点与圆的位置关系如图所示。

位置关系	图形	定义	性质及判定
点在圆外		点在圆的外部	$d > r \Leftrightarrow$ 点 P 在 $\odot O$ 的外部.
点在圆上		点在圆周上	$d = r \Leftrightarrow$ 点 P 在 $\odot O$ 的外部.
点在圆内		点在圆的内部	$d < r \Leftrightarrow$ 点 P 在 $\odot O$ 的外部.

典型例题

考点 1：利用数量关系判断点与圆的位置关系

例 1 在矩形 $ABCD$ 中， $AB=8$ ， $BC=3\sqrt{5}$ ，点 P 在边 AB 上，且 $BP=3AP$ ，如果圆 P 是以点 P 为圆心、 PD 为半径的圆，那么下列判断正确的是 ()

- A. 点 B ， C 均在圆 P 外 B. 点 B 在圆 P 外，点 C 在圆 P 内
C. 点 B 在圆 P 内，点 C 在圆 P 外 D. 点 B ， C 均在圆 P 内

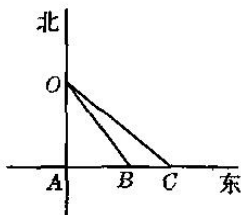
考点 2：利用点与圆的位置关系求圆的半径范围

例 1 已知矩形 $ABCD$ 的边 $AB=15$ ， $BC=20$ ，若以点 B 为圆心作圆，使 A ， C ， D 三点至少有一点在 $\odot B$ 内，且至少有一点在 $\odot B$ 外，则 $\odot B$ 的半径 r 的取值范围是 ()

- A. $r > 15$ B. $15 < r < 20$ C. $15 < r < 25$ D. $20 < r < 25$

考点 3：利用点与圆的位置关系解决实际问题

例 1 如图，有 A 、 B 、 C 三个村庄， A 庄在某市的市中心正南方 40km 处， B 、 C 两个村庄在 A 庄的正东方向上，且距 A 庄分别为 30km 和 35km ，该市中心有一座信息发射塔（即 O 点），覆盖半径为 50km 问三个村庄 A 、 B 、 C 是否能收到该塔发出的信息。

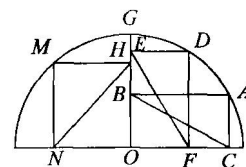


能力提优

题型 1: 圆的性质和矩形性质综合

例 1 如图, 点 A、D、G、M 在半圆 O 上, 四边形 ABOC、DEOF、HMNO 为矩形, 设 $BC=a$, $EF=b$, $NH=c$. 则下列各式正确的是()

- A. $a>b>c$ B. $a=b=c$ C. $c>a>b$ D. $b>c>a$

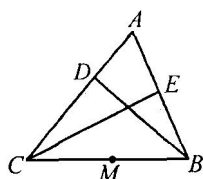


题型 2: 点与圆的位置关系中分类讨论思想

例 1 若 $\odot O$ 所在平面上的一点 P 到 $\odot O$ 上的点的最大距离是 10, 最小距离是 2, 则此圆的半径为_____

题型 3: 利用圆的定义与直角三角形的性质综合进行证明

例 1 已知: 如图, BD、CE 是 $\triangle ABC$ 的高, M 为 BC 的中点, 试说明点 B、C、D、E 在以点 M 为圆心的同一个圆上.



例 2 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle BAD$ 为钝角, 且 $AE \perp BC$, $AF \perp CD$.

- (1) 求证: A、E、C、F 四点共圆;
- (2) 设线段 BD 与(1)中的圆交于点 M、N. 求证: $BM=ND$.

