目　录

代数篇 …… 1

第一讲　有理数的巧算 …… 1

第二讲　代数式的化简与求值(一) …… 11

第三讲　绝对值 …… 19

第四讲　一元一次方程 …… 28

第五讲　一次方程组 …… 35

第六讲　一次方程组的应用 …… 43

第七讲　列方程(组)解应用题 …… 50

第八讲　“设而不求” …… 59

第九讲　一次不等式(组) …… 69

第十讲　含绝对值的方程和不等式 …… 80

第十一讲　不等式的应用 …… 88

第十二讲　整式的乘法和除法 …… 97

第十三讲　待定系数法 …… 104

第十四讲　综合除法和余数定理 …… 114

第十五讲　代数式的化简与求值(二) …… 123

几何篇 …… 132

第十六讲　线段 …… 132

第十七讲　角 …… 145

第十八讲　从三角形内角和谈起 …… 156

第十九讲　相交线和平行线 …… 167

第二十讲　面积 …… 176

综 合 篇 …… 188
第二十一讲　整除 …… 188
第二十二讲　奇数和偶数 …… 195
第二十三讲　质数和合数 …… 202
第二十四讲　二元一次不定方程 …… 210
第二十五讲　加法原理和乘法原理 …… 218
第二十六讲　抽屉原理 …… 225
第二十七讲　应用题精选 …… 232
第二十八讲　生活中的数学 …… 240

综合测试题(一) …… 248
综合测试题(二) …… 251

习题解答 …… 254

代数篇

第一讲　有理数的巧算

一、知识要点和基本方法

有理数的运算内容丰富、方法灵活、技巧性强，它是初中代数中最基本的运算．在运算过程中，巧用运算规律（如加法交换律、结合律，乘法交换律、结合律和分配律等）和其他的运算方法及技巧，可以使运算简捷、方便．

二、例题精讲

例1　计算：$29\frac{3}{5}-1\frac{1}{3}-15\frac{1}{4}+3\frac{2}{3}-2\frac{1}{3}-14\frac{2}{5}+0.25$

解　原式$=\left(-1\frac{1}{3}+3\frac{2}{3}-2\frac{1}{3}\right)+\left(29\frac{3}{5}-14\frac{2}{5}\right)$

$$+\left(-15\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=0+(29-14-15)+\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=0+\frac{1}{5}+0$$

$$=\frac{1}{5}.$$

说明　在进行有理数加减法时，先观察有没有相加后为0的数，若有，先将它们结合起来相加．然后可以把同分母的数结合相加．若

是带分数，还可以将其整数部分和分数部分分别结合相加. 若既有小数，又有分数，通常将小数化为分数. 在有理数交换位置或结合的时候，必须带着自身的性质符号（“+”号或“−”号，有时“+”号可省略）交换或结合.

例 2 计算：$-2.5 \div 0.75 \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(-1\frac{3}{4}\right) \div (-1.4) \times \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{2}{3}$

解 原式 $= -\frac{5}{2} \div \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{5}\right) \times \left(-\frac{7}{4}\right) \div \left(-\frac{7}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{2}{3}$

$$= -\left(\frac{5}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{7}{4} \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}.$$

说明 在进行有理数的乘除运算时，要注意确定结果的符号：若有奇数个负数相乘除，则其结果为负的；若有偶数个负数相乘除，则其结果为正的. 通常将小数化为分数，带分数化为假分数并把除法转化为乘法，能约分的先约分，尽量化简. 另外，要熟记一些常用的数据，如 $0.125 = \frac{1}{8}$，$0.25 = \frac{1}{4}$，$0.375 = \frac{3}{8}$，$0.75 = \frac{3}{4}$ 等.

例 3 计算：$0.7 \times 1\frac{2}{11} - 6.6 \times \frac{3}{7} - 2.2 \div \frac{7}{3} + 0.7 \times \frac{9}{11} + 3.3 \div \frac{7}{8}$

解 原式 $= \left(0.7 \times 1\frac{2}{11} + 0.7 \times \frac{9}{11}\right) + \left(-6.6 \times \frac{3}{7} - 2.2 \times \frac{3}{7} + 3.3 \times \frac{8}{7}\right)$

$$= 0.7 \times \left(1\frac{2}{11} + \frac{9}{11}\right) - 6.6 \times \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{7} - \frac{4}{7}\right)$$

$$= 0.7 \times 2 - 6.6 \times 0$$

$$= 1.4.$$

说明 在进行有理数的混合运算时，若有公因子，一般可把公因子先提出，然后进行运算. 有时，可以利用一些因子之间的内在关系，如本例中的 6.6、3.3 和 2.2，适当变化后获得公因子，然后提出. 若公因子是负数，要特别注意提取后各项的符号应变号.

例 4 计算：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$

解 原式 $=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\left(\frac{1}{64}+\frac{1}{64}\right)-\frac{1}{64}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{32}\right)-\frac{1}{64}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{64}$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{64}$$

$$=1-\frac{1}{64}$$

$$=\frac{63}{64}.$$

说明 上例中，我们经过观察发现上式的特点是后一项是前一项的一半，因此，如果我们把后一项加上它本身，就可以得到前一项的值，因此，我们巧添了一个辅助数$\frac{1}{64}$，使问题得以顺利解决. 当然，在添加上$\frac{1}{64}$后不要忘了还应减去$\frac{1}{64}$. 其实，例 4 的解法还有很多，试举以下几种.

解法 2 设原式 $= S$，两边同乘以 64，则

$$64S = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63,$$

因此　$S=\frac{63}{64}$,

即　　原式 $=\frac{63}{64}$.

解法 3　原式 $=\frac{1}{64}(32+16+8+4+2+1)$

$=\frac{1}{64}\times 63$

$=\frac{63}{64}$.

解法 4　设原式 $=S$，两边同乘以 $\frac{1}{2}$，则

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128},$$

因此　$S-\frac{1}{2}S=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right.$

$\left.+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}\right)$

$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)$

$+\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{32}\right)+\left(\frac{1}{64}-\frac{1}{64}\right)-\frac{1}{128}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{128}=\frac{63}{128}$,

即　$\frac{1}{2}S=\frac{63}{128}$，所以 $S=\frac{63}{64}$,

即　原式 $=\frac{63}{64}$.

想一想，上述几种解法分别利用了原式的什么特点？用了哪些技巧？特别是解法 4，更要仔细品味一下，用它可以解决很多类似问题.

例 5　计算：(1) $1+2+3+4+\cdots+1\,997+1\,998+1\,999$

(2) $1-2+3-4+\cdots+1\,997-1\,998+1\,999$

解 (1) 令 $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 1\,997 + 1\,998 + 1\,999$,

则 $S = 1\,999 + 1\,998 + 1\,997 + 1\,996 + \cdots + 3 + 2 + 1$.

两式相加得

$$2S = (1 + 1\,999) + (2 + 1\,998) + (3 + 1\,997) + \cdots + (1\,999 + 1)$$

$$= \underbrace{2\,000 + 2\,000 + \cdots + 2\,000}_{\text{共}1\,999\text{个}}$$

$$= 2\,000 \times 1\,999,$$

所以 $S = \dfrac{2\,000 \times 1\,999}{2} = 1\,999\,000$,

即 原式 $= 1\,999\,000$.

说明 上述算式的特点是:后一项减去前一项的差都相等.这样的一列数,称为等差数列.即若一列数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,有 $a_{i+1} - a_i = d$(常数),$(i = 1, 2, \cdots, n-1)$,则这列数称为等差数列,其中 a_1 称为首项,a_n 称为末项,n 为项数,d 为公差.等差数列的和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 的计算公式为:和 $= \dfrac{(\text{首项} + \text{末项}) \times \text{项数}}{2}$.

有时,项数不能直接看出,可用下面的公式计算:

$$\text{项数} = \frac{\text{末项} - \text{首项}}{\text{公差}} + 1.$$

(2) 原式 $= 1 + (-2 + 3) + (-4 + 5) + \cdots + (-1\,998 + 1\,999)$

$= 1 + 1 + \cdots + 1$(共 1 000 个 1)

$= 1\,000.$

说明 巧结合,可以简化运算,这是由本题的特点所决定的.所以,在做题时,不要拿起笔就匆匆去做.应先观察一下题目的特点,根据特点下手,往往有事半功倍的效果.

例 6 计算:$\dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \dfrac{1}{3 \times 4} + \cdots + \dfrac{1}{1\,999 \times 2\,000}$

解 原式 $= \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right) + \cdots$

$$+\left(\frac{1}{1\,999}-\frac{1}{2\,000}\right)$$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots$$

$$+\left(-\frac{1}{1\,999}+\frac{1}{1\,999}\right)-\frac{1}{2\,000}$$

$$=1-\frac{1}{2\,000}$$

$$=\frac{1\,999}{2\,000}.$$

说明 在做分数加减法运算时，根据特点，将其中一些分数适当拆开，使得拆开后的一些分数可以相互抵消，以达到简化运算的目的，这种方法叫拆项法. 本例中，我们把 $\frac{1}{n\times(n+1)}$ 拆成 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ 即有

$$\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

其他常用的拆项方法如：

(1) $\frac{d}{n\times(n+d)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d}$ $\left[或\frac{1}{n\times(n+d)}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d}\right)\right]$. 它经常用于分母成等差数列，且公差为 d 的情形.

(2) $\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{n\times(n+1)}-\frac{1}{(n+1)\times(n+2)}\right]$.

例7 1 999 加上它的 $\frac{1}{2}$ 得到一个数. 再加上所得的数的 $\frac{1}{3}$ 又得到一个数. 再加上这次得数的 $\frac{1}{4}$ 又得到一个数，……，依此类推，一直加到上一次得数的 $\frac{1}{1\,999}$，那么最后得到的数是多少？

解 由 1 999 加上它的 $\frac{1}{2}$ 得 $1\,999\times\left(1+\frac{1}{2}\right)$，

再加上这数的$\frac{1}{3}$得$1\,999\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)$，

依此类推，最后得到的数为

$$1\,999\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{1\,999}\right)$$

$$=1\,999\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{2\,000}{1\,999}$$

$$=1\,999\times\frac{2\,000}{2}$$

$$=1\,999\,000.$$

说明 在乘法运算过程中，约去同时在分子、分母出现的数，可以大大地简化计算. 从思想方法说，本例与例 6 有异曲同工之妙.

有理数的运算方法与技巧还有很多. 我们要善于分析算式的特点，灵活运用. 在不断的实践中，熟能生巧，把基本运算掌握好.

练　习　题

A　组

一、计算题

1. $31\frac{2}{7}-22\frac{6}{13}+4\frac{5}{7}+11\frac{6}{13}$

2. $5\frac{6}{11}-3.125-7\frac{4}{7}-3\frac{4}{11}+8\frac{1}{8}-3\frac{6}{7}-2\frac{2}{11}+6\frac{3}{7}$

3. $-\frac{7}{11}\div 2.5\times(-0.75)\div(-1\frac{2}{5})\div\frac{3}{11}\times(-\frac{8}{13})$

4. $3.825\times\frac{1}{4}-1.825+0.25\times 3.825+3.825\times\frac{1}{2}$

5. $-7.2\times 0.125+0.375\times 1.1+3.6\times\frac{1}{2}-3.5\times 0.375$

6. $\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{4-\frac{1}{5}}}}$

7. $1\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+5\frac{1}{8}+7\frac{1}{16}+9\frac{1}{32}$

8. $\frac{1}{1\,999}+\frac{2}{1\,999}+\frac{3}{1\,999}+\cdots+\frac{1\,998}{1\,999}$

9. $(7+9+11+\cdots+101)-(5+7+9+\cdots+99)$

10. $9+99+999+9\,999+99\,999+999\,999$

11. $3^{2\,000}-5\times 3^{1\,999}+6\times 3^{1\,998}$

12. $(-1)^{1\,998}+(-1)^{1\,999}+(-1)^{2\,000}+(-1)^{2\,001}$

13. $\frac{1}{5\times 9}+\frac{1}{9\times 13}+\frac{1}{13\times 17}+\cdots+\frac{1}{101\times 105}$

14. $1+2\frac{1}{6}+3\frac{1}{12}+4\frac{1}{20}+5\frac{1}{30}+6\frac{1}{42}+7\frac{1}{56}$

15. $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+100}$

B 组

二、计算题

16. $(-3\,333\,333\,333)^2$

17. $199\,919\,991\,999 \times 1\,998 - 199\,819\,981\,998 \times 1\,999$

18. $1 + 1\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3} + 2 + 2\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3} + 3 + \cdots + 20$

19. $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{98 \times 99 \times 100}$

20. $\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5 \times 6} + \cdots + \frac{1}{17 \times 18 \times 19 \times 20}$

21. $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{9}\right) \times \left(1 - \frac{1}{16}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{2\,500}\right)$

22. $1 - \frac{2}{1 \times (1+2)} - \frac{3}{(1+2)(1+2+3)} - \frac{4}{(1+2+3)(1+2+3+4)} - \cdots - \frac{100}{(1+2+\cdots+99)(1+2+\cdots+100)}$

测 试 题

一、计算题

1. $3\frac{1}{6} - 4\frac{1}{7} + 5\frac{1}{8} - 6\frac{1}{6} + 7\frac{1}{7} - 8\frac{1}{8}$

2. $2.2 \times (-2.1) + 1.21 \times 4.2 - 2.1 \times 0.22$

3. $1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} + 5\frac{1}{8} + \cdots + 17\frac{1}{512}$

4. $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \cdots + 1\,997 + 1\,998 - 1\,999 - 2\,000$

5. $1 + 1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} + 2 + 2\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} + 2\frac{3}{4} + 3 + \cdots + 20$

6. $\frac{1}{1 \times 6} + \frac{1}{6 \times 11} + \frac{1}{11 \times 16} + \cdots + \frac{1}{51 \times 56}$

7. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2+4}+\frac{1}{2+4+6}+\cdots+\frac{1}{2+4+6+\cdots+200}$

8. $(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^{1999}$

9. $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+1997^2-1998^2+1999^2$

10. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{10}}$

二、解答题

11. 某班有20人，他们的数学成绩分别为：86，91，93，87，88，94，87，93，95，89，88，92，96，85，83，93，97，81，89，94. 求他们的平均成绩.

12. 1999减去它的$\frac{1}{2}$，再减去余下的$\frac{1}{3}$，再减去余下的$\frac{1}{4}$，……，依此类推，一直到减去余下的$\frac{1}{1999}$，那么最后剩下的数是多少？

第二讲　代数式的化简与求值(一)

一、知识要点和基本方法

代数式是用基本运算符号,把数和表示数的字母连接而成的式子.用数值代替代数式里的字母,按照代数式所给出的运算法则计算出结果,叫代数式的值,因此代数式的值是由其所含字母所取的值确定的,并随字母取值的变化而变化.但值得注意的是,代数式中字母取值时,不能使代数式没有意义.

代数式求值问题一般可直接将字母取值代入计算便可解决,但对于比较复杂的代数式,往往需要先化简再求值,有时还要用到代数变形、消元、设参数等数学方法.

二、例题精讲

例1　已知 x 是最大的负整数,y 是绝对值最小的有理数,求代数式 $3x^3-10x^2y+5xy^2-13y^3$ 的值.

解　因为 x 是最大的负整数,所以 $x=-1$.因为 y 是绝对值最小的有理数,所以 $y=0$.因此

$$\begin{aligned}&3x^3-10x^2y+5xy^2-13y^3\\=&3\times(-1)^3-10\times(-1)^2\times 0\\&+5\times(-1)\times 0^2-13\times 0^3\\=&-3,\end{aligned}$$

即所求的代数式的值为-3.

说明　对于比较简单的代数式求值,只要将字母的取值代入计

算，就可以解决问题. 当然，有时还需要知道一些常用的知识，如本例中最大的负整数，绝对值最小的有理数等.

例 2 已知当 $x=5$ 时，代数式 ax^2+bx-5 的值是 10，求 $x=5$ 时，代数式 ax^2+bx+5 的值.

解 因为当 $x=5$ 时，代数式 ax^2+bx-5 的值是 10，所以 $a\times 5^2+b\times 5-5=10$，即

$$5^2a+5b=15,$$

所以，当 $x=5$ 时，

$$\begin{aligned} & ax^2+bx+5 \\ =\ & 5^2a+5b+5 \\ =\ & 15+5 \\ =\ & 20, \end{aligned}$$

即所求的代数式的值为 20.

说明 代数式 ax^2+bx+5 中含有三个字母，现只知 $x=5$，不知 a 与 b 的值，如果用直接代入计算的方法，还遇到一定的困难. 但仔细观察它与 ax^2+bx-5 之间的联系，求出 5^2a+5b 整体的值，便可解决问题.

例 3 已知代数式 ax^3+bx+c，当 $x=0$ 时的值为 2；当 $x=3$ 时的值为 1；求当 $x=-3$ 时，代数式的值.

解 因为当 $x=0$ 时，代数式的值为 2，所以有：$a\times 0^3+b\times 0+c=2$，即 $c=2$.

又因为当 $x=3$ 时代数式的值为 1，所以

$$1=a\times 3^3+b\times 3+2,$$

故

$$3^3a+3b=-1,$$

从而有

$$(-3)^3\cdot a+(-3)\cdot b=1.$$

所以，当 $x=-3$ 时，

$$ax^3 + bx + c$$

$$= (-3)^3a + (-3)b + 2$$

$$= 1 + 2 = 3.$$

说明 当代数式中除 x 外，还有其他字母如 a、b、c（这些字母也称为参数）时，通常先根据已知条件将参数确定下来，然后求值. 但本例和例 2 中，根据已知条件，无法将参数全部确定. 但注意到本题的特点，所给的代数式是一个多项式，它除了常数项外，只含有 x 的奇数次项，根据奇次项的性质，$x = 3$ 时的值与 $x = -3$ 时的值只差一个负号，从而解决本题. 利用奇、偶次项的性质来求代数式的值，是常用的方法. 如果本例中只含 x 的偶次项，那么情况又将如何呢？

例 4 如果不论 x 取什么值，代数式 $\frac{ax+3}{bx+4}$（分母不为零）都得到同样的值，那么 a 与 b 应满足什么条件？

解 因为不论 x 取什么值，代数式 $\frac{ax+3}{bx+4}$（分母不为 0）的值都相同，所以，我们取 $x = 0$，得

$$\frac{ax+3}{bx+4} = \frac{a \times 0 + 3}{b \times 0 + 4} = \frac{3}{4},$$

即不论 x 取什么值，该代数式的值都为 $\frac{3}{4}$. 再取 $x = 1$，得

$$\frac{ax+3}{bx+4} = \frac{a+3}{b+4} = \frac{3}{4},$$

所以

$$4(a+3) = 3(b+4),$$

$$4a = 3b.$$

且当 $4a = 3b$ 时，显然有 $\frac{ax+3}{bx+4} = \frac{3}{4}$.

因此，a 与 b 应满足的条件为 $4a = 3b$.

说明 本题抓住“不论 x 取什么值，代数式都得到同样的值”这一条件，分别取 x 的一些特殊值（如 $x = 0$ 和 $x = 1$），使问题得

以解决.

例5 已知 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=2$，求 $\frac{-3a+4ab+3b}{2a-3ab-2b}$ 的值.

解 将原式的分子、分母同除以 ab，得

$$\text{原式}=\frac{-\frac{3}{b}+4+\frac{3}{a}}{\frac{2}{b}-3-\frac{2}{a}}=\frac{4+\frac{3}{a}-\frac{3}{b}}{-3-\frac{2}{a}+\frac{2}{b}}$$

$$=\frac{4+3\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{-3-2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}=\frac{4+3\times 2}{-3-2\times 2}$$

$$=-\frac{10}{7}.$$

说明 分式的化简与求值，以整式的化简与求值为基础，并结合分式的特点，更具独特的技巧性. 本例先利用分式的性质，分子分母同除以 ab（$ab\neq 0$，为什么？），然后采用整体代入的方法，很自然地解决了本题. 本题还有另一种解法，如下：

解法2 因为 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=2$，

即 $\frac{b-a}{ab}=2$，

所以，有 $b-a=2ab$，代入原式得

$$\text{原式}=\frac{4ab+3(b-a)}{-3ab-2(b-a)}$$

$$=\frac{4ab+3\times 2ab}{-3ab-2\times 2ab}$$

$$=\frac{10ab}{-7ab}=-\frac{10}{7}.$$

例6 已知三个正数 a、b、c，满足 $abc=1$，求 $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}$ 的值.

解 由于 $abc=1$，所以若将原式的第二个分式的分子、分母同乘以 a，第三个分式的分子、分母同乘以 ab，得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{abc+ab+a}+\frac{abc}{a^2bc+abc+ab}\\&=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{1}{a+1+ab}\\&=\frac{a+ab+1}{ab+a+1}\\&=1.\end{aligned}$$

说明 本题若直接进行通分，则计算非常复杂. 本例的解答充分利用已知条件 $abc=1$，巧妙通分，解法简捷，别开生面. 而且，本题显然可以推广到更多个元的问题，如：a、b、c、d 是四个正数，$abcd=1$，则类似地，我们可以得到 $\frac{a}{abc+ab+a+1}+\frac{b}{bcd+bc+b+1}+\frac{c}{cda+cd+c+1}+\frac{d}{dab+da+d+1}=1$. 另外，想想看，条件中的 a，b，c 均为正数是否多余，为什么？

例7 已知 $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{x+z}=\frac{z}{x+y}$，求 $\frac{x}{y+z}$ 的值.

解 令 $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{x+z}=\frac{z}{x+y}=k$，则

$$\begin{cases}x=k(y+z),\\y=k(x+z),\\z=k(x+y),\end{cases}$$

三式相加，得 $x+y+z=2k(x+y+z)$.

当 $x+y+z\neq 0$ 时，$k=\frac{1}{2}$，即 $\frac{x}{y+z}=\frac{1}{2}$.

当 $x+y+z=0$ 时，即 $x=-(y+z)$，故 $\frac{x}{y+z}=\frac{-(y+z)}{y+z}=-1$.

说明 本题的条件以连比的形式出现，“碰到连比就设比值为 k”，是许多人解题的经验，因此，可用 k 来表示这个连比，以便把连比

写成几个等式，从而解决问题. 另外，值得注意的是，当我们得到 $x+y+z=2k(x+y+z)$ 时，由于题设并没有给出 $x+y+z$ 是否为0，因此，此时我们应对它进行讨论，否则，就会出现错误.

以上我们介绍了代数式的化简与求值的几种方法，实际上，解题的方法远不止这几种，而且，所有的方法并非是孤立的，在解题时，往往要使用几种方法，才能得到问题的结果.

练　习　题

A　组

1. 根据下面 a、b 的值，求代数式 $a^2-\frac{b^2}{a}$ 的值.

(1) $a=2$，$b=1$.

(2) $a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{1}{9}$.

2. 已知 a 为 3 的倒数，b 为最小的正整数，求代数式 $(a+b)^2-2(a+b)+3$ 的值.

3. 已知 $x=(-1\div\frac{1}{2}\times 3\times\frac{1}{6})^3$，求代数式 $x^{1\,999}+x^{1\,998}+x^{1\,997}+\cdots+x+1$ 的值.

4. 当 $x=3$ 时，代数式 ax^3+bx+8 的值是 12，求当 $x=3$ 时，代数式 ax^3+bx-5 的值.

5. 若 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$，且 $4x-5y+2z=10$，求 $2x-5y+z$ 的值.

6. 已知 $a=3b$，$c=\frac{2a}{3}$，求代数式 $\frac{a+b+c}{a+b-c}$ 的值.

7. 已知 $\frac{a-b}{a+b}=3$，求代数式 $\frac{2(a+b)}{a-b}-\frac{4(a-b)}{3(a+b)}$ 的值.

8. 已知 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$，求代数式 $\frac{3x-2xy+3y}{5x+3xy+5y}$ 的值.

B　组

9. $y=ax^4+bx^2+c$，当 $x=-5$ 时，$y=3$，求当 $x=5$ 时，y 的值.

10. 已知 $x=(-1\div\frac{1}{3}\div\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}\times 2)^5$，求代数式 $x^{1\,999}+2x^{1\,998}+3x^{1\,997}+\cdots+1\,998x^2+1\,999x$ 的值.

11. 设 $(2x-1)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

求：(1) $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$.

(2) $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5$.

(3) $a_0+a_2+a_4$.

12. 已知 $a+\frac{1}{b}=1$，$b+\frac{1}{c}=1$，求 $c+\frac{1}{a}$ 的值.

13. 若 $\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$，求 $x+y+z$ 的值.

14. 若 a、b、c、d 是四个正数，且 $abcd=1$，求 $\frac{a}{abc+ab+a+1}+\frac{b}{bcd+bc+b+1}+\frac{c}{cda+cd+c+1}+\frac{d}{dab+da+d+1}$ 的值.

测 试 题

1. 已知 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{1}{5}$，求代数式 $x^2-3xy+5y^2$ 的值.

2. 若 x 为 $\frac{1}{3}$ 的倒数，y 为偶质数，求代数式 $(x-y)^5+3(x-y)^4+(x-y)^2-3$ 的值.

3. 已知当 $x=7$ 时，代数式 ax^5+bx-8 的值为 4，求当 $x=7$ 时，代数式 $\frac{a}{2}x^5+\frac{b}{2}x+3$ 的值.

4. 代数式 ax^5+bx+c，当 $x=-3$ 时的值为 8，当 $x=0$ 时的值为 1，求当 $x=3$ 时，该代数式的值.

5. 若 a、b 均为正数，且 $a\cdot b=1$，试求 $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}$ 的值.

6. 已知 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=2$，求 $\frac{4x+3xy+2y}{-4x+8xy-2y}$ 的值.

7. 若 $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$，且 $x+y+z=12$，试求 $2x+3y+4z$ 的值.

8. 若不论 x 取什么值，代数式 $\frac{ax+3}{bx+8}$ 的值都相同，试求 a 与 b 的关系.

第三讲　绝　对　值

一、知识要点和基本方法

一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零. 即

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

一个数的绝对值就是数轴上表示这个数的点到原点的距离. 显然，任何数的绝对值都是非负数，即 $|a| \geqslant 0$.

化简含绝对值的式子，关键是去绝对值符号. 先根据所给的条件，确定绝对值符号内的数的正负（即 $a > 0$，$a < 0$ 还是 $a = 0$）. 如果已知条件没有给出其正负，应该分类讨论（即分别讨论 $a > 0$，$a < 0$ 和 $a = 0$ 的情形）. 分类思想是数学中一种非常重要的思想.

二、例 题 精 讲

例 1　若 $-2 \leqslant a \leqslant 0$，化简 $|a+2| + |a-2|$.

解　因为 $-2 \leqslant a \leqslant 0$，

所以　$a + 2 \geqslant 0$，$a - 2 \leqslant 0 - 2 < 0$，

因此　$|a+2| + |a-2|$

$= (a+2) - (a-2)$

$= 4$.

例 2 若 $x<0$，化简 $\dfrac{||x|-2x|}{|x-3|-|x|}$.

解 因为 $x<0$，所以 $x-3<0$，

从而 $|x|=-x$，$|x-3|=-(x-3)=3-x$，

$$|x-3|-|x|=3-x-(-x)=3,$$

$$||x|-2x|=|-x-2x|=|-3x|=-3x,$$

因此，原式 $=\dfrac{-3x}{3}=-x$.

说明 我们根据所给的条件，先确定绝对值符号内的代数式的正负，然后化去绝对值符号. 若有多层绝对值符号，即在一个绝对值符号内又含有绝对值符号(如例 2 的 $||x|-2x|$)，则通常总是从最内层开始，逐层向外化去绝对值符号.

例 3 设 $a<0$，且 $x\leqslant\dfrac{a}{|a|}$，试化简 $|x+1|-|x-2|$.

解 因为 $a<0$，$|a|=-a$，所以 $\dfrac{a}{|a|}=\dfrac{a}{-a}=-1$.

$$x\leqslant\frac{a}{|a|} \quad \text{即 } x\leqslant -1,$$

所以 $x+1<0$，$x-2<0$，

因此 $|x+1|-|x-2|=-(x+1)-[-(x-2)]$

$$=-x-1+x-2=-3.$$

说明 有时不能直接从所给条件得出绝对值符号内的数、式的正负，此时应先将已知条件化为我们所需要的条件，如例 3. 有时条件由数轴给出，应从数轴上“读”出有用的信息. 如下例.

例 4 数 a、b 在数轴上对应的点如图 3-1 所示，试化简 $|a+b|+|b-a|+|b|-|a-|a||$.

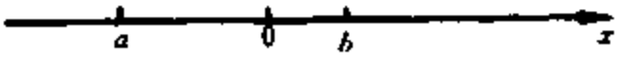


图 3-1

解 由图 3-1，可知

$a<0$，$b>0$，而且由于 a 点离原点的距离比 b 点离原点的距离大，因此 $a+b<0$. 我们有

$$\begin{aligned}&|a+b|+|b-a|+|b|-|a-|a||\\=&-(a+b)+(b-a)+b-|a-(-a)|\\=&-a-b+b-a+b-(-2a)\\=&b.\end{aligned}$$

例 5 化简 $\dfrac{2|x|-3x}{|2x-|5x||}$.

解 要去掉绝对值符号，必须讨论 x 的取值.

显然，由于分母不能为 0，因此 $x\neq 0$.

当 $x>0$ 时，

$$\frac{2|x|-3x}{|2x-|5x||}=\frac{2x-3x}{|2x-5x|}=\frac{-x}{|-3x|}=\frac{-x}{3x}=-\frac{1}{3}.$$

当 $x<0$ 时，

$$\frac{2|x|-3x}{|2x-|5x||}=\frac{-2x-3x}{|2x+5x|}=\frac{-5x}{|7x|}=\frac{-5x}{-7x}=\frac{5}{7}.$$

说明 当题设没有给出绝对值符号中的代数式的正负时，应分类进行讨论. 分类是数学的一种重要思想. 绝对值问题是运用分类思想的良好素材. 下面的例子中，含有两个绝对值符号，我们利用零点分段法，把整个数轴分成几段进行讨论.

例 6 化简 $|x+5|+|2x-3|$.

解 由 $x+5=0$ 得 $x=-5$，

由 $2x-3=0$ 得 $x=\dfrac{3}{2}$.

因此，我们只要讨论下面几个 x 的取值范围：

$$x<-5,\ -5\leqslant x<\frac{3}{2},\ x\geqslant\frac{3}{2}.$$

当 $x<-5$ 时，

原式 $=-(x+5)-(2x-3)=-3x-2$.

当 $-5 \leqslant x < \frac{3}{2}$ 时，

原式 $=(x+5)-(2x-3)=-x+8$.

当 $x \geqslant \frac{3}{2}$ 时，

原式 $=(x+5)+(2x-3)=3x+2$.

即

$$\text{原式}=\begin{cases}-3x-2, & (x<-5)\\ -x+8, & \left(-5 \leqslant x < \frac{3}{2}\right)\\ 3x+2. & \left(x \geqslant \frac{3}{2}\right)\end{cases}$$

说明 化简本题的关键在于去掉两个绝对值符号. 只去掉一个绝对值符号很容易，如 $|x+5|$，只要考虑 $x+5$ 的正负，可以分为 $x<-5$ 与 $x \geqslant -5$ 两种情况来讨论. 这里的 $x=-5$ 是 $x+5=0$ 的解. 我们称它为一个零点，同理，对于 $|2x-3|$，也有一个零点 $x=\frac{3}{2}$. 为了同时去掉两个绝对值符号，我们将零点 -5，$\frac{3}{2}$ 都标在同一数轴上. 这两点把数轴分为三个部分(如图 3-2 所示)，即 $x<-5$，$-5 \leqslant x < \frac{3}{2}$，$x \geqslant \frac{3}{2}$. 我们就分这三种情况进行讨论.

图 3-2

确定了讨论的范围后，原式的化简就简单多了. 这种令各个绝对值内的代数式为 0，找出零点，确定讨论范围的方法称为零点分段法. 这种方法在解决有多个绝对值的化简问题时，有着广泛的应用.

例 7 化简 $||x-1|-2|+|x+1|$.

解 先找零点.

由 $x-1=0$ 得 $x=1$.

由 $|x-1|-2=0$ 即 $|x-1|=2$，得 $x-1=\pm 2$，从而 $x=-1$ 或 $x=3$.

由 $x+1=0$ 得 $x=-1$.

所以零点共有 -1，1，3 三点. 因此，我们应将数轴分成 4 个部分，即

$$x<-1,\ -1\leqslant x<1,\ 1\leqslant x<3,\ x\geqslant 3$$

当 $x<-1$ 时，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=|-(x-1)-2|+[-(x+1)]\\&=|-x-1|-x-1\\&=-x-1-x-1=-2x-2.\end{aligned}$$

当 $-1\leqslant x<1$ 时，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=|-(x-1)-2|+x+1\\&=|-x-1|+x+1\\&=x+1+x+1=2x+2.\end{aligned}$$

当 $1\leqslant x<3$ 时，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=|x-1-2|+x+1\\&=|x-3|+x+1\\&=3-x+x+1=4.\end{aligned}$$

当 $x\geqslant 3$ 时，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=|x-1-2|+x+1\\&=|x-3|+x+1\\&=x-3+x+1=2x-2.\end{aligned}$$

即

$$原式=\begin{cases}-2x-2, & (x<-1)\\ 2x+2, & (-1\leqslant x<1)\\ 4, & (1\leqslant x<3)\\ 2x-2. & (x\geqslant 3)\end{cases}$$

说明 由于本例中含双重绝对值，采用零点分段法时，不要忘了考虑 $||x-1|-2|$ 的零点.

例 8 如果 $abc\neq 0$，求 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$ 的所有可能值.

解 因为 $abc\neq 0$，所以 a，b，c 均非零. 因此 $\frac{a}{|a|}=\begin{cases}1 & (a>0),\\ -1 & (a<0),\end{cases}$ 即 $\frac{a}{|a|}$ 有两种可能值 ± 1. 同理，$\frac{b}{|b|}$，$\frac{c}{|c|}$ 也都只有 ± 1 这两种可能取值. 因此，$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$ 的取值可分为下面四种情况，分别为在 $\frac{a}{|a|}$，$\frac{b}{|b|}$，$\frac{c}{|c|}$ 中有 3 个 1，2 个 1 及 1 个 -1，1 个 1 及 2 个 -1，3 个 -1. 从而，原式有 4 种可能值，即 3，1，-1，-3.

例 9 若 $|x-1|$ 与 $|y+2|$ 互为相反数，试化简 $(x+y)^{1999}$.

解 因为 $|x-1|$ 与 $|y+2|$ 互为相反数，即 $|x-1|+|y+2|=0$，由于 $|x-1|$ 与 $|y+2|$ 都是非负数，所以必有

$$x-1=0,\ y+2=0,$$

即 $x=1,\ y=-2.$

于是有

$$(x+y)^{1999}=(1-2)^{1999}=(-1)^{1999}=-1.$$

说明 若两个或两个以上的非负数的和为 0，则每一个非负数都为 0. 到目前为止，我们学过的非负数有绝对值与偶次幂（主要是平方数）. 我们有：

$(x-a)^2+(x-b)^2=0$ 相当于 $x-a=0$ 且 $x-b=0$，

$|x-a|+(x-b)^2=0$ 相当于 $x-a=0$ 且 $x-b=0$，

$|x-a|+|x-b|=0$ 相当于 $x-a=0$ 且 $x-b=0$.

例 10 a，b 为有理数且 $|a+b|=a-b$，试求 ab 的值.

解 当 $a+b \geqslant 0$ 时，由

$|a+b| = a+b = a-b$ 得 $b = -b$，

故此时 $b = 0$.

当 $a+b < 0$ 时，由

$|a+b| = -(a+b) = -a-b = a-b$，得 $-a = a$，

故此时 $a = 0$.

所以，不管是 $a+b \geqslant 0$ 还是 $a+b < 0$，a，b 中总有一个为 0，因此，$ab = 0$.

说明 上例是先给出绝对值的结果即 $|a+b|$ 的值为 $a-b$，而求此时 a，b 所要满足的条件，因此，它和一般绝对值化简的问题的过程恰好相反，但从本质上讲，它和一般绝对值化简的问题是一致的，即都要从绝对值的定义来寻求解答.

练　习　题

A　组

1. 判断下列各题是否正确.

(1) 当 $b<0$ 时，$|b|=-b$.　(　　)

(2) 若 a 是有理数，则 $|a|$ 一定是正数.　(　　)

(3) 当 $|m|=m$ 时，$m>0$.　(　　)

(4) 若 $a=-b$，则 $|a|=|b|$.　(　　)

(5) 若 $a<b$，则 $|a|<|b|$.　(　　)

(6) $a+|a|$ 一定是正数.　(　　)

2. 若 $-1<x<1$，试化简 $|x+1|-|x-1|$.

3. 若 $a<0$，试化简 $\dfrac{2a-|3a|}{||3a|-a|}$.

4. 若 $x<-5$，化简 $|3x+|x+5||-|2x+8|$.

5. 设 $a<0$ 且 $ax\leqslant|2a|$，化简 $|x+2|-|2x+5|$.

6. 化简 $\dfrac{x}{|x|}-\dfrac{|x|}{x}$.

7. 化简 $\dfrac{|x+|x||}{x}$.

8. 化简 $|2x+5|-|3x-7|$.

9. 化简 $|x-\dfrac{1}{5}|+|x+\dfrac{1}{5}|$.

10. 已知 $|a|=5\dfrac{2}{3}$，$|b|=1\dfrac{1}{3}$，求 $a-b$ 的值.

B　组

11. 若 $|a-b|=|a|+|b|$，试求 a，b 应满足的关系.

12. 如果 $abcd\neq0$，试求 $\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{b}{|b|}+\dfrac{c}{|c|}+\dfrac{d}{|d|}$ 的所有的可能值.

13. 已知 $|a+b|+|a-b|=0$，化简

$$|a^{1999}+b^{1999}|+|a^{1999}-b^{1999}|.$$

14. 化简 $|2x-3|+|3x-5|-|5x+1|$.

15. 化简 $||2x-4|-6|+|3x-6|$.

测　试　题

1. 判断下列各题是否正确

(1) $-|a|\leqslant -a$. (　　)

(2) $a+|a|$ 一定是非负数. (　　)

(3) 若 $a+b=0$，则 $|a|=|b|$. (　　)

(4) 若 $|x-3|+x-3=0$，则 $x<3$. (　　)

2. 化简 $|a|-a$.

3. 若 $-2\leqslant x\leqslant 2$，试化简 $|x+2|+|x-2|$.

4. 化简 $|3x-2|+|2x+3|$.

5. 化简 $||x-1|-3|+|3x+1|$.

6. 若 $|x+y-9|+(2x-y+3)^2=0$，求 x 与 y 的值.

7. 已知 $|x|=3$，$|y|=5$，试求 $x+y$ 的所有可能值.

8. 已知 $abc\neq 0$，试求 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ 的所有可能值.

第四讲　一元一次方程

一、知识要点和基本方法

代数方程在初中代数中占有很重要的地位，而一元一次方程是代数方程中最基础的部分，高次方程及方程组往往化为一元一次方程来求解. 因此，掌握好这部分内容，有助于我们学习一些复杂的方程.

任何一个一元一次方程，通过变形，总可以化为 $ax = b$ 的形式. 如果 $a \neq 0$，则它有唯一解 $x = \frac{b}{a}$.

二、例题精讲

例 1　解方程 $2(x + 4) - 5(x - 1) = 7(x + 3) - 3(x - 2)$.

解　去括号得

$$2x + 8 - 5x + 5 = 7x + 21 - 3x + 6,$$

移项合并同类项得

$$-7x = 14,$$

所以

$$x = -2.$$

说明　任何一个一元一次方程，通过移项、合并同类项等，总可以变为 $ax = b$ 的形式. 如果 $a \neq 0$，那么 $x = \frac{b}{a}$. 在上述过程中，应注意不要写成连等的形式，如 $2(x + 4) - 5(x - 1) = 2x + 8 - 5x + 5 = -3x + 13 = \cdots\cdots$. 还要注意移项时，被移的项应改变正

负号.

例 2 解方程 $\frac{2x+1}{3}-\frac{x-1}{2}=1$.

解 通分得 $\frac{4x+2-3x+3}{6}=1$,

即 $\frac{x+5}{6}=1$,

两边同时乘以 6 得 $x+5=6$,

移项得 $x=6-5$,

所以 $x=1$.

说明 上例虽然含有分数,但由于分母不含未知数,故它仍为一元一次方程,不要误认为是分式方程.

例 3 解关于 x 的方程 $\frac{x-a}{b}-\frac{x-b}{a}=\frac{b}{a}$ 其中 $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq b$.

解 通分得 $\frac{ax-a^2-bx+b^2}{ab}=\frac{b^2}{ab}$,

两边同时乘以 ab 得 $(a-b)x+b^2-a^2=b^2$

移项得 $(a-b)x=a^2$

因为 $a\neq b$, 即 $a-b\neq 0$,

所以 $x=\frac{a^2}{a-b}$.

说明 与例 2 的不同之处在于本题含有字母 a、b,这样的字母 a、b 等我们称之为参数. 本题由于有已知条件 $a\neq b$, 解的过程与例 2 完全一致. 如果没有这个条件,那么当 $a=b$ 即 $a-b=0$ 时,情形又是怎样呢? 我们举两个简单的例子. 如方程 $2x+2=2x+3$, 移项后得 $0\cdot x=1$. 显然不论 x 为什么值, $0\cdot x=0\neq 1$. 因此,这时原方程无解. 又如方程 $2x+2=2x+2$, 移项后得 $0\cdot x=0$. 我们发现,不论 x 为任意数,都有 $0\cdot x=0$, 因此;这时解可为任意数,原方程有无数多个解.

综上所述,关于 x 的方程 $ax=b$, 我们有:

(1) 当 $a\neq 0$ 时,方程有唯一解 $x=\frac{b}{a}$;

(2) 当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，方程无解；

(3) 当 $a=0$，$b=0$ 时，方程有无数多个解，且解为任意数.

反过来，结论也是正确的. 即对方程 $ax=b$，我们有

(1) 若方程有唯一解，则 $a\neq 0$.

(2) 若方程无解，则 $a=0$ 且 $b\neq 0$.

(3) 若方程有无数多个解，则 $a=0$ 且 $b=0$.

例 4 解关于 x 的方程 $mx-1=nx$.

解 移项整理后得 $(m-n)x=1$，

(1) 当 $m-n\neq 0$ 即 $m\neq n$ 时，

方程有唯一解 $x=\dfrac{1}{m-n}$.

(2) 当 $m-n=0$ 即 $m=n$ 时，

由于 $1\neq 0$，故原方程无解.

说明 在解含参数的一元一次方程时，我们应该分类进行讨论. 讨论必须完整，不能漏掉任何一种情况. 下面再举两例.

例 5 解关于 x 的方程 $4m^2-x=2mx+1$.

解 移项得

$$2mx+x=4m^2-1,$$

即 $(2m+1)x=(2m+1)\cdot(2m-1)$.

(1) 当 $2m+1\neq 0$ 即 $m\neq -\dfrac{1}{2}$ 时，方程有唯一解 $x=2m-1$.

(2) 当 $2m+1=0$ 即 $m=-\dfrac{1}{2}$ 时，由于 $(2m+1)\cdot(2m-1)=0$，故方程有无数多解，且解为任意数.

例 6 解关于 x 的方程 $\dfrac{1}{3}m(x-n)=\dfrac{1}{4}(x+2m)$.

解 去分母、移项得

$$4mx-4mn=3x+6m,$$

即 $(4m-3)x=4mn+6m$.

所以(1) 当 $4m-3\neq 0$，即 $m\neq \dfrac{3}{4}$ 时，原方程有唯一解 $x=$

$\frac{4mn+6m}{4m-3}$.

(2) 当 $4m-3=0$，即 $m=\frac{3}{4}$ 时，又分为两种情况：

若 $4mn+6m=0$，即 $n=-\frac{6m}{4m}=-\frac{3}{2}$ 时，方程有无数多解，解为任意数.

若 $4mn+6m\neq 0$，即 $n\neq-\frac{6m}{4m}=-\frac{3}{2}$ 时，原方程无解.

综上所述

当 $m\neq\frac{3}{4}$，n 为任意数时，方程有唯一解 $x=\frac{4mn+6m}{4m-3}$.

当 $m=\frac{3}{4}$，$n=-\frac{3}{2}$ 时，方程有无数多解，且方程的解为任意数.

当 $m=\frac{3}{4}$，$n\neq-\frac{3}{2}$ 时，方程无解.

例7 已知关于 x 的方程 $2a(x-1)=(5-a)x+3b$ 有无数多解，试求 a、b 的值.

解 移项合并得

$$(3a-5)x=3b+2a,$$

由于原方程有无数多解，所以

$$\begin{cases}3a-5=0,\\3b+2a=0,\end{cases}$$

解得 $a=\frac{5}{3}$，$b=-\frac{10}{9}$.

说明 例7是根据方程解的情况，决定参数的取值.

例8 已知一元一次方程 $ax=b$ 有两个不同的解 x_1 和 x_2，求证这个方程必有无数多个解.

证明 因为 x_1，x_2 都是方程 $ax=b$ 的解，所以 $ax_1=b$，$ax_2=b$. 从而

$$ax_1=ax_2,$$

即　$a(x_1 - x_2) = 0.$

又因为 $x_1 \neq x_2$，所以必有 $a = 0$. 因此

$$b = ax_1 = 0 \cdot x_1 = 0.$$

由于 $a = 0$ 且 $b = 0$，因此方程 $ax = b$ 有无数多解.

说明　例 8 告诉我们，一个一元一次方程，只要有两个解，那么它必有无数多解.

练　习　题

A　组

1. 解下列方程

(1) $3x + 2 = 2x - 5$.

(2) $3(2x + 1) = 4(x - 3)$.

(3) $\frac{1}{3}(4 - 3x) = \frac{1}{2}(5x - 6)$.

(4) $\frac{3}{13}x + \frac{1}{23} = \frac{5}{11}x + \frac{1}{7}$.

2. 解下列关于 x 的方程

(1) $4mx - 3 = 2x + 6$.

(2) $4x + b = ax - 8$.

(3) $9a^2 + 2x = 3ax + 4$.

(4) $\frac{m}{2}(x + n) = \frac{1}{3}(x + 2)$.

B　组

3. 已知关于 x 的方程 $3a(x + 2) = (2b - 1)x + 5$ 有无数多个解，求 a 与 b 的值.

4. 已知关于 x 的方程 $3x - 3 = 2a(x + 1)$ 无解，试求 a 的值.

5. 解下列关于 x 的方程

(1) $m^2(1 - x) = mx + 1$.

(2) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b - a} = \frac{a}{a + b}$. $(a \neq 0, a^2 \neq b^2)$

(3) $(mx - n)(m + n) = 0$.

(4) $\frac{x - b - c}{a} + \frac{x - c - a}{b} + \frac{x - a - b}{c} = 3$. $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \neq 0\right)$

6. 已知方程 $ax + 3 = 2x - b$ 有两个不同的解，试求 $(a + b)^{1999}$

的值.

7. 求自然数$\overline{a_1a_2\cdots a_n}$，使得

$12\times\overline{2a_1a_2\cdots a_n1}=21\times\overline{1a_1a_2\cdots a_n2}$.

测 试 题

1. 解下列方程

(1) $3x-5=2x+3$.

(2) $3(2x+8)=4(x-6)$.

(3) $\frac{2x-3}{3}-\frac{3x+4}{2}=\frac{2}{3}$.

(4) $\frac{3x+8}{2}-1=\frac{3x-4}{2}$.

2. 解下列关于 x 的方程

(1) $3mx+4=2x+1$.

(2) $2ax+3=5x-b$.

(3) $\frac{x-a}{b}-\frac{x-b}{a}=\frac{b}{a}$. $(a\neq 0, b\neq 0)$

(4) $(3ax-b)(a+b)=0$.

3. 已知关于 x 的方程 $2m(3x+2)-1=(2n+1)x$ 有无数多个解，求 m 与 n 的值.

4. 已知关于 x 的方程 $2a(x+2)=4x+3$ 无解，试求 a 的值.

5. 关于 x 的方程 $mx+4=3x-n$，分别求 m，n 为何值时，原方程：(1)有唯一解. (2)有无数多解. (3)无解.

第五讲　一次方程组

一、知识要点和基本方法

一次方程组也称为线性方程组，它是解决许多实际问题的重要工具. 解一次方程组的基本思想是“消元”，通过消元，把一次方程组转化为一个一元一次方程来求解. 常用的消元法有代入消元法和加减消元法.

二、例题精讲

例 1　解方程组

$$\begin{cases} x + 3y = 2, & (1) \\ 3x - y = -4. & (2) \end{cases}$$

解　由(1)式整理得　$x = 2 - 3y.$　(3)

将(3)代入(2)得

$$3(2 - 3y) - y = -4,$$

$$-10y = -10,$$

$$y = 1.$$

将 $y = 1$ 代入(3)得　$x = -1.$

所以原方程组的解为

$$\begin{cases} x = -1, \\ y = 1. \end{cases}$$

说明　本题采用了代入消元法.

例 2 解方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 3, & (1) \\ 3x + 2y - z = 1, & (2) \\ x - 3y + 2z = 5. & (3) \end{cases}$$

解 (1) + (2) 得 $4x + 3y = 4$, (4)

(1) × 2 − (3) 得 $x + 5y = 1$, (5)

(5) × 4 − (4) 得 $17y = 0$,

所以 $y = 0$.

将 $y = 0$ 代入(5)得 $x = 1$.

将 $x = 1$, $y = 0$ 代入(1)得 $z = 2$.

所以原方程组的解为

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \\ z = 2. \end{cases}$$

说明 本例采用了加减消元法. 一般地,求解一次方程组,都可以通过代入消元法或加减消元法,甚至两种方法一起使用,来解决问题. 因此,这两种方法是常用的基本方法. 在熟练运用这两种方法的基础上,我们也可以从题目本身的特点出发,巧妙地消元,简化解题过程. 下面简单地举几个例子.

例 3 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}, & (1) \\ 5x + 2y - 3z = 8. & (2) \end{cases}$$

解 令 $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4} = k$, 即

$$x = 2k,\ y = 3k,\ z = 4k.$$

将它们代入(2)得

$$5 \times 2k + 2 \times 3k - 3 \times 4k = 8,$$

$$k = 2.$$

所以 $x=4$，$y=6$，$z=8$.

原方程组的解为

$$\begin{cases} x=4, \\ y=6, \\ z=8. \end{cases}$$

说明 “遇到连比就设 k”，这是非常有用的方法. 在解方程组时，若方程组中有连比的形式存在，一般用设 k 法比较简单. 再举一例.

例 4 解方程组

$$\begin{cases} x:y:z:w=1:2:3:4, & (1) \\ 2x-3y+4z-w=4. & (2) \end{cases}$$

解 令 $x=k$，则 $y=2k$，$z=3k$，$w=4k$，将它们代入(2)得

$$2\times k-3\times 2k+4\times 3k-4k=4,$$

$$k=1.$$

所以 $x=1$，$y=2$，$z=3$，$w=4$.

原方程组的解为

$$\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3, \\ w=4. \end{cases}$$

说明 $x:y:z:w=1:2:3:4$，相当于 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=\frac{w}{4}$.

例 5 解方程组

$$\begin{cases} 2x+3(5x+7y)=4, & (1) \\ 5x+7y=2. & (2) \end{cases}$$

解 将(2)整体代入(1)，得

$$2x + 3 \times 2 = 4,$$

$$x = -1. \tag{3}$$

将(3)代入(2)得　$y = 1$.

所以原方程的解为

$$\begin{cases} x = -1, \\ y = 1. \end{cases}$$

说明　有时可根据题目的特点，整体代入，简化运算. 当然，不是所有的题目都像例 5 一样，直接就可以整体代入，有时，通过仔细观察，抓住原方程组的特征，将它先作一些处理，然后再整体代入.

例 6　解方程组

$$\begin{cases} 5x + 6y - 8z = 12, & (1) \\ x + 4y - z = -1, & (2) \\ 2x + 3y - 4z = 5. & (3) \end{cases}$$

解　由(1)得　$x + 2(2x + 3y - 4z) = 12.$　(4)

将(3)整体代入(4)得　$x = 2$.

将 $x = 2$ 代入(2)，(3)得

$$\begin{cases} 4y - z = -3, & (5) \\ 3y - 4z = 1. & (6) \end{cases}$$

(5) × 4 − (6) 得　$13y = -13$，故 $y = -1$.

将 $y = -1$ 代入(5)得：$z = -1$.

所以原方程组的解为

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = -1, \\ z = -1. \end{cases}$$

说明　整体代入法是代入法的一种，它类似于换元法. 实质上，为了解一次方程组，用代入消元法和加减消元法是完全可以胜任的，如上例我们不用整体代入，而直接用 (1) − (3) × (2)，同样可得到 $x = 2$.

例7 解方程组

$$\begin{cases} x+y=1, & (1) \\ y+z=2, & (2) \\ z+x=3. & (3) \end{cases}$$

解 (1)+(2)+(3)得 $2(x+y+z)=6$,

即 $x+y+z=3.$ (4)

(4)−(1)得 $z=2$,

(4)−(2)得 $x=1$,

(4)−(3)得 $y=0.$

所以原方程组的解为

$$\begin{cases} x=1, \\ y=0, \\ z=2. \end{cases}$$

说明 本题的未知元以对称的形式出现,此时,将方程叠加后,一般可简化计算.

例8 解方程组

$$\begin{cases} 2x+y+z=2, & (1) \\ x+2y+z=4, & (2) \\ x+y+2z=6. & (3) \end{cases}$$

解 (1)+(2)+(3)得 $4(x+y+z)=12$,

所以:$x+y+z=3.$ (4)

(1)−(4)得 $x=-1$,

(2)−(4)得 $y=1$,

(3)−(4)得 $z=3.$

所以原方程组的解为

$$\begin{cases} x=-1, \\ y=1, \\ z=3. \end{cases}$$

总之,解一次方程组的思想方法是消元,最基本的消元法是代入

消元法和加减消元法. 当然，解一次方程组的方法还有很多，我们只有在熟悉各种解法的前提下，根据题目本身的特点，灵活地运用方法和技巧，才能解得更快，更正确.

练　习　题

A　　组

1. 解下列一次方程组

(1) $\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 1 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ 5x + 4y + 8 = 0 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + 5z = 12 \\ 2x - 4y - z = -7 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 12 \\ x - y + 3z = 4 \\ 4x + y - 3z = -2 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 15 \\ \dfrac{x + 4z}{3} = \dfrac{y - 3z}{4} = 3 \end{cases}$

B　　组

2. 用适当方法解下列方程组

(1) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + z + w = 3 \\ z + w + x = 5 \\ w + x + y = 8 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + 2z = 7 \\ 2x + 2y + 3z = 9 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 7x - 4y = 7 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x + y - 3z = 2a \\ x - 3y + z = 2b \\ -3x + y + z = 2c \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x : y : z = 1 : 3 : 5 \\ x + y + z = 18 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{5} \\ 2x + 3y - 4z = 8 \end{cases}$

测 试 题

解下列方程组

(1) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 7x + 8y = 5 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x : y : z = 2 : 1 : 3 \\ 2x + y + 3z = 14 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \frac{x}{5} = -\frac{y}{3} = \frac{z}{2} \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \\ -x + y + z = 3 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x + 2y = y + 2z = 5 \\ z + 2x = 2 \end{cases}$

第六讲　一次方程组的应用

一、知识要点和基本方法

一次方程组是解决许多实际问题的重要工具，它被广泛应用于社会生活的各个领域. 本讲讨论它在解决一些数学问题时的应用.

二、例题精讲

例 1　一个自然数减去 63 后是一个完全平方数，这个自然数加上 26 后，还是一个完全平方数，求这个自然数.

解　设这个自然数为 x，它加上 26 后为 a^2，减去 63 后为 b^2，其中 a、b 为正整数. 由题意，可得

$$\begin{cases} x + 26 = a^2, & (1) \\ x - 63 = b^2. & (2) \end{cases}$$

(1)－(2)得　$89 = a^2 - b^2$，即

$$(a + b)(a - b) = 89. \quad (3)$$

因为 a、b 为正整数，所以 $a + b > a - b > 0$，又 89 为质数，故它的正因数只有 1 和 89，所以由(3)，必有

$$\begin{cases} a + b = 89, \\ a - b = 1. \end{cases}$$

解得　$a = 45$ 且 $b = 44$.

因此，$x = 45^2 - 26 = 2\,025 - 26 = 1\,999$.

答　这个自然数为 1 999.

说明 本题是一次方程组在数论中的应用.这种题目,通常先给出的是一个不定方程或不定方程组,但我们根据整数的一些性质,往往可以把它化为一次方程组来求解.

例2 若两个自然数的和与差相乘,积为84,求这两个自然数.

解 设这两个数中较大的一个为 x,较小的一个为 y,依题意,有

$$(x+y)(x-y)=84.$$

又因为 $84=2^2\times3\times7$,而 $(x+y)$ 与 $(x-y)$ 必定是同奇或同偶的(想一想,为什么?),所以,$(x+y)$ 与 $(x-y)$ 必然同为偶数,注意到 $x+y>x-y$,故有

$$\begin{cases}x+y=2\times3\times7,\\x-y=2,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x+y=2\times7,\\x-y=2\times3.\end{cases}$$

解这两个方程组,易得

$$\begin{cases}x=22,\\y=20,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x=10,\\y=4.\end{cases}$$

所以,这两个数为 22, 20 或 10, 4.

说明 本题涉及的知识较多,如有疑问,可参阅本书综合篇中的有关内容.

例3 已知代数式 $ax+b$,当 $x=1$ 时,值为7,当 $x=-2$ 时,值为 -2,求当 $x=2$ 时,这个代数式的值.

解 由题意,可得

当 $x=1$ 时,有 $a+b=7$.

当 $x=-2$ 时,有 $-2a+b=-2$.

即得方程组

$$\begin{cases}a+b=7,\\-2a+b=-2.\end{cases}$$

解这个方程组,易得 $a=3$, $b=4$.

即原来的代数式为 $3x+4$. 所以当 $x=2$ 时,这个代数式的值为: $3\times2+4=10$.

说明 本题是用待定系数法解题的一个例子.用待定系数法(详见第十三讲)解题时,往往根据题设,把问题归结为一个一次方程组.

例4 若代数式 ax^2+bx+c 当 $x=0$、1、2 时,值分别为 -2、2、8,求 a、b、c.

解 由题意,有

$$\begin{cases} c=-2, \\ a+b+c=2, \\ 4a+2b+c=8. \end{cases}$$

解之得 $a=1$, $b=3$, $c=-2$.

例5 已知方程组

$$\begin{cases} ax+by=3, \\ 5x-cy=1, \end{cases}$$

小明正确解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$ 而小亮粗心,把 c 给看错了,他解得 $\begin{cases} x=3, \\ y=6. \end{cases}$ 试求 a、b、c.

解 由题意,易知 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 是原方程组的解,因此,将它们代入原方程组,有 $2a+3b=3$, $5\times 2-3c=1$.

又小亮只把 c 看错,所以有 $x=3$ 且 $y=6$ 是方程 $ax+by=3$ 的一个解,从而有

$$3a+6b=3.$$

因此,我们得方程组

$$\begin{cases} 2a+3b=3, \\ 10-3c=1, \\ 3a+6b=3. \end{cases}$$

解之得 $\begin{cases} a=3, \\ b=-1, \\ c=3. \end{cases}$

答 a、b、c 分别为 3、-1、3.

例6 若 $|x+y-4|$ 与 $(2x-y+7)^2$ 的值互为相反数，试求 x 与 y 的值.

解 由相反数的意义，有

$$|x+y-4| = -(2x-y+7)^2,$$

即 $$|x+y-4| + (2x-y+7)^2 = 0. \qquad (*)$$

因为 $|x+y-4| \geqslant 0, (2x-y+7)^2 \geqslant 0,$

所以，只有 $|x+y-4| = 0$ 且 $(2x-y+7)^2 = 0$ 时，$(*)$ 式才成立. 即

$$\begin{cases} x+y-4=0, \\ 2x-y+7=0, \end{cases}$$

解之得 $x=-1, y=5.$

说明 本题考查绝对值、相反数等一些基本概念. 同时，利用绝对值，完全平方数是非负数，最终将问题化为一个一次方程组的问题.

例7 若 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$ 是关于 x、y、z 的方程 $|ax+by+2| + (ay+cz-1)^2 + |bz+cx-3| = 0$ 的一个解，试求 a、b、c 的值.

解 由题意，将 $x=-1, y=1, z=2$ 代入原方程，得

$$|-a+b+2| + (a+2c-1)^2 + |2b-c-3| = 0.$$

由于 $|-a+b+2| \geqslant 0, (a+2c-1)^2 \geqslant 0, |2b-c-3| \geqslant 0.$ 因此必有

$$|-a+b+2| = 0, (a+2c-1)^2 = 0, |2b-c-3| = 0.$$

即 $$\begin{cases} -a+b+2=0, \\ a+2c-1=0, \\ 2b-c-3=0. \end{cases}$$

解之得 $a=3, b=1, c=-1.$

例 8 已知 $\frac{1}{3}x^{2a+3b}\cdot y^{7-a+7b}$ 与 $-\frac{2}{5}x^{10-b}\cdot y^{3a+2b}$ 是同类项，求 a 与 b.

解 由同类项的意义，得

$$\begin{cases}2a+3b=10-b,\\7-a+7b=3a+2b.\end{cases}$$

解之得 $a=3, b=1$.

说明 本例把同类项与一次方程组结合起来了.

总之，许多数学问题初看不属于一次方程组的问题，但经过分析，我们可以通过建立一次方程组来解决问题. 限于我们现在所学的知识，我们只举上述几例. 在以后我们的学习中，还会碰到用一次方程组来解决的数学问题.

练　习　题

A　组

1. 已知代数式 $3ax-b$，当 $x=0$ 时，值为 3；当 $x=1$ 时，值为 9. 试求 a、b.

2. 已知代数式 ax^2+3x-b，当 $x=1$ 时，值为 3，当 $x=-2$ 时，值为 4. 求当 $x=3$ 时，这个代数式的值.

3. 若 $|3x+2y-4|+|3y-2x+5|=0$，试求 x 与 y 的值.

4. 若 $(x-3y+6)^2+|4x-2y-3|=0$，试求 x 与 y 的值.

5. 若两个自然数的和与差的乘积为 71，求这两个数.

6. 求方程 $(2x+y)(x-2y)=7$ 的正整数解.

7. 若 $-7x^{2m-2}\cdot y^{m-n}$ 与 $\frac{1}{3}x^{4-m}\cdot y^{2n-1}$ 是同类项，求 m 与 n 的值.

8. 已知方程 $ax+3b=8$，小王正确解得 $x=3$；而小李由于粗心，把 b 看作 6，解得 $x=5$. 试求 a、b 的值.

B　组

9. 若 $(3a+2b-c)^2$ 与 $|2a+b|+|2b+c|$ 互为相反数，求 a、b、c.

10. 求方程 $(2x-y)(x-2y)=5$ 的整数解.

11. 求方程 $xy=x+y$ 的正整数解.

12. 求方程 $m^2-n^2=60$ 的正整数解.

13. 已知方程组 $\begin{cases}ax+by=5,\\cx+dy=-3\end{cases}$ 的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$ 小明错把 b 看作 6，解得 $\begin{cases}x=11,\\y=-1,\end{cases}$ 求 a、b、c、d.

14. 若关于 x 的方程 $(m+n)x+4m=(2m-1)x+n+7$ 有无数多解，求 m 与 n 的值.

测　试　题

1. 若 $\frac{1}{3}x^{2m-3n}\cdot y^{2m-7}$ 与 $-\frac{1}{8}x^{9-2m+4n}\cdot y^{n}$ 是同类项，求 m 与 n 的值.

2. 如果 $x=1$，$y=2$ 是关于 x，y 的方程 $(ax+by-12)^2+|ay-bx+1|=0$ 的一个解，求 a 与 b 的值.

3. 若 $|3x-2y+4|$ 与 $(x+3y+2)^2$ 互为相反数，求 x 与 y 的值.

4. 一个正整数，减去 4 后是一个完全平方数，加上 9 后也是一个完全平方数，求这个自然数.

5. 求方程 $(2x-y)(x-2y)=11$ 的整数解.

6. 若代数式 $ax+b$，当 $x=0$ 时，其值为 -4，当 $x=2$ 时，其值为 2. 试求 $(a+b)^{1999}$.

第七讲　列方程(组)解应用题

一、知识要点和基本方法

应用题是中学数学的重要内容之一,它理论联系实际,有助于培养学生理解问题,分析问题和解决问题的能力.解应用题的最主要的方法是列方程或方程组.

列方程(组)解应用题的一般步骤是:

(1) 根据题意设未知数.

(2) 列出一些与方程有关的代数式.

(3) 找出等量关系,列出方程(组).

(4) 解方程(组).

(5) 代入检验.

(6) 写出答案.

二、例题精讲

例 1　(希腊古题)传说希腊数学家丢番图的墓碑文是一道数学题,上面刻着:"他的童年占去一生的$\frac{1}{6}$,接着$\frac{1}{12}$是少年时期,又过了$\frac{1}{7}$的时光,他结婚了,5 年以后,上帝赐给他一个儿子,可是儿子命运不济,只活到父亲岁数的一半,就匆匆离去.4 年后,他的父亲也因过分悲伤而离开了人世."问丢番图活了多少岁?

解　设丢番图活了 x 岁,根据题意,得

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x,$$

去分母，得　$14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 = 84x$，

移项，合并同类项得　$9x = 756$，

所以　$x = 84$.

答　丢番图活了 84 岁.

说明　本题按照列方程解应用题的步骤，一步一步得出结果. 在找等量关系时，我们把丢番图的一生分成几个阶段，然后利用总量等于各分量之和来列出等式.

例 2　有一个两位数，它的十位数字与个位数字的和为 8，并且这个两位数除以十位上的数字与个位上的数字的差，所得的商为 11，余数为 5. 求这个两位数.

解　设这个两位数的十位数字为 x，则个位数字为 $(8 - x)$，从而这个两位数可以表示为 $10x + (8 - x)$，根据题意，得

$$10x + (8 - x) = 11 \times [x - (8 - x)] + 5,$$

解之得

$$x = 7,$$

所以　$8 - x = 1$.

答　这个两位数是 71.

说明　本题是一个数字问题. 在这种问题中，经常要把一个整数用它的各位数字表示出来，即一般地，有

$$\overline{a_1a_2a_3\cdots a_n} = a_n + a_{n-1} \times 10 + a_{n-2} \times 10^2 + \cdots + a_2 \times 10^{n-2} + a_1 \times 10^{n-1}$$

($\overline{a_1a_2\cdots a_n}$ 表示 n 位数，a_1，a_2，…，a_n 表示它的各位数字).

例 3　修一条公路，甲队独修需 10 天完成，乙队独修需要 12 天完成，丙队独修需 15 天完成. 现在先由甲队独修 2.5 天，再由乙队接着修，最后还剩下一段路，由三队合修 2 天才完成任务. 求乙队在整个修路工程中工作了几天?

解　设乙队在整个修路工程中共工作了 x 天，由题意得

$$\frac{2.5}{10} + \frac{x}{12} + 2 \times \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{15}\right) = 1,$$

解之得

$$x = 5.$$

答　乙队在修路工程中共工作了 5 天.

说明　本题是一个工程问题，这类问题用到的主要关系式为：

$$\text{工作量} = \text{工作效率} \times \text{工作时间}.$$

$$\text{工作效率} = \text{工作量} \div \text{工作时间}.$$

$$\text{工作时间} = \text{工作量} \div \text{工作效率}.$$

若工作量没有说明具体的数量，则通常把工作总量看作 1.

例 4　某班学生到 A 景点春游，队伍从学校出发，以每小时 4 千米的速度前进. 走到 1 千米时，班长被派回学校取一件遗忘的东西，他以每小时 5 千米的速度回校，取了东西后又以同样的速度追赶队伍，结果在距景点 1 千米的地方追上了队伍，求学校到景点的路程.

解　设学校到景点之间的路程为 x 千米，则从班长离开队伍到追上队伍这段时间内，班长走了 $(x-1+1)$ 千米，队伍走了 $(x-1-1)$ 千米，由他们走完各自路程所用的时间相同，得

$$(x-1+1) \div 5 = (x-1-1) \div 4,$$

解得

$$x = 10.$$

答　学校到该景点之间的路程为 10 千米.

说明　本题是一个行程问题，这类问题用到的主要关系式有：

$$\text{路程} = \text{速度} \times \text{时间}.$$

$$\text{速度} = \text{路程} \div \text{时间}.$$

$$\text{时间} = \text{路程} \div \text{速度}.$$

与行程问题相关的问题很多，如追及和相遇，圆周运动，流水问题等，这些问题除了具有行程问题的共性外，还有各自的特点.

例 5　农场有两片试验田，甲田的面积比这两片试验田的总面积的一半少 7 公顷，乙田的面积比这两片试验田的总面积的 $\frac{1}{3}$ 多 32 公顷. 问甲田和乙田各多少公顷？

解 设这两片试验田的总面积为 x 公顷，则甲田的面积为 $\left(\frac{1}{2}x-7\right)$ 公顷，乙田的面积为 $\left(\frac{1}{3}x+32\right)$ 公顷，由题意，得

$$\left(\frac{1}{2}x-7\right)+\left(\frac{1}{3}x+32\right)=x,$$

解之得

$$x=150,$$

所以

$$\frac{1}{2}x-7=68,$$

$$\frac{1}{3}x+32=82.$$

答 甲田有 68 公顷，乙田有 82 公顷.

说明 本题采用设间接未知数的方法. 在解应用题时，设未知数的方法有两种，一种是设直接未知数，即题目要求什么，就设它为未知数，如前面的例 1 到例 4 就采用设直接未知数法. 另一种是设间接未知数法，即有时设直接未知数不容易列出方程，可以设一个与所求量相关的量为未知数，以便列出方程.

本题除采用设间接未知数法外，还可以列方程组来加以解决，解答如下.

解 设甲田有 x 公顷，乙田有 y 公顷，则由题意，得

$$\begin{cases}x=\dfrac{x+y}{2}-7,\\ y=\dfrac{x+y}{3}+32,\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}x=68,\\ y=82.\end{cases}$$

答 甲田有 68 公顷，乙田有 82 公顷.

例 6 甲、乙两书架各有若干本书. 如果从乙架拿 5 本书放到甲架上，那么甲架上的书就比乙架上剩余的书多 4 倍；如果从甲架拿 5

本书放到乙架上，那么此时甲架上的书是乙架上的书的 3 倍. 问原来甲架、乙架各有书多少本？

解 设原来甲架有 x 本书，乙架有 y 本书，根据题意，有

$$\begin{cases} x + 5 = 5(y - 5), \\ x - 5 = 3(y + 5), \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x = 95, \\ y = 25. \end{cases}$$

答 原本甲架有书 95 本，乙架有书 25 本.

说明 (1) 如从乙架上拿 5 本书到甲架，则乙架上的书少 5 本，而甲架上的书要多 5 本，这一点千万别忘了.

(2) “甲架上的书比乙架上的书多 4 倍”相当于“甲架上的书是乙架上的书的 5 倍”. 一般地，“a 是 b 的 k 倍”与“a 比 b 多 k 倍”这两句话的含义是不同的，前者相当于 $a = kb$，后者相当于 $a = (k + 1)b$.

(3) 本题也可以设一个未知数，列方程求解，但列式的难度要比列方程组大，大家不妨一试.

例 7 小强问叔叔多少岁了，叔叔说：“我像你这么大时，你才 4 岁；你到我这么大时，我就 40 岁了.”问小强和叔叔今年各是多少岁？

解 设小强今年 x 岁，叔叔今年 y 岁，根据小强和叔叔的年龄差不变，可得

$$\begin{cases} y - x = x - 4, \\ y - x = 40 - y, \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x = 16, \\ y = 28. \end{cases}$$

答 小强今年 16 岁，叔叔今年 28 岁.

说明 本题是一个与年龄有关的问题，在解决这类问题时，关键是抓住年龄差不变这一特点来列出方程(组).

例 8 设有四个数，其中每三个数之和分别为 17、21、25、30，求这四个数.

解法一 设这四个数分别为 x、y、z、w，则根据题意，有

$$\begin{cases} x+y+z=17, \\ y+z+w=21, \\ z+w+x=25, \\ w+x+y=30. \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x=10, \\ y=6, \\ z=1, \\ w=14. \end{cases}$$

答 这四个数分别为 10、6、1、14.

解法二 设这四个数的和为 x，则这四个数分别为 $(x-17)$，$(x-21)$，$(x-25)$，$(x-30)$. 而这四个数的和为 x，从而有

$$(x-17)+(x-21)+(x-25)+(x-30)=x.$$

解之得

$$x=31.$$

所以 $x-17=14$，$x-21=10$，$x-25=6$，$x-30=1$.

答 这四个数分别为 14、10、6、1.

说明 在小学阶段，我们解应用题的方法主要是算术法，进入中学后，我们用列方程(组)的方法解应用题. 在一些条件不太明显或比较复杂的问题中，要列出算式，用算术法解应用题是比较困难的，而通过设未知数，往往可以直接或比较直接地把条件用等式表示出来，使数学关系更加清楚，使我们的思路更加清晰. 同样地，有时设一个未知数比较困难时，可以多设几个未知数，使列式更加简单，而把困难留给解方程(组). 一般来说，解方程(组)相对而言是比较容易的. 如例 6—例 8，都可以只设一个未知数解决，但相对于列方程组而言，列方程可能难度要大一些，同学们不妨一试.

练　习　题

A　组

1. 一个两位数，它的个位数字比十位数字大 5，而且这个两位数是它的数字和的 3 倍. 求这个两位数.

2. 甲、乙两人骑自行车同时从 A 地到 B 地，甲的速度是 15 千米/时，乙的速度是 10 千米/时，如果甲比乙先到 10 分钟. 问 A 和 B 相距多远?

3. 一项工程，甲单独做 15 天完工，乙单独做 20 天完工，丙单独做 24 天完工. 现在先让甲、乙合做 5 天，剩下工程由丙一个人完成，则丙需做多少天?

4. 含盐 40%的盐水若干，加清水 10 千克后，含盐的浓度变为 10%，问原有盐水多少千克?

5. 12 支篮球队进行循环赛. 规定每队赢一场得 2 分，输一场得 1 分，比赛弃权得 0 分，某队参加全部 11 场比赛，共得 17 分，问这个队输几场，赢几场?

6. 甲、乙两地相距 60 千米，一艘轮船往返于甲、乙两地之间，顺流时用 4 小时，逆流时用 5 小时，求这艘船在静水中的速度和流水的速度.

7. 有一个两位数，如果用它去除以个位数字，得商 9 余数为 6，如果用这个两位数除以个位数字与十位数字之和，则得商 5 余数为 3，求这个两位数.

8. 制造某种产品，1 人用机器，3 人靠手工，每天可制造 60 件；2 人用机器，2 人用手工，每天可制造 80 件. 若 3 人用机器，1 人靠手工，每天可制造多少件产品?

9. 有浓度分别为 25%和 20%的两种溶液，现要配成浓度为 22%的溶液 100 克，问两种溶液各需取多少克?

10. 甲对乙说："当我像你现在这么大时，你那时的年龄是我现在年龄的一半；当你像我现在这么大时，我们俩的年龄和是 63 岁."

问甲、乙两人今年各是多少岁？

B 组

11. 某人骑自行车，开始以 15 千米/时的速度行进，当离目的地的距离比已经走过的距离少 20 千米时，改用 10 千米/时的速度前进，这样，全程的平均速度为 12.5 千米/时，问全程是多少千米？

12. 一列客车和一列货车在平行轨道上同向行驶，客车长 200 米，货车长 280 米，客车的速度与货车的速度比为 5∶3，现客车从后面赶上货车，如果两车交叉的时间为 1 分钟. 求两车的速度，并求如果两车在平行轨道上相向行驶，它们交叉的时间有多长？

13. 一个六位数的最高位上的数字为 1，如果把这个数字移到原来个位数字的右边，得到一个新的六位数，那么新得到的数是原数的 3 倍，求原来的六位数.

14. 一人步行从甲地去乙地，第一天行若干千米，自第二天起，每一天都比前一天多走同样的路程，这样 10 天可以到达乙地，如果每天都以第一天的速度步行，用 15 天可以到达乙地；问如果每天都以第一种走法的最后一天的速度步行到达乙地，需要多少天？

测 试 题

1. 一个三位数，三个数位上的数字和为 17，百位上的数比十位上的数大 7，个位上的数是十位上的数的 3 倍，求这个三位数.

2. 甲、乙、丙三人，甲每分走 80 米，乙每分走 60 米，丙每分走 40 米. 如果甲、乙两人在 A 村，丙在 B 村，他们三人同时分别由 A、B 两村出发，相向而行，如果丙遇到甲后 10 分钟又遇到乙，求 A、B 两村的距离.

3. 有三个数，每两个数之和分别为 25，20，29，求这三个数.

4. 甲对乙说："我像你现在这么大时，你 5 岁；你像我现在这么大时，我与你的年龄和是 70 岁. 求甲、乙两人今年各多大？

5. 蜘蛛有 8 条腿，蜻蜓有 6 条腿 2 对翅膀，蝉有 6 条腿 1 对翅膀，现有这三种昆虫 18 只，共有 118 条腿和 20 对翅膀. 问每种昆虫

各有多少只？

6. 甲、乙两桶水，若将甲桶中的水倒 2 千克到乙桶中，此时甲桶中的水是乙桶中水的 3 倍；若将乙桶中水倒 1 千克到甲桶中，此时甲桶中的水比乙桶多 8 倍. 问原来甲、乙两桶中各有水多少千克？

第八讲 “设而不求”

一、知识要点和基本方法

上一讲我们讲述了列方程(组)解应用题,但有时我们会碰到一些应用题,它所涉及到的量比较多,量与量之间的关系也不太明显,若只根据题意,直接设未知数,就不容易解决问题,此时,我们可以设一些辅助未知数,把那些不明显的关系表示出来,而在求解含辅助未知数的方程(组)时,我们可以根据方程(组)的特点,将辅助未知数消去,不需要求出辅助未知数的值(有时也求不出辅助未知数的值),就可以得到原问题的解.这种方法我们称之为“设而不求”.

二、例题精讲

例1 甲、乙、丙三个车站处于一条直线上,乙站恰好是甲丙两站的中点,即乙站到甲站和到丙站的距离相等.A、B两人分别从甲、丙两站同时出发,相向而行.A经过乙站后再走100米,就与B第一次相遇,然后两人又继续前进,A走到丙站后立即返回,后在经过乙站300米后又追上B.问甲、乙两站的距离是多少米?

解 设甲、乙两站间的距离为S米,则乙丙两站间的距离也是S米,设A的速度为x,B的速度为y,则根据题意,可得

$$\begin{cases}\dfrac{S+100}{x}=\dfrac{S-100}{y}, & (1)\\[2ex] \dfrac{(S-100)+S+300}{x}=\dfrac{100+300}{y}. & (2)\end{cases}$$

该方程组只有两个方程,而有三个未知数,所以,在一般情况下

是不能确定这三个未知数的值的，但是，由于此方程组的特点，我们能够求得 S，而不用求辅助未知数 x 与 y.

由(2)得 $\dfrac{2S+200}{x}=\dfrac{400}{y}$,

即 $$\frac{S+100}{x}=\frac{200}{y}, \tag{3}$$

把$\dfrac{S+100}{x}$作为整体，由(1)、(3)得 $\dfrac{S-100}{y}=\dfrac{200}{y}$,

所以 $S-100=200$,

$$S=300.$$

答 甲、乙两站的距离是 300 米.

说明 本题若只设一个未知数 S，等量之间的关系就不太明显. 因此，我们又设了辅助未知数 x 与 y，从而列出了含三个未知数、两个方程的方程组. 再根据这个方程组本身的特点，在不求 x 与 y 的情况下，求得 S 的值.

例 2 小强上山时的速度为 3 千米/时，到达山顶后，沿原路下山，下山时的速度为 5 千米/时. 求小强在整个过程中的平均速度.

解 设小强上山时的路程为 S 千米，则上山所用的时间为$\dfrac{S}{3}$小时. 下山时的路程也应为 S 千米，下山时的时间为$\dfrac{S}{5}$小时，因此，在整个过程中，总的路程为 $2S$，总的时间为 $\dfrac{S}{3}+\dfrac{S}{5}$，根据平均速度的计算公式，得

$$\text{平均速度}=\frac{\text{总路程}}{\text{总时间}}=\frac{2S}{\frac{S}{3}+\frac{S}{5}}=\frac{2S}{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)S}$$

$$=\frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=\frac{15}{4}(\text{千米}/\text{时}).$$

答 小强在整个过程中的平均速度为$\dfrac{15}{4}$千米/时.

说明 有些同学会粗心地认为平均速度为 $\frac{3+5}{2}=4$ 千米/时，这是对平均速度的概念不太清楚. 我们知道，平均速度 = 总路程 ÷ 总时间，而题设中并未给出这个总路程，因此我们引入了辅助未知数 S，在列出算式后，我们发现 S 并不用求，它在计算过程中自然消去了.

例 3 小明和小亮分别从甲、乙两地同时出发，相向而行，当小明走完全程的一半时，小亮才走了 16 千米；当小亮走完全程的一半时，小明已走了 25 千米，那么，当小明走完全程时，小亮未走完的路程还有多少千米？

解 设全程长为 S 千米，小明的速度为每小时 x 千米，小亮的速度为每小时 y 千米，由题意，我们不难得到

$$\begin{cases}\dfrac{\frac{S}{2}}{x}=\dfrac{16}{y}, & (1)\\[2ex] \dfrac{25}{x}=\dfrac{\frac{S}{2}}{y}. & (2)\end{cases}$$

显然，这又是含三个未知数、两个方程的方程组. 一般地，我们不能把 S，x，y 全求出来. 但根据题意，我们要求的是小明走完全程时，小亮未走完的路程，即 $S-\frac{S}{x}\cdot y$ 的值.

由(1)得 $\frac{S}{x}\cdot y=16\times 2=32$，所以只要再把 S 求出即可.

由(1)得 $\frac{x}{y}=\frac{S}{2\times 16}$. (3)

由(2)得 $\frac{x}{y}=\frac{2\times 25}{S}$. (4)

由(3)，(4)得 $\frac{S}{2\times 16}=\frac{2\times 25}{S}$.

即：$S^2=2^2\times 16\times 25=(2\times 4\times 5)^2=40^2$

由 $S\geqslant 0$ 得 $S=40$.

所以　$S-\frac{S}{x}\cdot y=40-32=8.$

答　小亮未走完的路程还有 8 公里.

说明　本例不仅设了辅助未知数，而且采用设间接未知数法. 在消去辅助未知数的过程中，我们采取了用相比来消元，这种方法在“设而不求”的问题中比较常用. 如下例：

例 4　现有男、女工人共 22 人，其中全体男工和全体女工在相同的时间内可完成同样的工作；若将男工人数和女工人数对调一下，则全体男工 25 天能完成的工作，全体女工需 36 天才能完成，问男、女工人各多少人？

解　设男工为 x 人，则女工有 $(22-x)$ 人，又设这一工作男工一人需做 y 天，女工一人需做 z 天. 即每一个男工一天完成全部工作的 $\frac{1}{y}$，而每个女工一天完成全部工作的 $\frac{1}{z}$. 由题意，得

$$\begin{cases}\frac{1}{y}\cdot x=\frac{1}{z}\cdot(22-x), & (1)\\ \frac{1}{y}\cdot(22-x)\cdot 25=\frac{1}{z}\cdot x\cdot 36. & (2)\end{cases}$$

由(1)得　$\frac{y}{z}=\frac{x}{22-x}$,　(3)

由(2)得　$\frac{y}{z}=\frac{25\cdot(22-x)}{36x}$,　(4)

由(3)，(4)得　$\frac{x}{22-x}=\frac{25\cdot(22-x)}{36x}$,

$$36x^2=25(22-x)^2,$$

$$(6x)^2=[5(22-x)]^2,$$

由 $6x\geqslant 0$，$22-x\geqslant 0$. 得　$6x=5(22-x)$.

所以　$x=10$，$22-x=12$.

答　男工有 10 人，女工有 12 人.

例 5　A、B、C、D、E 五个人干一项工作，若 A、B、C、D 四人一起干，8 天可完工；若 B、C、D、E 四人一起干，6 天可完工；若 A、E

两人一起干，12 天可完工，问若 A 一个人单独干，要多少天才能完工？

解 设这项工程为 1，并设 A、B、C、D、E 每人每天完成的工作量分别为 a、b、c、d、e，根据题意得

$$\begin{cases} a+b+c+d=\dfrac{1}{8}, & (1) \\ b+c+d+e=\dfrac{1}{6}, & (2) \\ a+e=\dfrac{1}{12}. & (3) \end{cases}$$

(1)－(2)得 $\quad a-e=-\dfrac{1}{24}, \qquad (4)$

(3)＋(4)得 $\quad 2a=\dfrac{1}{24},$

$$a=\frac{1}{48}.$$

所以，若 A 一人单独干，需 $\dfrac{1}{a}=48$ 天才能完工.

答 A 一人单独干，需 48 天才能完工.

例 6 有一片牧场，草每天都匀速地生长(草每天增长的量相等). 如果其上放牧 24 头牛，则 6 天吃完牧草；如果放牧 21 头牛，则 8 天吃完牧草，设每头牛每天吃草的量都是相等的. 问：(1)如果放牧 16 头牛，几天可以吃完牧草？(2)要使牧草永远吃不完，至多放牧几头牛？

解 (1) 设每头牛每天吃草量为 x，草每天增长量为 y，牧场原有的草量为 a，16 头牛 z 天可以吃完牧草，根据题意得

$$\begin{cases} a+6y=24\times 6x, & (1) \\ a+8y=21\times 8x, & (2) \\ a+yz=16xz. & (3) \end{cases}$$

(2)－(1)得 $\quad y=12x, \qquad (4)$

(3)－(2)得 $\quad (z-8)y=8x(2z-21), \qquad (5)$

将(4)代入(5)得　$(z-8)\times 12x = 8x(2z-21)$,

即　$3(z-8) = 2(2z-21)$,

$$z = 18.$$

(2) 设放牧 w 头牛,牧草永远吃不完,则必须使 w 头牛每天吃的草量不大于草每天的增长量,即

$$x \cdot w \leqslant y. \tag{6}$$

(4) 代入(6)得　$xw \leqslant 12x$,

由 $x > 0$ 知　$w \leqslant 12$.

所以至多只能放牧 12 头牛.

答　如果放牧 16 头牛,18 天可以吃完;要使牧草永远吃不完,至多放牧 12 头牛.

说明　本题是"牛吃草"问题,它需考虑草每天的增长量,每头牛每天的吃草量及牧场原有的草量之间的关系,所以本题设了一些辅助未知数,把这些关系都表示出来.

例 7　一个十位数字为 0 的三位数,它恰好等于它的数字和的 67 倍;交换它的个位与百位数字后得到一个新的三位数,它恰好又是数字和的 m 倍,求 m 的值.

解　设原三位数的百位数字为 x,个位数字为 y,由题意,得

$$\begin{cases} 100x + y = 67(x+y), & (1) \\ 100y + x = m(x+y). & (2) \end{cases}$$

(1)+(2)得　$101\cdot(x+y) = (67+m)(x+y)$,

由 $x+y>0$ 得　$67+m = 101$,

$$m = 34.$$

答　m 的值为 34.

例 8　设 $a_1, a_2, \cdots, a_{1999}, a_{2000}$都是正数,

$$M = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{1999})\cdot(a_2 + a_3 + \cdots + a_{2000}),$$

$$N = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{2000})\cdot(a_2 + a_3 + \cdots + a_{1999}).$$

试比较 M 与 N 的大小.

分析 本题粗看之下,与"设而不求"好像没有什么关系,但仔细观察本题的特点,发现不管 M 和 N 的哪一个因式,都有 $a_2+a_3+\cdots+a_{1\,999}$ 这一项,若我们死用乘法公式,则非常复杂,甚至无法计算,但若我们令 $a_2+a_3+\cdots+a_{1\,999}=x$,则问题迎刃而解.

解 设 $x=a_2+a_3+\cdots+a_{1\,999}$,则

$$M=(a_1+x)(x+a_{2\,000})=x^2+(a_1+a_{2\,000})x+a_1\cdot a_{2\,000},$$

$$N=(a_1+x+a_{2\,000})\cdot x=x^2+(a_1+a_{2\,000})x.$$

所以,$M-N=a_1\cdot a_{2\,000}$.

由于 $a_1>0$,$a_{2\,000}>0$,故 $a_1\cdot a_{2\,000}>0$,

即 $M-N>0$,亦即 $M>N$.

答 $M>N$.

总之,通过设一些辅助未知数,有时可以把一些不太明显的关系表示出来,并不一定非求出这些未知数而得到我们想要的结果,这是我们用"设而不求"方法解决问题的一般想法.

"设而不求",妙在其中!

练　习　题

A　组

1. 小江上山时每小时走 4 千米，到达山顶后立即沿原路下山，每小时走 6 千米，求小江在整个过程中的平均速度.

2. 某船顺水航行每小时行 10 千米，逆水航行每小时行 6 千米，则该船往返过程中的平均速度是多少？

3. 某船逆水航行，船员不小心将一木桶掉入水中，当发现时时间已过 5 分钟，现掉转船头去追木桶. 问过了多久，才能追上？

4. 甲杯中装水，乙杯中装酒精，水和酒精一样多. 先从甲杯中倒一些水到乙杯中；然后再从乙杯中倒同样多混合液到甲杯；再从甲杯中倒一些混合液到乙杯；…；如此进行下去，一直进行了 100 次. 问最后甲杯中的酒精多还是乙杯中的水多？

5. 有一片牧场，草每天都匀速地生长，15 头牛 8 天可以将草吃完；12 头牛 12 天可以将草吃完，设每头牛每天吃草的量都是相等的. 问：

(1) 若有 8 头牛，几天可以将草吃完？

(2) 要使牧草永远也吃不完，至多可以放牧几天牛？

6. 已知多项式 ax^5+bx^3+cx+3，当 $x=3$ 时，值为 48，求当 $x=-3$ 时，这个多项式的值.

7. A、B、C、D 四人干一项工作，若 A、B、C 三人合干，10 天可完工；若 A，C，D 三人合干，8 天可完工，若 B 与 D 合干，20 天可完工，问若 D 一人独干，需多少天完工？

B　组

8. 有甲、乙、丙三种货物，若购甲 3 件、乙 7 件、丙 1 件，共需 300 元；若购甲 4 件、乙 10 件、丙 1 件，共需 400 元，现需购甲、乙、丙各一件，共需多少元？

9. 甲、乙两个杯子，分别装两种浓度不同的酒精与水的混合物

16 克和 24 克，现分别从甲、乙两杯中倒出重量相等的部分混合液，并将甲杯中倒出的那部分混合液倒入乙杯，将乙杯中倒出的那部分混合物倒入甲杯，此时，甲、乙两杯中所含酒精的浓度恰好相等．问从甲杯中倒出的那部分混合液重多少克？

10. 某人八点多吃早饭，他发现钟上的分针与时针的夹角成 25° 角，等他吃完早饭，发现钟上的时间还是八点多，两针之间的夹角还是 25°角．问他吃早饭用了多少时间？

11. 有一水库，在单位时间内有一定量的水流进，同时也向外放水．按现在的放水量，水库中的水可使用 40 天．因最近库区降雨，使流入水库的水量增加 20%，如果放水量也增加 10%，则仍可使用 40 天．问如果按原来的放水量放水，可使用多少天？

12. 已知三种混合物由三种成分 A，B 和 C 组成，第一种仅含成分 A 和 B，重量比为 3∶5；第二种仅含成分 B 和 C，重量比为 1∶2；第三种仅含成分 A 与 C，重量比为 2∶3．问以什么比例取这些混合物，才能使所得的混合物中 A、B 和 C 这三种成分的重量比为 3∶5∶2？

测　试　题

1. 小明从家走到学校，每小时走 3 千米，到校后，发现忘了带书包，立即掉头沿原路返回，每小时跑了 6 千米，到家后毫不耽搁，取了书包立即赶往学校，每小时跑 5 千米．问整个过程中小明的平均速度？

2. 哥哥与弟弟同时从甲地前往乙地，当哥哥走了三分之一路程时，弟弟才走 9 千米，当弟弟走了三分之一路程时，哥哥已经走 16 千米．问哥哥走完全程时，弟弟还有多少路程要走？

3. 有 A、B、C 三种货物，若购买 A 2 件，B 1 件，C 1 件，花费 5 元钱，若购买 A 1 件，B 2 件，C 1 件，花费 6 元．问只购买 B 3 件，C 1 件，应花多少钱？

4. 一个十位数字与百位数字都是 0 的四位数，它正好等于数字和的 778 倍；若交换它的千位数字与个位数字，得到一个新的四位

数，它正好等于数字和的 m 倍. 求 m 的值.

5. A、B、C、D 四人干一项工作，若 A、B 两人合干，需 8 天完成；若 C、D 两人合干，需 12 天完成；若 A、B、D 三人合干，需 5 天完成，问若 C 一人独干，需多少天完成？

6. 有一片牧场，草每天匀速生长，若其上放牧 36 头牛，8 天吃完牧草；若放牧 30 头牛，10 天吃完牧草；若其上放牧 18 头牛，多少天可吃完牧草？

第九讲　一次不等式(组)

一、知识要点和基本方法

用不等号连结两个代数式，就成为不等式. 在日常生活、生产和科研中，我们常常需要比较一些量的大小或者对某个量进行估计，在数学上，就成为形形色色的不等式.

如果不等式中只含一个未知数，而且未知数的最高次数是 1，这样的不等式就称为一元一次不等式. 它的一般形式是 $ax > b$（或 $ax < b$；$ax \geqslant b$；$ax \leqslant b$）. 其中 $a \neq 0$. 任一个一元一次不等式都可以运用不等式的基本性质，化为一般形式.

能够使不等式成立的 x 的值，称为不等式的解. 全部解组成的集合称为不等式的解集. 本讲主要讨论如何求解一次不等式(组).

二、例 题 精 讲

例 1　解不等式

$$x + 1 - \frac{x-1}{2} > \frac{4x}{3} - 1.$$

解　不等式两边同乘以 6，得

$$6x + 6 - 3x + 3 > 8x - 6,$$

$$3x + 9 > 8x - 6,$$

$$-5x > -15,$$

两边同除以 -5 得　$x < 3$.

所以，原不等式的解集为 $x < 3$.

说明 一般地，一个一元一次不等式，总可以利用不等式的基本性质，把它化为一般形式 $ax < b$（或 $ax \leqslant b$；$ax > b$；$ax \geqslant b$）.

不等式的基本性质主要有

(1) $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$；$a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$.

(2) $a > b \Leftrightarrow b < a$；$a < b \Leftrightarrow b > a$.

(3) $a > b$，$b > c \Rightarrow a > c$.

(4) $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$.

(5) $a > b$，$c > 0 \Rightarrow ac > bc$；

$a > b$，$c < 0 \Rightarrow ac < bc$.

(6) $a > b > 0$，$c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$.

这些性质虽然简单，有些甚至是显然的，但它们是解决不等式问题的基础，因此，要好好掌握. 其中性质 5 更要特别注意.

当一元一次不等式化为一般形式 $ax < b$ 后，利用不等式性质，有

(1) 当 $a > 0$ 时，解集为 $x < \frac{b}{a}$.

(2) 当 $a < 0$ 时，解集为 $x > \frac{b}{a}$.

(3) 当 $a = 0$ 时，若 $b > 0$，则解集包括所有数；若 $b \leqslant 0$，则这个不等式无解.

对不等式 $ax \leqslant b$，$ax > b$，$ax \geqslant b$ 有类似的解法，同学们可以自己加以总结.

例 2 解关于 x 的不等式

$$2mx + 3 < 3x + n.$$

解 由原不等式，得

$$(2m - 3)x < n - 3.$$

(1) 当 $2m - 3 > 0$，即 $m > \frac{3}{2}$ 时，其解集为 $x < \frac{n-3}{2m-3}$.

(2) 当 $2m - 3 < 0$，即 $m < \frac{3}{2}$ 时，其解集为 $x > \frac{n-3}{2m-3}$.

(3) 当 $2m-3=0$，即 $m=\frac{3}{2}$ 时，

若 $n-3>0$，即 $n>3$，解集含所有数；

若 $n-3\leqslant 0$，即 $n\leqslant 3$，原不等式无解.

说明 和方程一样，在不等式中不是未知数的字母我们称为参数，解含参数的不等式时也应该对参数进行讨论.

例 3 当 k 为何值时，关于 x 的方程

$$5(x-k)=3x-k+2$$

分别有(1) 正数解. (2) 负数解. (3) 不大于 1 的解.

解 由原方程得 $2x=4k+2$，

$$x=2k+1.$$

(1) 要使方程有正数解，则必须 $2k+1>0$，即 $k>-\frac{1}{2}$ 时，方程有正数解.

(2) 要使方程有负数解，则必须 $2k+1<0$，即 $k<-\frac{1}{2}$ 时，方程有负数解.

(3) 要使方程的解不大于 1，则必须 $2k+1\leqslant 1$，即 $k\leqslant 0$ 时，方程有不大于 1 的解.

例 4 解不等式组

$$\begin{cases}3x+2>2x-5, & (1)\\ x+4>\frac{x}{2}+9. & (2)\end{cases}$$

解 由原不等式组，得

$$\begin{cases}x>-7,\\ x>10.\end{cases}$$

要使上式两式同时成立，必须 $x>10$.

所以，原不等式组的解集为 $x>10$.

说明 一个一元一次不等式组是由若干个一元一次不等式组成的，它的解集是各个一元一次不等式解集的公共部分. 若不等式组由

两个不等式组成，先分别解出这两个不等式，不等式组的解可归纳为以下四种情况(设 $a<b$).

(1) $\begin{cases}x>a\\x>b\end{cases}$ 的解集为 $x>b$. (图 9-1)

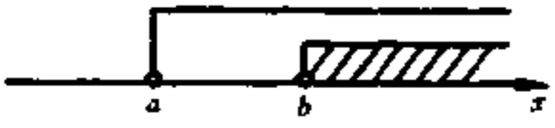


图 9-1

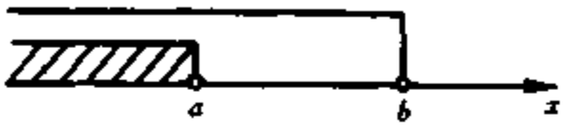


图 9-2

(2) $\begin{cases}x<a\\x<b\end{cases}$ 的解集为 $x<a$. (图 9-2)

(3) $\begin{cases}x>a\\x<b\end{cases}$ 的解集为 $a<x<b$. (图 9-3)

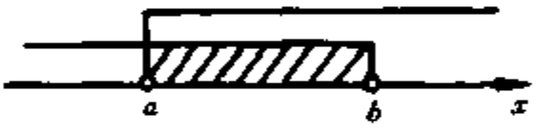


图 9-3

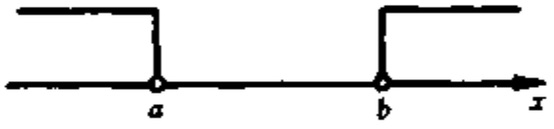


图 9-4

(4) $\begin{cases}x<a\\x>b\end{cases}$ 无解. (图 9-4)

对于由两个以上不等式构成的不等式组，它的解集可以用同样方法求出，更实用的做法是分别定出 x 的上、下界，举一例说明. 如

$$\begin{cases}x>2,\\-3<x<1,\\0<x<4,\\x<5.\end{cases}$$

可先确定上界：由 $x<1$，$x<4$，$x<5$，得 $x<1$. (通俗地说，“小于最小的”)

再确定下界：由 $x>-3$，$x>0$，$x>2$，得 $x>2$. (通俗地说，“大于最大的”)

此时，原不等式组相当于化为

$$\begin{cases}x<1,\\x>2.\end{cases}$$

再由上面所说由两个不等式构成的不等式组的四种情况，知原不等式组无解.

例5 解不等式组

$$\begin{cases} 9x-3>x+8, \\ -3x+40>x+12, \\ \dfrac{x}{2}-1<\dfrac{x}{3}, \\ \dfrac{2x-3}{3}>1. \end{cases}$$

解 由原不等式组，得 $\begin{cases} x>\dfrac{11}{8}, \\ x<7, \\ x<6, \\ x>3. \end{cases}$

确定上界：由 $x<7$，$x<6$ 得 $x<6$.

确定下界：由 $x>\dfrac{11}{8}$，$x>3$ 得 $x>3$.

所以，原不等式组的解集为 $3<x<6$.

例6 解下列不等式

(1) $4x-2+\dfrac{1}{x-5}>\dfrac{1}{x-5}+3x+2$.

(2) $\dfrac{7x-6}{2x+3}>2$.

解 (1) 两边同时消去 $\dfrac{1}{x-5}$，得

$$4x-2>3x+2,$$

$$x>4.$$

但是应注意到原不等式中 $x-5\neq 0$ 即 $x\neq 5$，所以，在解 $x>4$ 中应去掉 $x=5$. 因此，原不等式的解集为 $x>4$ 且 $x\neq 5$.

(2) 由原不等式得

$$\frac{7x-6}{2x+3}-2>0,$$

通分得 $\dfrac{3x-12}{2x+3}>0$,

它可以转化为

$$\begin{cases}3x-12>0\\2x+3>0\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}3x-12<0,\\2x+3<0.\end{cases}$$

解之得 $\begin{cases}x>4\\x>-\dfrac{3}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<4,\\x<-\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

所以 $x>4$ 或 $x<-\dfrac{3}{2}$.

即原不等式的解集为 $x>4$ 或 $x<-\dfrac{3}{2}$.

说明 上述两个不等式,都不是一元一次不等式,但它们都可化为一元一次不等式(组)来解决. 第一个不等式虽然两边可同时消去 $\dfrac{1}{x-5}$,但必须有 $x-5\neq 0$;第二个不等式,千万要注意,不可把它化为: $7x-6>2(2x+3)$ 请大家想想,为什么?

例7 k 为什么数时,方程组

$$\begin{cases}kx+4y=8\\3x+2y=6\end{cases}$$

的解为正数?

解 (1) 当 $k\neq 6$ 时,容易解得方程组有唯一解

$$\begin{cases}x=\dfrac{-4}{k-6},\\y=\dfrac{3(k-4)}{k-6}.\end{cases}$$

要使此方程组有正数解,即 $x>0$, $y>0$. 要使 $x>0$,即 $\dfrac{-4}{k-6}>0$,必须 $k-6<0$,即 $k<6$. 要使 $y>0$,即 $\dfrac{3(k-4)}{k-6}>0$,注意到 $k-6<0$,所以必须 $k-4<0$,即 $k<4$,所以,得

$$\begin{cases} k < 6, \\ k < 4, \end{cases}$$

因此　$k < 4$.

(2) 当 $k = 6$ 时，原方程组为 $\begin{cases} 6x + 4y = 8, \\ 3x + 2y = 6. \end{cases}$

显然这两个方程互相矛盾. 这时原方程组无解.

因此，只有当 $k < 4$ 时，原方程组的解为正数.

例 8　解关于 x 的不等式组

$$\begin{cases} ax - 4 < 8 - 3ax, \\ (a + 2)x - 2 > 2(1 - a)x + 4. \end{cases}$$

解　原不等式组可化为

$$\begin{cases} 4ax < 12, & (1) \\ 3ax > 6. & (2) \end{cases}$$

(1) 当 $a > 0$ 时，由(1)，(2)得

$$\begin{cases} x < \dfrac{3}{a}, \\ x > \dfrac{2}{a}, \end{cases}$$

为得到不等式组的解，我们需比较 $\frac{3}{a}$ 与 $\frac{2}{a}$ 的大小. 因为 $\frac{3}{a} - \frac{2}{a} = \frac{1}{a}$，而当 $a > 0$ 时，$\frac{1}{a} > 0$，所以 $\frac{3}{a} - \frac{2}{a} = \frac{1}{a} > 0$，即 $\frac{3}{a} > \frac{2}{a}$. 因此上述不等式组的解集为 $\frac{2}{a} < x < \frac{3}{a}$.

(2) 当 $a < 0$ 时，由(1)，(2)得

$$\begin{cases} x > \dfrac{3}{a}, \\ x < \dfrac{2}{a}, \end{cases}$$

此时，$\frac{3}{a}-\frac{2}{a}=\frac{1}{a}<0$，即 $\frac{3}{a}<\frac{2}{a}$，

所以上述不等式组的解集为：$\frac{3}{a}<x<\frac{2}{a}$

(3) 当 $a=0$ 时，由(1)、(2)得

$$\begin{cases}0\cdot x<12,\\0\cdot x>6,\end{cases}$$

显然上述不等式组无解.

综上所述，当 $a>0$ 时，原不等式组的解集为 $\frac{2}{a}<x<\frac{3}{a}$；当 $a<0$ 时，原不等式组的解集为 $\frac{3}{a}<x<\frac{2}{a}$；当 $a=0$ 时，原不等式组无解.

练　习　题

A　组

1. 解下列不等式

(1) $2(x-1)-3x>4(x+1)+5$.

(2) $\frac{x+1}{3}-\frac{x-3}{2}>5$.

(3) $\frac{1}{3}x-3+\frac{2x-6}{4}<-3x$.

(4) $3x+\frac{1}{x-2}+2>x+4+\frac{1}{x-2}$.

2. 解下列不等式组

(1) $\begin{cases}2x-2>\frac{1}{2}(x-7)+1,\\ \frac{2x-5}{3}+3<\frac{x}{5}+2.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}4x+\frac{2}{3}<\frac{x-8}{5}+2,\\ 2-\frac{x}{3}>3-\frac{x}{2}.\end{cases}$

(3) $\begin{cases}1<\frac{2x-5}{3}<3,\\ (x-\frac{2}{3})+5\geqslant 2x-\frac{3}{2}.\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x-1>-3,\\ \frac{x}{2}-1<\frac{x}{3},\\ 3<2(x-1)<10.\end{cases}$

3. k 为何值时，关于 x 的方程

$$5(x+3k)-2=3x-4k$$

有(1)正数解.　(2)负数解.

B 组

4. 解关于 x 的不等式 $1-\frac{2x}{a^2}>\frac{x}{a}+\frac{4}{a^2}$

5. 解关于 x 的不等式组

$$\begin{cases}a(x-2)>x-3,\\9(a+1)x>9ax+8.\end{cases}$$

6. 问 k 为何值时，关于 x 的方程

$$3k(x+2)+2=5x+8$$

的解不大于 3.

测 试 题

1. 解下列不等式

(1) $3x-5\leqslant 7x+3$.

(2) $\frac{5x-6}{3}+\frac{6-3x}{2}>8$.

(3) $2x-\frac{1}{x-1}+1<x+3-\frac{1}{x-1}$.

(4) $\frac{5x+8}{3x-4}\geqslant 1$.

2. 解下列不等式组

(1) $\begin{cases}4x+5<6x-3,\\\frac{x}{2}-\frac{x}{3}-1<0.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}3x+5>4x-3,\\\frac{2x-4}{3}<1,\\\frac{1-x}{2}<4(2x-3)<\frac{11x}{2},\\2x-3>\frac{1}{2}(x-7).\end{cases}$

3. 当 k 为何值时，关于 x 的方程

$$3(x+2)=kx+9$$

分别有(1)正数解.(2)负数解.(3)不小于 1 的解.

4. 解关于 x 的不等式组

$$\begin{cases}3mx-6<5-mx,\\ mx+x>(1-2m)x+8.\end{cases}$$

第十讲　含绝对值的方程和不等式

一、知识要点和基本方法

解含绝对值的方程和不等式的关键，就是根据绝对值的定义或性质，去掉绝对值符号，化它为一般的方程和不等式，从而解决问题．在解题过程中，有时会根据需要，分段进行讨论．

本讲只讨论含绝对值的一次方程和一次不等式．

二、例题精讲

例1　解方程　$|2x+3|=5$.

解　由绝对值的定义，$|2x+3|=5$ 即

$$2x+3=\pm 5.$$

由 $2x+3=5$，解得 $x=1$，

由 $2x+3=-5$，解得 $x=-4$.

所以，原方程的根为　$x=1$ 或 $x=-4$.

说明　对形如 $|ax+b|=c$ 的方程，可分三种情况讨论．

(1) $c<0$，方程无解．

(2) $c=0$，根据绝对值的定义，$ax+b=0$.

(3) $c>0$，根据绝对值的定义，$ax+b=\pm c$.

例2　解方程　$|||x|-2|-1|=3$.

解　根据绝对值的定义，由 $|||x|-2|-1|=3$ 得

$$||x|-2|-1=\pm 3,$$

即　$||x|-2|=4$ 或 $||x|-2|=-2$（无解）．

根据绝对值定义，由 $||x|-2|=4$，得

$$|x|-2=\pm 4,$$

即　$|x|=6$ 或 $|x|=-2$　（无解）.

根据绝对值定义，由 $|x|=6$ 得

$$x=\pm 6.$$

所以，原方程的解为 $x=6$ 或 $x=-6$.

说明　形如：$|||ax-b|-c|-d|=e$ 的方程，含有多层的绝对值，求解时可以不断地利用例 1 的方法，从最外层开始，逐层去掉绝对值符号，最后化为一般的一次方程求解.

例 3　解方程 $|4x+3|=2x+9$.

解　由原方程，得

$$4x+3=\pm(2x+9)\quad 且\quad 2x+9\geqslant 0,$$

解 $4x+3=2x+9$ 得　$x=3$.

解 $4x+3=-(2x+9)$ 得　$x=-2$.

由于 $x=3$ 时，$2x+9=15>0$；$x=-2$ 时，$2x+9=5>0$，所以原方程的解为

$$x=3\quad 或\quad x=-2.$$

说明　对一次方程 $|ax+b|=cx+d$，我们可将它变为：$ax+b=\pm(cx+d)$ 且 $cx+d\geqslant 0$. $ax+b=\pm(cx+d)$ 的根，只有同时满足 $cx+d\geqslant 0$，才是原方程的根，否则，就是增根，应当舍去.

例 4　解方程 $|x-|3x+2||=4$.

解　由原方程及绝对值的定义，得

$$x-|3x+2|=\pm 4,$$

即　$|3x+2|=x-4$　或　$|3x+2|=x+4$.

(1) $|3x+2|=x-4$.

由上式得 $3x+2=\pm(x-4)$，且 $x-4\geqslant 0$，

解 $3x+2=x-4$　得 $x=-3$.

解 $3x+2=-(x-4)$　得 $x=\frac{1}{2}$.

由于 $x=-3$ 时，$x-4=-7<0$；$x=\frac{1}{2}$ 时，$x-4=-\frac{7}{2}<0$，因此，$x=-3$ 与 $x=\frac{1}{2}$ 都是原方程的增根，舍去.

(2) $|3x+2|=x+4$.

由上式得 $3x+2=\pm(x+4)$，且 $x+4\geqslant 0$，

解 $3x+2=x+4$　得 $x=1$.

解 $3x+2=-(x+4)$　得 $x=-\frac{3}{2}$.

由于 $x=1$ 时，$x+4=5>0$；$x=-\frac{3}{2}$ 时，$x+4=\frac{5}{2}>0$，所以它们都是原方程的根. 因此，原方程的根为 $x=1$ 和 $x=-\frac{3}{2}$.

说明　解含绝对值的一次方程的最常用也是最一般的方法是将数轴分段进行讨论. 我们仍采用前面介绍的“零点分段”法分类讨论，以去掉绝对值符号.

例5　解方程 $|2x+3|-|x-1|=4x-3$.

解　易知，$|2x+3|$ 与 $|x-1|$ 的零点分别为 $x=-\frac{3}{2}$ 和 $x=1$. 由“零点分段法”，可把 x 的取值范围分为：$x\leqslant-\frac{3}{2}$，$-\frac{3}{2}<x\leqslant 1$ 和 $x>1$ 三段.

(1) 当 $x\leqslant-\frac{3}{2}$ 时，原方程化为

$$-(2x+3)-[-(x-1)]=4x-3,$$

$$x=-\frac{1}{5}.$$

由于 $-\frac{1}{5}>-\frac{3}{2}$，它不在 $x\leqslant-\frac{3}{2}$ 的范围内，所以它不是原方程的根.

(2) 当 $-\frac{3}{2}<x\leqslant 1$ 时，原方程可化为

$$(2x+3)-[-(x-1)]=4x-3,$$

$$x=5.$$

由于 $5>1$，它不在 $-\frac{3}{2}<x\leqslant 1$ 的范围内，所以它也不是原方程的根.

(3) 当 $x>1$ 时，原方程可化为

$$(2x+3)-(x-1)=4x-3,$$

$$x=\frac{7}{3}.$$

由于 $\frac{7}{3}>1$，它恰好在 $x>1$ 的范围内，所以 $x=\frac{7}{3}$ 是原方程的根.

所以，原方程的根为 $x=\frac{7}{3}$.

说明 利用“零点分段法”将数轴分段，去掉绝对值符号，然后逐段讨论在每一段内方程的解. 这种方法在解有关绝对值的问题时最为常见，也最为有效. 它不仅适用于含绝对值符号的方程，也适用于含绝对值符号的不等式.

例 6 解不等式 $|x-4|-|2x-3|\leqslant 1$.

解 $|x-4|$ 与 $|2x-3|$ 的零点分别为 $x=4$ 和 $x=\frac{3}{2}$，由零点分段法，可把 x 的取值范围分为三段：$x\leqslant\frac{3}{2}$；$\frac{3}{2}<x\leqslant 4$；$x>4$.

(1) 当 $x\leqslant\frac{3}{2}$ 时，原不等式可化为

$$-x+4+2x-3\leqslant 1,$$

解之得 $x\leqslant 0$.

所以，此时原不等式的解为 $x\leqslant 0$.

(2) 当 $\frac{3}{2}<x\leqslant 4$ 时，原不等式可化为

$$-x+4-2x+3\leqslant 1,$$

解之得　$x\geqslant 2$.

所以，此时原不等式的解为 $2\leqslant x\leqslant 4$

(3) 当 $x>4$ 时，原不等式可化为

$$x-4-2x+3\leqslant 1,$$

解之得　$x\geqslant -2$.

所以，此时原不等式的解为 $x>4$.

综上所述，原不等式的解集为 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 2$.

例 7　求解不等式 $||x+3|-|x-3||>3$.

解　$|x+3|$ 与 $|x-3|$ 的零点分别为 $x=-3$ 和 $x=3$. 所以可把 x 的取值范围分为三段. $x\leqslant -3$；$-3<x\leqslant 3$；$x>3$.

(1) 当 $x\leqslant -3$ 时，原不等式可化为

$$|-(x+3)+(x-3)|>3.$$

即 $|-6|>3$，其解为一切实数 $(x\leqslant -3)$.

因此，此时原不等式的解为 $x\leqslant -3$.

(2) 当 $-3<x\leqslant 3$ 时，原不等式可化为

$$|(x+3)+(x-3)|>3,$$

即　$|2x|>3$，其解为 $x>\frac{3}{2}$ 或 $x<-\frac{3}{2}$.

因此，此时原不等式的解为 $-3<x<-\frac{3}{2}$ 或 $\frac{3}{2}<x\leqslant 3$.

(3) 当 $x>3$ 时，原不等式可化为

$$|(x+3)-(x-3)|>3,$$

即　$|6|>3$，其解为一切实数 $(x>3)$.

因此，此时原不等式的解为　$x>3$.

综上所述，原不等式的解集为：$x<-\frac{3}{2}$ 或 $x>\frac{3}{2}$.

当然，除了分段讨论这一常用方法外，解含绝对值的一次不等式时，也可根据题目本身一些特性，用非常简便或巧妙的方法来解决.

例 8 解关于 x 的不等式

$$|ax-1|>ax-1.$$

解 因为 $|ax-1|>ax-1$,

故 $ax-1<0$,

即 $ax<1$.

(1) 当 $a>0$ 时,解为 $x<\frac{1}{a}$.

(2) 当 $a<0$ 时,解为 $x>\frac{1}{a}$.

(3) 当 $a=0$ 时,解为一切数.

说明 本题利用了绝对值的一些概念和性质,即我们总有 $|a|\geqslant a$,而且,当 $a\geqslant 0$ 时,$|a|=a$,当 $a<0$ 时,$|a|>a$;反过来也是正确的,即若 $|a|=a$,则 $a\geqslant 0$;若 $|a|>a$,则必须 $a<0$.

总之,解决含绝对值的方程或不等式的关键是根据绝对值的定义和性质,去掉绝对值符号,从而化为一般的方程或不等式来求解.

练　习　题

A　组

1. 解下列含绝对值的方程

(1) $|4x-5|=8$.

(2) $|5x-3|-3x=2$.

(3) $||x|-4|=5$.

(4) $|||x-2|+1|+3|=12$.

(5) $||4x+8|-3x|=5$.

(6) $|x+3|-|3x-2|=5x+8$.

2. 解下列不等式.

(1) $|3x+5|\leqslant 10$.

(2) $|3x+2|>3x+2$.

(3) $|x-4|>5$.

(4) $|x+5|-|3x-2|\leqslant 2$.

B　组

3. 解方程　$|2x-3|+|x+5|=3x+4$.

4. 解方程　$|2x+5|+|4x-3|+|2x-2|=8$.

5. 求不等式　$||2x+5|-|2x-5||\leqslant 4$ 的解.

6. 若 $|a+b|>|a-b|$，则 a、b 应满足什么条件?

测　试　题

1. 解下列方程

(1) $|3x+6|=12$.

(2) $||3x-5|+4|=8$.

(3) $|4x-3|-2=3x+4$.

(4) $|2x-|3x-2||=8$.

(5) $|x+1|+|x|+|x-1|=0$.

(6) $|3x-2|+|2x+3|=4x-5$.

2. 解下列不等式

(1) $|x|<a \quad (a>0)$.

(2) $|x|\geqslant a \quad (a>0)$.

(3) $|2x+4|>2x+4$.

(4) $|3x-6|+|2x-5|<8x-6$.

(5) $|x+1|+|x-1|<|x|+|x+2|$.

(6) $||2x-3|-|2x+3||<9$.

第十一讲　不等式的应用

一、知识要点和基本方法

不等式的应用非常广泛，有许多数学问题，我们可以抓住其中所含的不等关系，通过分析，利用不等式的有关知识加以解决.

当然，不等式的问题往往比等式的问题难度大，等式一经写出，往往就成为显然的，而不等式的问题解决的方法灵活多样，技巧性也非常强，因此，它经常在数学竞赛中出现. 本讲根据初中学生的具体情况，给出一些方法和技巧.

二、例题精讲

例1　已知代数式 $|x-k|+|x-15|+|x-k-15|$，其中 $0<k<15$，x 的取值范围为：$k\leqslant x\leqslant 15$. 求这个代数式的最小值.

解　由题意我们有 $0<k\leqslant x\leqslant 15$，故

$$|x-k|=x-k,\ |x-15|=15-x,$$

$$|x-k-15|=|x-(k+15)|=k+15-x,$$

所以　$|x-k|+|x-15|+|x-k-15|$

$=(x-k)+(15-x)+(k+15-x)$

$=30-x.$

要使原代数式取到最小值，即要使 $30-x$ 的值最小，只要使 x 的值最大即可. 注意到 $k\leqslant x\leqslant 15$，所以，当 $x=15$ 时，原代数式取到最小值，最小值为 $30-15=15$.

说明　一些最大值与最小值问题，往往可以应用不等式加以解

决. 本题中含有绝对值，因此，关键是根据题设去掉绝对值符号.

例 2 已知 $5x-4\leqslant 3-4x$，求 $|x-1|-|x+3|$ 的最大值与最小值.

解 由 $5x-4\leqslant 3-4x$，解得 $x\leqslant \frac{7}{9}$.

所以，由绝对值的概念，有

$$|x-1|-|x+3|$$

$$=\begin{cases}(1-x)+(x+3)=4, & (\text{当 } x<-3)\\ (1-x)-(x+3)=-2x-2. & \left(\text{当 } -3\leqslant x\leqslant \frac{7}{9}\right)\end{cases}$$

因为当 $-3\leqslant x\leqslant \frac{7}{9}$ 时，x 越大，$(-2x-2)$ 的值反而越小；x 越小，$(-2x-2)$ 的值反而越大，所以，当 $x=\frac{7}{9}$ 时，$(-2x-2)$ 有最小值，最小值为 $-\frac{32}{9}$；当 $x=-3$ 时，$(-2x-2)$ 有最大值，最大值为 4.

当 $x<-3$ 时，$|x-1|-|x+3|$ 为一定值 4，因此，在已知条件下，$|x-1|-|x+3|$ 的最大值为 4，(当 $x\leqslant -3$ 时取得)，最小值为 $-\frac{32}{9}$(在 $x=\frac{7}{9}$ 时取得).

例 3 已知 m、n 为实数，若不等式 $(2m-n)x+3m-4n<0$ 的解集为 $x>\frac{4}{9}$，求不等式 $(m-4n)x+2m-3n>0$ 的解.

解 由 $(2m-n)x+3m-4n<0$ 得

$$(2m-n)x<4n-3m,$$

因为它的解集为 $x>\frac{4}{9}$，所以有

$$\begin{cases}2m-n<0, & (1)\\ \dfrac{4n-3m}{2m-n}=\dfrac{4}{9}. & (2)\end{cases}$$

由(2)得　$n=\frac{7}{8}m$.

把 $n=\frac{7}{8}m$ 代入(1)得　$m<0$.

把 $n=\frac{7}{8}m$ 代入 $(m-4n)x+2m-3n>0$ 得

$$-\frac{5m}{2}x>\frac{5m}{8}, \tag{3}$$

由 $m<0$，得(3)的解为　$x>-\frac{1}{4}$.

所以，不等式 $(m-4n)x+2m-3n>0$ 的解集为 $x>-\frac{1}{4}$.

例 4　试证明：当 a，b 为任意有理数时，多项式 $a^2+b^2-2a+4b+6$ 的值总是正数.

证明　因为

$$\begin{aligned}&a^2+b^2-2a+4b+6\\&=(a^2-2a+1)+(b^2+4b+4)+1\\&=(a-1)^2+(b+2)^2+1,\end{aligned}$$

又因为 $(a-1)^2\geqslant 0$，$(b+2)^2\geqslant 0$，

所以不论 a、b 取什么有理数，总有

$$a^2+b^2-2a+4b+6>0.$$

说明　任意有理数的完全平方是一个非负数，这是我们经常用到的一个知识，由它，我们还可得到一些常用的不等式. 如：

(1) 因为 $(a-b)^2\geqslant 0$，

即 $a^2+b^2-2ab\geqslant 0$，

从而得到一个重要的不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$　(当且仅当 $a=b$ 时取等号).

(2) 若 a、b 为正数，则有 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$ (当且仅当 $a=b$ 时取等号).

例 5　从 1 开始，写出一组连续的正整数，然后擦去一个数，其

余数的平均值为 $35\frac{7}{17}$. 问擦去的数是多少?

解 设共写了 n 个连续的正整数 1, 2, …, n, 从中擦去 k. 由题意得

$$35\frac{7}{17}=\frac{(1+2+\cdots+n)-k}{n-1}. \tag{1}$$

而
$$\begin{aligned}\frac{(1+2+\cdots+n)-k}{n-1}&\geqslant\frac{(1+2+\cdots+n)-n}{n-1}\\&=\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n-1}\\&=\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n-1}=\frac{n}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{(1+2+\cdots+n)-k}{n-1}&\leqslant\frac{(1+2+\cdots+n)-1}{n-1}\\&=\frac{2+3+\cdots+n}{n-1}\\&=\frac{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}{n-1}\\&=\frac{n+2}{2},\end{aligned}$$

从而得

$$\frac{n}{2}\leqslant 35\frac{7}{17}\leqslant\frac{n+2}{2},$$

解之得

$$68\frac{14}{17}\leqslant n\leqslant 70\frac{14}{17}.$$

由于 n 是正整数, 故 $n=69$ 或 $n=70$.

又由(1)知, $(n-1)$ 必是 17 的倍数, 所以 $n=69$, 代入(1)式, 得

$$35\frac{7}{17}=\frac{(1+2+\cdots+69)-k}{68},$$

解得　$k=7$.

所以，擦去的数是 7.

说明　不等式在与整数有关的问题中的应用是非常多的. 根据问题的特点，利用不等式的知识，进行合理的分析，有时可以得到所求的整数的取值范围，在此范围内的整数个数是有限个，有时甚至只有少数几个，把这几个值逐一验证，就可得到我们所要求的解.

例 6　已知 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{36}\right)+\frac{1}{45}=1$，且 a、b、c、d 正好是四个连续的自然数，则 a、b、c、d 的值各为多少？

解　由题意，得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1-\frac{1}{45}-\frac{1}{36}=\frac{171}{180},$$

由于 a、b、c、d 是四个连续的自然数，

故　$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}<\frac{4}{a}$.

即　$\frac{171}{180}<\frac{4}{a}$.

解得　$a<\frac{720}{171}$.

注意到 a 是正整数，故 $a=1$ 或 $a=2$ 或 $a=3$ 或 $a=4$.

而　$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1>\frac{171}{180}$,

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}>1>\frac{171}{180}$,

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{171}{180}$,

故　$a=3, b=4, c=5, d=6$.

例 7　如果一个正整数正好等于它的数字和的 13 倍，试求出所有这样的正整数.

解　(1) 显然，这个数不是一位数.

(2) 若这个数是两位数，可设为$\overline{ab}$（$1\leqslant a\leqslant 9, 0\leqslant b\leqslant 9$），则

$$\overline{ab} = 10a + b = 13(a + b).$$

即　$3a + 12b = 0.$

而　$3a + 12b \geqslant 3 > 0,$

所以，这个数也不可能为两位数.

(3) 若这个数是三位数，可设为$\overline{abc}$（$1 \leqslant a \leqslant 9, 0 \leqslant b \leqslant 9, 0 \leqslant c \leqslant 9$），则

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 13(a + b + c)$$

即

$$87a = 3b + 12c,$$

$$29a = b + 4c.$$

由于 $b + 4c \leqslant 9 + 4 \times 9 = 45$，故 $29a \leqslant 45.$

因此，$a = 1$，于是有

$$b + 4c = 29.$$

由 $4c$ 是偶数而 29 是奇数，知 b 只能是奇数，即 b 为 1、3、5、7、9. 经检验，

$b = 1$ 且 $c = 7$ 或 $b = 5$ 且 $c = 6$ 或 $b = 9$ 且 $c = 5$ 是符合条件的解，所以，这个三位数为 117 或 156 或 195.

(4) 若这个数是四位数，可设为$\overline{abcd}$（$1 \leqslant a \leqslant 9, 0 \leqslant b、c、d \leqslant 9$），则

$$\overline{abcd} \geqslant 1\,000.$$

而　$13(a + b + c + d) \leqslant 13 \times (9 + 9 + 9 + 9) = 468.$

所以，这个数不可能为四位数.

(5) 类似于(4)，可以证明，这个数也不可能是四位以上的正整数.

综上所述，满足条件的正整数只有 117 或 156 或 195.

例 8　设 $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = 19 + |x_1 + x_2 + \cdots + x_n|$，且对 $i = 1, 2, \cdots, n$，都有 $|x_i| < 1$，则整数 n 的最小值是多少？

解　因为 $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \geqslant 0,$

所以　$19 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| - |x_1 + x_2 + \cdots + x_n|$

$\leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$.

又由 $|x_i| < 1$，（$i = 1, 2, \cdots, n$），故

$$19 \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| < n,$$

即

$$n > 19,$$

由 n 是整数知，n 至少为 20.

而当 $n = 20$ 时，令

$$x_i = \begin{cases} 0.95 & \text{（当 } i \text{ 为奇数时）} \\ -0.95 & \text{（当 } i \text{ 为偶数时）} \end{cases}$$

满足题意，所以 n 的最小值为 20.

说明　本题根据题意，先确定 n 的取值范围是大于 19 的整数，然后当 $n = 20$ 时，我们构造出一组满足题意的 $x_i (i = 1, 2, \cdots, 20)$，从而即得 n 的最小值为 20.

构造法看上去很简单，但其中却包含了很高的数学技巧.

练　习　题

A　组

1. 一个长方形，它的周长为 16，求它的面积的最大值.

2. 若 a、b、c 都是正数，且 $a>b$，试比较 $\frac{b}{a}$ 与 $\frac{b+c}{a+c}$ 的大小.

3. 若 $a<0$，$|b|<1$，试比较 a 和 ab 的大小.

4. 已知 $x\leqslant 2$，求 $|x-3|-|x+2|$ 的最大值与最小值.

5. 证明：任意的两个两位数 $\overline{ab}$ 与 $\overline{cd}$ 之积，必小于四位数 $\overline{abcd}$，即 $\overline{ab}\cdot\overline{cd}<\overline{abcd}$.

6. 当 k 为何值时，关于 x 的方程 $3(x+1)=5-kx$ 有不大于 2 的解.

7. 若 $a>0$，证明：$a+\frac{1}{a}\geqslant 2$.

8. 证明：不论 a 为任何有理数，多项式 $4a^2+4a+2$ 的值总是正数.

B　组

9. 设 $a<b<c$，求 $|x-a|+|x-b|+|x-c|$ 的最小值.

10. 如果一个正整数，恰好等于它的各位数字和的 12 倍，求这样的正整数.

11. 已知 a、b、c 为非负数，且满足 $a+b+c=30$，$3a+b-c=50$，试求 $N=5a+4b+2c$ 的最大值与最小值.

12. 已知一个四位数，恰好等于它的各位数字和的四次方，求这个数.

13. 自然数 a、b、c 中，$a<b$，且满足 $a+b=1\,999$，$c-a=1\,999$，求 $a+b+c$ 的最大值.

14. 设 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 是正整数，且满足：

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=x_1x_2x_3x_4x_5,$$

求 x_5 的最大值.

15. 不能写成两个奇合数的和的偶整数最大是多少?

测 试 题

1. 若 a、b、c 都是正数,且 $a<b$,试比较 $\frac{b}{a}$ 与 $\frac{b+c}{a+c}$ 的大小.

2. 已知 $x<0$,$-1<y<0$,比较 x,xy,xy^2 之间的大小关系.

3. 一个长方形的周长为 12,求它的面积的最大值.

4. 已知 $x\leqslant 1$,试求 $|x-2|-|x+2|$ 的最大值和最小值.

5. 设 a、b、c 是三个连续的正整数,且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{47}{60}$,求 $a+b+c$ 的值.

6. 试证明:若 $a>0$,$b>0$,则 $1+\frac{1}{ab}\geqslant\frac{4}{a+b}$.

第十二讲　整式的乘法和除法

一、知识要点和基本方法

整式的乘法和除法是整式的两种基本运算，它们与数的乘法和除法类似，如整式的乘法也有交换律、结合律和分配律，整式的除法也可以看作是乘法的逆运算等等. 并且在乘法运算规律的基础上，人们总结出了一些有用的公式——乘法公式.

二、例题精讲

例 1　计算 $(2x^3 - x + 6) \cdot (3x^2 + 5x - 2)$.

解　原式 $= 6x^5 + 10x^4 - 4x^3 - 3x^3 - 5x^2 + 2x$

$$+ 18x^2 + 30x - 12$$

$$= 6x^5 + 10x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 32x - 12.$$

说明　在计算多项式乘以多项式时，先逐项相乘(注意要不重复，不遗漏，先用 $2x^3$ 与 $3x^2$，$5x$，-2 分别相乘，然后用 $-x$ 与 $3x^2$，$5x$，-2分别相乘，最后用 6 与 $3x^2$，$5x$，-2 分别相乘.)，再合并同类项，即可得到所求的结果. 当然，熟练之后可以心算，按 x 的降幂排列，将 x 的各次项逐一写出，不必再分成几步. 另外，我们观察原式和计算的结果，会发现所得结果的最高次项和常数项恰好是原式的两个因式的最高次项的乘积和两个常数项的乘积(即：$6x^5 = 2x^3 \cdot 3x^2$，$-12 = 6 \times (-2)$)，比较两个代数式的同次项的方法，特别是比较其最高次项和常数项的方法，在数学竞赛中经常用到. 如我们将上例稍加变化，可得下例.

例 2　设 $(ax^3 - x + 6) \cdot (3x^2 + 5x + b) = 6x^5 + 10x^4 - 7x^3$

$+13x^2+32x-12$，求 a 与 b 的值.

解 由题意，可得

$$a\cdot 3=6,\ 6\cdot b=-12.$$

所以 $a=2,\ b=-2.$

说明 上例我们只需要比较其最高次项系数和常数项，而不需要将 $(ax^3-x+6)(3x^2+5x+b)$ 计算出来.

例3 计算 $(3x^2+2)(5x^4+2x^2+3)-(5x^4+x^2+3)\cdot(3x^2+3)$

解
$$\begin{aligned}\text{原式}&=(3x^2+2)(5x^4+2x^2+3)-(5x^4+x^2+3)\cdot\\&\quad(3x^2+2+1)\\&=(3x^2+2)(5x^4+2x^2+3)-(3x^2+2)(5x^4+\\&\quad x^2+3)-(5x^4+x^2+3)\\&=(3x^2+2)[(5x^4+2x^2+3)-(5x^4+x^2+3)]\\&\quad-(5x^4+x^2+3)\\&=x^2\cdot(3x^2+2)-(5x^4+x^2+3)\\&=3x^4+2x^2-5x^4-x^2-3\\&=-2x^4+x^2-3.\end{aligned}$$

说明 利用整式乘法的运算规律，可以简化运算.

例4 计算：

(1) $(x^3-1)\div(x-1)$.

(2) $(3x^4-5x^3+x^2+2)\div(x^2+3)$.

解 (1) 用竖式除法

$$\begin{array}{r}x^2+x+1\\ x-1\overline{)\,x^3+0x^2+0x-1}\\ \underline{x^3-x^2}\\ x^2+0x\\ \underline{x^2-x}\\ x-1\\ \underline{x-1}\\ 0\end{array}$$

所以，商式为 x^2+x+1，余式为 0.

(2)

$$
\begin{array}{r}
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 3x^2-5x-8 \\
x^2+3\,\overline{)\,3x^4-5x^3+x^2+0x+2} \\
\underline{3x^4\quad\quad\quad +9x^2\quad\quad\quad} \\
-5x^3-8x^2+0x \\
\underline{-5x^3\quad\quad -15x\quad\quad} \\
-8x^2+15x+2 \\
\underline{-8x^2\quad\quad -24} \\
15x+26
\end{array}
$$

所以，商式为 $3x^2-5x-8$，余式为 $15x+26$.

说明 多项式的除法总可以用竖式除法来计算. 计算时注意降幂排列，缺项补 0(或空位)，同次项对齐等等.

对多项式除法，我们有带余除法，即：被除式 = 除式 × 商式 + 余式，其中余式的最高次数低于除式的最高次数. 当余式为 0 时，我们也称除式整除被除式，用“除式|被除式”表示. 如(1)，我们可记为 $x-1|x^3-1$；当余式不为 0 时，称除式不能整除被除式；当余式为常数时，我们也称余式为余数. 显然，当除式为一次多项式时，余式必为常数.

对于除式是一次多项式的情形，我们还有综合除法，具体见综合除法和余数定理一讲.

例 5 计算 $(2x+1)\div(3x-2)\times(6x-4)\div(4x+2)$.

解 原式 $=[(2x+1)\div(4x+2)]\cdot[(6x-4)\div(3x-2)]$

$$
\begin{aligned}
&=(2x+1)\div[2(2x+1)]\cdot[2(3x-2)] \\
&\quad\div(3x-2) \\
&=\frac{1}{2}\times 2 \\
&=1.
\end{aligned}
$$

说明 在乘除混合运算中，巧用结合律，有时可简化运算.

实际上，我们利用除法是乘法的逆运算，除以一个整式，相当于

乘以该整式的倒数，通过约分，可更容易地解决问题．其解如下：

解 原式$=(2x+1)\times\frac{1}{3x-2}\times(6x-4)\times\frac{1}{4x+2}$

$=\frac{(2x+1)\cdot(6x-4)}{(3x-2)\cdot(4x+2)}$

$=1.$

根据多项式相乘的规律，人们总结出一些乘法公式，利用乘法公式进行运算，更加迅速、简便、准确，常用的乘法公式有

(1) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2.$

(2) $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$

(3) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$

(4) $(a\pm b)\cdot(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3.$

(5) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$

(6) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=a^3+b^3+c^3-3abc.$

(7) $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}\cdot b+a^{n-3}\cdot b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$=a^n-b^n.$

熟悉上述公式，灵活运用(包括正、逆两方面的应用)，可以巧解一些问题．

例6 计算 $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4).$

解 原式$=(a^2-b^2)\cdot(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

$=(a^4-b^4)\cdot(a^4+b^4)$

$=a^8-b^8.$

说明 本例反复使用平方差公式，巧妙地解决问题．本题可以推广为

$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\cdots(a^{2^n}+b^{2^n})$

$=(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\cdots(a^{2^n}+b^{2^n})$

$=\cdots$

$$= (a^{2^n} - b^{2^n}) \cdot (a^{2^n} + b^{2^n})$$

$$= a^{2^{n+1}} - b^{2^{n+1}}.$$

例7 试求 $x^{285} - x^{83} + x^{71} + x^9 - x^3 + x$ 被 $x - 1$ 除所得的余数.

解 $x^{285} - x^{83} + x^{71} + x^9 - x^3 + x$

$$= (x^{285} - 1) - (x^{83} - 1) + (x^{71} - 1) + (x^9 - 1)$$

$$- (x^3 - 1) + (x - 1) + 2.$$

由乘法公式(7)知，$x^{285} - 1$，$x^{83} - 1$，$x^{71} - 1$，$x^9 - 1$，$x^3 - 1$，$x - 1$ 都可被 $x - 1$ 整除，所以，原式被 $x - 1$ 除所得余数为 2.

说明 由于 x^{285} 的次数太高，故采用一般的竖式除法显然是不太容易得到结果. 我们注意到在 x^{285} 后面配上 -1，利用公式(7)，有 $x - 1$ 整除 $x^{285} - 1^{285} = x^{285} - 1$，同样地，在 x^{83} 等的后面全部配上 -1，最后要使两式相等，必须加上 2，这样，各个括号内的二项式都被 $x - 1$ 整除，所以原式除以 $x - 1$ 后的余数即为 2.

本题用了公式(7)(从右到左. 注意每个公式都有两种用法：既可从左到右，也可从右到左)，使问题顺利解决.

整式的乘法和除法是整式的两种基本运算，熟练掌握这两种运算，并灵活运用乘法公式，是解决与代数式有关的问题的基础，也是每个初中学生必须掌握的基本功.

练　习　题

A　组

1. 计算下列各式

(1) $(3x^2+2x-3)(2x-1)$.

(2) $(4x^4-6x^2+2)(5x^3-2x^2+x-1)$.

(3) $(a+b)^2-(a-b)^2$.

(4) $(a+b)^3-3ab(a+b)$.

(5) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

(6) $(3x^3-4x^2+5x-1)\div(x^2+3x-1)$.

(7) $(5x^3-7x+1)\div(2x+1)$.

(8) $(x^3+1)\div(x+1)$.

(9) $(a^2-b^2)\div(a^2+2ab+b^2)\times(a^3+b^3)$.

(10) $(7x^2+3x)\div(2x+1)\times(6x+3)\div(7x+3)$.

B　组

2. 用乘法公式计算下列各式的值

(1) $2\,000^2-1\,999\times2\,001$.

(2) $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{2^n}+1)$.

3. 试求 $x^{128}+x^{110}-x^{32}+x^8+x^2-x$ 被 $x-1$ 除，所得的余数.

4. 试求 $x^{111}-x^{31}+x^{13}+x^9-x^3$ 被 $x+1$ 除，所得的余数.

5. 试证明：

$$(x+y-2z)^3+(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3$$
$$=3(x+y-2z)(y+z-2x)(z+x-2y)$$

测　试　题

1. 计算下列各式

(1) $(3x+2)(x^2-3x-2)$.

(2) $(3x^2+4x-2)(x^3-2x^2+3)$.

(3) $(a+b)^3-(a-b)^3$.

(4) $(a-b)^3+3ab(a-b)$.

(5) $(2x^2+x-3)(2x-3)+(3-2x)(2x^2+2x-3)$.

(6) $(2x^3-4x^2+3x+3)\div(x^2-3x+1)$.

(7) $(4x^3-2x+8)\div(2x-1)$.

(8) $(a^4-b^4)\div(a^2+b^2)\div(a+b)$.

(9) $(3x^2+7x)\div(x-5x^2)\times(5x-1)\div(3x+7)$.

(10) $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)$.

2. 求 $x^{83}+x^{71}-x^{55}+x^{31}+x^3+5$ 被 $x-1$ 除所得的余数.

第十三讲　待定系数法

一、知识要点和基本方法

待定系数法是一种重要的数学方法，它的思想方法是先假设有一个恒等式，其中含有待定的系数，然后根据多项式恒等概念和有关定理列出方程或方程组，解这个方程或方程组，就可以求出待定的系数，从而解决问题.

二、例题精讲

例 1　m、n 分别是什么数时，多项式 x^2+mx+n 和 $(x-2)(x+3)$ 恒等？

要解决这个问题，首先必须清楚多项式恒等的概念. 所谓恒等式，就是指不论用任何数值来代替式中的变量，左右两边的值都相等的等式. 我们用符号“≡”来表示恒等，读作“恒等于”. 于是，例 1 也可表述为

已知 $x^2+mx+n\equiv(x-2)(x+3)$，求待定系数 m、n.

由恒等式的概念，我们每用一个数值来代替例 1 中的 x，即可得到一个关于 m 与 n 的方程. 因此，要求出 m 与 n 的值，只需要用两个不同的数值分别代替式中的 x，就可以得到一个关于 m 与 n 的二元一次方程组，解这个方程组，即可求得 m 与 n.

解　分别用 0，1 代替式中的 x，得

$$\begin{cases} n=-6, \\ 1+m+n=-4, \end{cases}$$

解之得

$$m = 1, n = -6.$$

说明 本题根据多项式恒等的概念，采用数值代入法，解决了问题. 事实上，例 1 也可以用多项式恒等的定理来求解，方法也非常简便.

定理 如果

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

那么 $a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \cdots, a_1 = b_1, a_0 = b_0.$

根据这个定理，例 1 也可以这样解：

解 由题设

$$x^2 + mx + n \equiv (x - 2)(x + 3) \equiv x^2 + x - 6,$$

比较对应项的系数，得

$$m = 1, n = -6.$$

这是根据多项式恒等的定理，直接采用系数比较的方法来解决问题的.

一般地，确定待定系数的方法主要是利用多项式恒等的概念和定理，采用系数比较法和数值代入法.

例 2 已知多项式

$$x^4 + x^3 + x^2 + 2 \equiv (x^2 + mx + 1)(x^2 + nx + 2),$$

求 m 与 n 的值.

解法一 （系数比较法）

因为 $x^4 + x^3 + x^2 + 2$

$$\equiv (x^2 + mx + 1)(x^2 + nx + 2)$$

$$\equiv x^4 + (m + n)x^3 + (mn + 3)x + (2m + n)x + 2.$$

比较对应项的系数，得

$$\begin{cases} m + n = 1, & (1) \\ mn + 3 = 1, & (2) \\ 2m + n = 0. & (3) \end{cases}$$

由(3)－(1)得

$$m = -1,$$

将 $m = -1$ 代入(1),得

$$n = 2.$$

当 $m = -1, n = 2$ 时,(2)显然成立.

所以　$m = -1, n = 2.$

解法二　(数值代入法)

由 $x^4 + x^3 + x^2 + 2 \equiv (x^2 + mx + 1)(x^2 + nx + 2)$. 分别用 1 和 -1 代入上式,可得

$$\begin{cases} 5 = (2 + m)(3 + n), \\ 3 = (2 - m)(3 - n), \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} mn + 3m + 2n + 1 = 0, \\ mn - 3m - 2n + 3 = 0. \end{cases}$$

解之得

$$m = -1, n = 2.$$

说明　比较上述两种方法,在本题中,方法一比方法二要简单得多,因为方法二所解的并非一次方程组,而方法一只要解一次方程组即可. 因此,我们一般需要根据题目的特点,选用适当的方法,以简化解题过程.

例 3　已知

$$6x^2-7xy-3y^2+14x+y+a \equiv (2x-3y+b)(3x+y+c),$$

试确定 a、b、c 的值.

解　由题设,得

$$\begin{aligned} & 6x^2 - 7xy - 3y^2 + 14x + y + a \\ \equiv\ & (2x - 3y + b)(3x + y + c) \\ \equiv\ & 6x^2 - 7xy - 3y^2 + (3b + 2c)x + (b - 3c)y + bc, \end{aligned}$$

比较对应项系数,得

$$\begin{cases} 3b + 2c = 14, & (1) \\ b - 3c = 1, & (2) \\ bc = a. & (3) \end{cases}$$

由(1)，(2)可得

$$b = 4, c = 1.$$

把 $b = 4, c = 1$ 代入(3)，得

$$a = 4.$$

所以　$a = 4, b = 4, c = 1.$

说明　本例所给出的多项式是二元二次多项式，和一元的多项式一样，如果两个二元多项式恒等，则它们的对应项系数全相等. 从而可以通过比较对应项系数来求解.

例 4　如果 $5x^2 - kx + 7$ 被 $5x - 2$ 除后余 6，求 k 的值及商式.

解　因为 $5x^2 \div 5x = x$，所以商式的最高次项为一次，并且系数为 1. 设商式为 $x + m$，由题意得

$$5x^2 - kx + 7 \equiv (5x - 2)(x + m) + 6,$$

即

$$5x^2 - kx + 7 \equiv 5x^2 + (5m - 2)x - 2m + 6,$$

比较对应项的系数，得

$$\begin{cases} -k = 5m - 2, \\ 7 = -2m + 6. \end{cases}$$

解之得

$$m = -\frac{1}{2}, k = \frac{9}{2}.$$

所以　$k = \frac{9}{2}$，商式为 $x - \frac{1}{2}$.

例 5　将 $5x^3 - 6x^2 + 10$ 表示成

$$a(x - 1)^3 + b(x - 1)^2 + c(x - 1) + d$$

的形式.

解 由题意有

$$\begin{aligned}&5x^3-6x^2+10\\ \equiv\ &a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d\\ \equiv\ &ax^3+(b-3a)x^2+(3a-2b+c)x+(b+d-a-c)\end{aligned}$$

比较对应项系数,得

$$\begin{cases}a=5,\\ b-3a=-6,\\ 3a-2b+c=0,\\ b+d-a-c=10.\end{cases}$$

解之得

$$a=5,\ b=9,\ c=3,\ d=9.$$

所以 $5x^3-6x^2+10=5(x-1)^3+9(x-1)^2+3(x-1)+9.$

说明 除了用待定系数法外,我们还可以利用变量代换的方法来解本题.试解答如下:

设 $y=x-1$,则 $x=y+1$,代入原式,得

$$\begin{aligned}&5x^3-6x^2+10\\ =\ &5(y+1)^3-6(y+1)^2+10\\ =\ &5y^3+9y^2+3y+9\\ =\ &5(x-1)^3+9(x-1)^2+3(x-1)+9.\end{aligned}$$

例6 已知 $\dfrac{x}{x^2-5x+6}\equiv\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}$,试求 A 和 B 的值.

解 通分,去分母得

$$\frac{x}{x^2-5x+6}\equiv\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-3)}$$

$$\equiv\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$\equiv\frac{(A+B)x-3A-2B}{x^2-5x+6}.$$

所以　$x\equiv(A+B)x-3A-2B$.

比较对应系数，得

$$\begin{cases}A+B=1,\\-3A-2B=0.\end{cases}$$

解之得　$A=-2$，$B=3$.

说明　一个分式，如果分子的次数低于分母的次数，则称这个分式为真分式. 将一个真分式转化为某几个真分式之和，我们也称之为求真分式的部分分式. 本例就给出了求部分分式的一种方法.

另外，本例也可采用数值代入法. 在采用数值代入法时，要注意选取恰当的数值代入，这样可以大大简化计算. 如本例，通分，去分母后，可得恒等式：$x\equiv A(x-3)+B(x-2)$. 分别取 $x=3$ 和 2 代入，立即得到 $3=B$ 和 $2=-A$，即得 $A=-2$、$B=3$. 此法显得非常简单.

例 7　有一个关于 x 的三次多项式，当 x 分别取 0、1、2、-1 时，这个多项式的值分别为 2、2、6、0. 求这个多项式.

解　设所求的多项式为 ax^3+bx^2+cx+d，根据题意，有

$$\begin{cases}d=2,\\a+b+c+d=2,\\-a+b-c+d=0,\\8a+4b+2c+d=6.\end{cases}$$

解之得

$$a=1,\ b=-1,\ c=0,\ d=2.$$

所以所求的多项式为

$$x^3 - x^2 + 2.$$

说明 待定系数法是一种重要的数学方法，在使用这种方法时，要注意灵活运用，以简化解题过程. 例 7 还可用下面的解法.

方法二 （构造一个更适合 x 的值代入的多项式）.

设所求的多项式为

$$a(x-1)(x+1)(x-2) + bx(x+1)(x-2)$$

$$+ cx(x-1)(x-2) + dx(x-1)(x+1),$$

把 $x=0$ 代入，得 $a\cdot(-1)(-2)=2$，从而 $a=1$，

把 $x=1$ 代入，得 $b\cdot(1+1)(1-2)=2$，从而 $b=-1$，

把 $x=-1$ 代入，得 $c\cdot(-1)(-1-1)(-1-2)=0$，从而 $c=0$，

把 $x=2$ 代入，得 $d\cdot 2\cdot(2-1)(2+1)=6$，从而 $d=1$.

所以，所求的多项式为

$$(x-1)(x+1)(x-2)-x(x+1)(x-2)+x(x-1)(x+1)$$

$$= x^3 - x^2 + 2.$$

方法三 设所求的多项式为

$$a + bx + cx(x-1) + dx(x-1)(x+1).$$

然后把 x 的取值代入，请同学们完成以后的过程.

例 8 已知

$$(x^2 + ax + b)^2 \equiv (x-1)^4 - (cx+d)^4,$$

试求 a、b、c、d 的值.

解 由题意，得

$$(x^2 + ax + b)^2 + (cx+d)^4 \equiv (x-1)^4$$

取 $x=1$，代入上述恒等式，得

$$(1 + a + b)^2 + (c+d)^4 = 0.$$

由于 $(1+a+b)^2 \geqslant 0$，$(c+d)^4 \geqslant 0$，知

$$1+a+b=0 \text{ 且 } c+d=0.$$

从而得 $d=-c$，把它代入原恒等式，得

$$(x^2+ax+b)^2 \equiv (x-1)^4-(cx-c)^4.$$

由于 $(x^2+ax+b)^2$ 的最高次项为 x^4，$(x-1)^4-(cx-c)^4$ 的最高次式为 $x^4-c^4x^4=(1-c^4)x^4$，故必有

$$1=1-c^4,$$

从而 $c=0$，

$$d=-c=0.$$

于是 $(x^2+ax+b)^2 \equiv (x-1)^4 \equiv [(x-1)^2]^2$

$$x^2+ax+b \equiv (x-1)^2$$

$$\equiv x^2-2x+1.$$

所以，$a=-2$，$b=1$.

因此，$a=-2$，$b=1$，$c=0$，$d=0$.

练　习　题

A　组

1. p、q 为何值时，多项式 x^2+px+q 和 $(x+2)(x-5)$ 恒等？

2. 已知多项式 $ax+b$. 当 x 分别为 1 和 -1 时，这多项式的值分别为 11 和 -3. 求当 $x=3$ 时，这多项式的值.

3. 已知二次三项式 x^2+px+q. 当 x 分别为 0 和 1 时，它的值分别为 2 和 9. 求这个二次三项式.

4. 关于 x 的二次三项式，当 x 分别为 0、1、-1 时，这多项式的值分别为 1、4、2. 求这个二次三项式.

5. 已知

$$x^3+ax^2+bx+c\equiv(x-1)^2(x+1),$$

试求 a、b、c 的值.

6. 如果

$$x^4-6x^3+13x^2-12x+k\equiv(x^2+mx+n)^2,$$

求 m、n 与 k 的值.

7. 设

$$6x^2-5xy-4y^2-11x+22y+m\equiv(2x+y+k)(3x-4y+l),$$

求 m、k、l 的值.

8. 将 $3x^2-4x+7$ 表示成 $a(x+1)^2+b(x+1)+c$ 的形式.

9. 设 $\dfrac{x+4}{x^2+5x+6}\equiv\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x+3}$，试求 A 与 B 的值.

B　组

10. 设 $\dfrac{x^2}{x(x-1)(x+1)}\equiv\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$，求 A、B、C 的值.

11. 设 $\dfrac{x^2-2x+5}{(x-2)^2(x^2+1)} \equiv \dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$，求 A、B、C、D 的值.

12. 已知

$$(x^2+ax+b)^{10} \equiv (x+5)^{20}-(cx+d)^{20},$$

求 a、b、c、d 的值.

13. 已知多项式 ax^3+bx^2+cx+d 被 x^2+p 整除.（即 ax^3+bx^2+cx+d 被 x^2+p 除余 0）. 求证：$ad=bc$.

14. 已知 x^3+bx^2+cx+d 的系数都是整数. 若 $bd+cd$ 为奇数，求证：这个多项式不能表示为两个整系数的多项式的乘积.

测　试　题

1. 若 $(x-1)(x+1)(x+5) \equiv x^3+bx^2+cx+d$，求 $b+d$ 的值.

2. 若 $3x^2-kx+4$ 被 $3x+1$ 除余 2，求 k 的值.

3. 将 $3x^2+5x-7$ 表示成 $a(x-2)^2+b(x-2)+c$ 的形式.

4. 设 $\dfrac{2x}{(x+4)(x-3)} \equiv \dfrac{A}{x+4}+\dfrac{B}{x-3}$，求 A 与 B 的值.

5. 若多项式 $ax+b$，当 $x=0$ 时，值为 3；当 $x=-1$ 时，值为 8，求这个多项式.

6. 若二次三项式 x^2+px+q，当 $x=1$ 和 -1 时，值分别为 -3 和 3. 求当 $x=2$ 时，这个多项式的值.

第十四讲　综合除法和余数定理

一、知识要点和基本方法

综合除法和余数定理是研究多项式除法的常用工具，现将有关的知识介绍如下：

1. 记号 $f(x)$.

关于 x 的代数式常用记号 $f(x)$或 $g(x)$等表示，例如，用 $f(x)$表示代数式 $2x^2+x-3$，则可记为

$$f(x)=2x^2+x-3.$$

这时，$f(1)$就表示当 $x=1$ 时，代数式 $2x^2+x-3$ 的值，即 $f(1)=2\times1^2+1-3=0$. 同样地，有 $f(0)=2\times0^2+0-3=-3$；$f(-1)=2\times(-1)^2+(-1)-3=-2$ 等等.

用 $f(x)$可以代表关于 x 的各种不同的代数式，但在同一个问题中，不同的代数式要用不同的字母表示，如 $f(x)$，$g(x)$，$q(x)$，$r(x)$等.

2. 综合除法.

在学习多项式除法时，我们有带余除法：

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x) \tag{1}$$

其中 $f(x)$表示被除式，$g(x)$表示除式，$q(x)$表示商式，$r(x)$表示余式，且余式 $r(x)$的次数小于除式 $g(x)$的次数.

如果 $g(x)$是一次式 $x-a$，则 $r(x)$的次数小于 1，因此，$r(x)$只能为常数(0 或非零常数). 这时，余式也叫余数，记为 r，即有

$$f(x)=(x-a)\cdot q(x)+r \tag{2}$$

当一个多项式除以一个形如 $x-a$ 的一次式时，有一种简便的运算方法——综合除法. 我们用一个例子来说明. 如

求 $f(x)=3x^2+5x-7$ 除以 $x+2$ 所得的商式和余式.

解 先用一般的竖式除法计算

$$
\begin{array}{r}
3x-1 \\
x+2\overline{)\,3x^2+5x-7} \\
\underline{3x^2+6x\quad\;\;} \\
-x-7 \\
\underline{-x-2} \\
-5
\end{array}
$$

所以，商式为 $3x-1$，余数为 -5.

从运算中我们可以发现上述运算实际上是它们系数之间的运算，所以我们可以省去字母，将上面的除法用下面的简便方式来表示.

$$
\begin{array}{r|rr|l}
-2 & 3 & +5 & -7 & \\
 & & -6 & 2 & \\
\hline
 & 3 & -1 & -5 & \text{商式为 } 3x-1,\ \text{余数为 } -5.
\end{array}
$$

这种简便的除法，称为综合除法. 其演算过程如下：

(1) 被除式 $f(x)$ 按 x 的降幂排列好，依次写出各项的系数，遇到缺项，必须用“0”补足.

(2) 把除式 $x-a$ 的常数项的相反数 a 写在各项系数的左边，彼此用竖线隔开.

(3) 下移第一个系数作为第三行的第一个数；用它乘以 a，加上第二个系数，得到第三行的第二个数；再把这个数乘以 a，加上第三个系数，就得到第三行的第三个数，…，依此进行运算，最后一个数即为余数，把它用线隔开，线外就是商式的多项式系数.

3. 余数定理和因式定理.

由前面的(2)式，当 $x=a$ 时，有

$$f(a)=(a-a)\cdot q(x)+r=r,$$

因此，我们有以下重要定理：

余数定理 多项式 $f(x)$除以 $(x-a)$ 所得的余数等于 $f(a)$.

如求 $f(x)=3x^2+5x-7$ 除以 $x+2$ 的余数.

解 由于 $x+2=x-(-2)$，

$$f(-2)=3\times(-2)^2+5\times(-2)-7=-5.$$

所以，所求的余数为-5.

这与我们前面用综合除法求得的余数相同.

再由(2)式知，如果 $f(x)$能被 $x-a$ 整除，那么必有 $r=0$；反之，如果 $r=0$，那么 $f(x)$能被 $x-a$ 整除. 由此，我们有：

因式定理 若多项式 $f(x)$能被 $x-a$ 整除，亦即 $f(x)$有一个因式 $x-a$，则 $f(a)=0$；反之，如果 $f(a)=0$，那么 $x-a$ 必为多项式 $f(x)$的一个因式.

二、例题精讲

例1 求 $2x^4-3x^3-x^2+5x+6$ 除以 $(x+1)$ 所得的商式和余数.

解 用综合除法计算如下：

-1	2	-3	-1	$+5$	$+6$
		-2	5	-4	-1
	2	-5	4	1	5

所以，商式为 $2x^3-5x^2+4x+1$，余数为 5.

例2 求多项式 $f(x)=3x^3+5x^2-2x^4-5$ 除以 $x-2$ 所得的商式和余数.

解 先将 $f(x)$按降幂排列，

$$f(x)=3x^3+5x^2-2x^4-5$$

$$=-2x^4+3x^3+5x^2+0\cdot x-5$$

用综合除法，计算如下：

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & -2 & +3 & +5 & 0 & -5 \\ & & -4 & -2 & 6 & 12 \\ \hline & -2 & -1 & 3 & 6 & 7 \end{array}$$

所以，商式为 $-2x^3-x^2+3x+6$，余数为 7.

说明 注意应先将 $f(x)$按降幂排列，如果 $f(x)$缺项，应该用零补足.

例 3 用综合除法计算

$$(6x^4-7x^3-x^2+8)\div(2x+1).$$

解 $2x+1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$，先用$6x^4-7x^3-x^2+8$除以$x+\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{c|ccccc} -\frac{1}{2} & 6 & -7 & -1 & 0 & +8 \\ & & -3 & 5 & -2 & 1 \\ \hline & 6 & -10 & 4 & -2 & 9 \end{array}$$

所以，我们有

$$\begin{aligned} & 6x^4-7x^3-x^2+8 \\ =& \left(x+\frac{1}{2}\right)(6x^3-10x^2+4x-2)+9 \\ =& \left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left[\frac{1}{2}(6x^3-10x^2+4x-2)\right]+9 \\ =& (2x+1)\cdot(3x^3-5x^2+2x-1)+9. \end{aligned}$$

因此，所求的商式为 $3x^3-5x^2+2x-1$，余数为 9.

说明 如果除式是一次式，但 x 前的系数不为 1，即除式为 $(ax+b)$，$(a\neq 0, a\neq 1)$. 则可先用 $f(x)$除以 $x+\frac{b}{a}$，这时就可用综合除法了. 若通过计算得到 $f(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)\cdot q(x)+r$，则 $f(x)=\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]\cdot\left[\frac{1}{a}q(x)\right]+r=(ax+b)\cdot\left[\frac{1}{a}\cdot q(x)\right]+r$. 因此所

求的商式是$\frac{1}{a}\cdot q(x)$，余数仍为r.

例4 (1) 求$x-1$除$f(x)=7x^5-4x^4-6x^2+5$所得的余数.

(2) 求$2x-2$除$f(x)=7x^5-4x^4-6x^2+5$所得的余数.

解 (1) 由余数定理，所求的余数为

$$f(1)=7\times1^5-4\times1^4-6\times1^2+5=2.$$

(2) 由例3的说明，我们知道$f(x)$除以$ax+b$的余数和$f(x)$除以$x+\frac{b}{a}$的余数是相同的，所以，$7x^5-4x^4-6x^2+5$除以$2x-2$的余数和$7x^5-4x^4-6x^2+5$除以$x-1$的余数相同，于是，所求的余数为

$$f(1)=7\times1^5-4\times1^4-6\times1^2+5=2.$$

说明 本题也可用综合除法求解.

例5 设$f(x)=3x^5+10x^4-15x^3-9x^2+8x+7$，求$f\left(-\frac{1}{3}\right)$.

解 先用综合除法，计算$f(x)\div\left(x+\frac{1}{3}\right)$.

$-\frac{1}{3}$	3	+10	−15	−9	+8	+7
		−1	−3	6	1	3
	3	9	−18	−3	9	4

求得$f(x)\div\left(x+\frac{1}{3}\right)$的余数为4，根据余数定理，$f\left(-\frac{1}{3}\right)=4$.

说明 本题也可用$-\frac{1}{3}$直接代入$f(x)$来计算，但计算时比较麻烦. 改用综合除法，利用余数定理来计算，则相对较简单.

例6 多项式$f(x)$除以$x-1$，$x-2$所得的余数分别为3和5，求$f(x)$除以$(x-1)(x-2)$所得的余式.

解 根据题意，由余数定理，知

$$f(1)=3,\ f(2)=5.$$

设 $f(x)$除以 $(x-1)(x-2)$ 后所得商式为 $q(x)$，余式为 $ax+b$.（因为除式是二次的，所以余式至多是一次的），则

$$f(x)=[(x-1)(x-2)]\cdot q(x)+(ax+b),$$

所以，有

$$\begin{cases} f(1)=a+b=3, & (1)\\ f(2)=2a+b=5. & (2)\end{cases}$$

由(1)，(2)解得

$$a=2,\ b=1.$$

因此，所求的余式为 $2x+1$.

说明 余数定理讨论的是 $f(x)$除以一次式 $x-a$ 的余数问题. 当除式超过一次时，余式的形式就变得复杂了. 本题的方法具有普遍性，可看作是余数定理的一种推广.

例7 证明：当 a、b 是不相等的常数时，若关于 x 的整式 $f(x)$ 被 $x-a$ 和 $x-b$ 整除，则 $f(x)$也被 $(x-a)(x-b)$ 整除.

证明 设 $f(x)$被 $(x-a)(x-b)$ 除时，商式为 $q(x)$，余式为 $mx+n$，其中 m，n 为待定常数，则

$$f(x)=(x-a)(x-b)\cdot q(x)+mx+n.$$

因为 $f(x)$能被 $x-a$ 和 $x-b$ 整除，由因式定理得：

$$f(a)=(a-a)(a-b)\cdot q(a)+ma+n=0,$$

$$f(b)=(b-a)(b-b)\cdot q(b)+mb+n=0,$$

即

$$\begin{cases} ma+n=0, & (1)\\ mb+n=0. & (2)\end{cases}$$

由(1)－(2)得 $\quad(a-b)m=0,$

又因为 $a\neq b$，所以 $m=0$.

把 $m=0$ 代入(1)，得 $n=0$.

所以 $mx+n=0$，因此，$f(x)$除以 $(x-a)(x-b)$ 的余式为 0，即 $f(x)$被 $(x-a)(x-b)$ 整除.

说明 本题的结论也非常有用.

例 8 试确定 a 和 b 的值，使 $f(x)=2x^4-3x^3+ax^2+5x+b$ 被 $(x+1)(x-2)$ 整除.

解 因为 $f(x)$被 $(x+1)(x-2)$ 整除，所以 $f(x)$被 $x+1$ 和 $x-2$ 整除，根据因式定理，有

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2\times(-1)^4-3\times(-1)^3+a\times(-1)^2+5\times(-1)+b \\ &= a+b=0, \\ f(2) &= 2\times 2^4-3\times 2^3+a\times 2^2+5\times 2+b \\ &= 4a+b+18=0, \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} a+b=0, \\ 4a+b+18=0. \end{cases}$$

解之得

$$a=-6,\ b=6.$$

练　习　题

A　组

1. 计算 $3x^3 - 5x + 6$ 除以 $(x - 2)$ 所得的商式及余数.

2. 求 $2x^3 + 5x^2 - 4x^4 + 8$ 除以 $x + 3$ 所得的商式及余数.

3. 用综合除法计算

$$(-6x^4 - 7x^2 + 8x + 9) \div (2x - 1).$$

4. 用综合除法计算

$$(27x^3 - 9x^2 + 5x - 2) \div (3x - 2).$$

5. 求 $6x^5 - 4x^3 + 5x^2 + 3x + 8$ 除以 $x + 1$ 所得的余数.

6. 设 $f(x) = x^4 + 3x^3 + 8x^2 - kx + 11$ 被 $x + 3$ 整除，试求 k 的值.

7. 设 $f(x) = 3x^5 - 17x^4 + 12x^3 + 6x^2 + 9x + 8$，求 $f(-\frac{1}{3})$.

8. 设 $f(x) = x^4 - ax^2 - bx + 2$ 被 $(x + 1)(x + 2)$ 整除，求 a、b 的值.

B　组

9. 求 $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 5x^5 - x + 8$ 除以 $2x - 4$ 所得的余数.

10. 多项式 $f(x)$ 除以 $(x - 1)$，$(x - 2)$ 和 $(x - 3)$ 所得的余数分别为 1、2、3，试求 $f(x)$ 除以 $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ 所得的余式.

11. 已知多项式 $f(x) = ax^3 + bx^2 - 8x - 12$ 被 $x - 2$ 和 $x - 3$ 整除，试求 a、b 的值，并求 $f(x)$ 除以 $(x - 2)(x - 3)$ 后所得的商式.

12. 若 $x^5 - 5qx + 4r$ 被 $(x - 2)^2$ 整除，求 q 与 r 的值.

13. 已知关于 x 的三次多项式 $f(x)$ 除以 $x^2 - 1$ 时，余式是 $2x$

-5；除以 x^2-4 时，余式是 $-3x+4$，求这个三次式.

14. 一个整系数三次多项式 $f(x)$，有三个不同的整数 a_1，a_2，a_3，使

$$f(a_1)=f(a_2)=f(a_3)=1.$$

又设 b 为不同于 a_1，a_2，a_3 的任意整数，试证明：$f(b)\neq 1$.

测　试　题

1. 用综合除法求下列各式的商式和余式

(1) $(2x^4-5x^3+11x^2+x-15)\div(x-3)$.

(2) $(x^5+6x^4+9x^3-14x+18)\div(x+4)$.

(3) $(27x^3-10x^2+5x-2)\div(x-\frac{2}{3})$.

(4) $(27x^3-10x^2+5x-2)\div(3x-2)$.

2. 设 $f(x)=x^5-4x^4+ax^3+bx-8$ 被 $(x-1)(x-2)$ 整除，试求 a、b 的值.

3. 求一个关于 x 的二次三项式 $f(x)$，它被 $x-1$ 除余 2；被 $(x-2)$ 除余 8；并且它被 $x+1$ 整除.

第十五讲　代数式的化简与求值(二)

一、知识要点和基本方法

前面我们曾经讲述了代数式的化简与求值的部分内容,本讲继续研究这方面的内容,着重讲述乘法公式的应用和配方法.

二、例题精讲

例1　若 $x^2-3x-1=0$,求代数式 $2x^3-3x^2-11x+8$ 的值.

解　$2x^3-3x^2-11x+8$

$=2x\cdot(x^2-3x-1)+3(x^2-3x-1)+11$

$=2x\times 0+3\times 0+11$

$=11.$

说明　在代数式求值时,如果字母所取的值没有明确给出或非常难求,无法直接代入计算,这时,应根据题目的特点,将需求值的代数式作适当变形,再将已知条件(如一个代数式的值)整体代入,往往能得到简捷的解答.

例2　若 $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$,求代数式 $bc+ca+ab$ 的值.

解　由乘法公式 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ 得:

$$2(ab+bc+ca)$$

$$=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$$

$$= 0^2 - 1$$

$$= -1,$$

所以

$$ab + bc + ca = -\frac{1}{2}.$$

说明 由本题的题设和结论，自然而然会想到乘法公式 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$，而将这公式适当变形后，立即得到结果. 乘法公式的运用和变形，是代数式化简和求值中常用的方法.

例 3 若 a、b、c 都是有理数，且 $a + b + c = 0$，$a^3 + b^3 + c^3 = 0$，试求 $a^5 + b^5 + c^5$ 的值.

解 由 $a + b + c = 0$ 得 $c = -(a + b)$. 从而

$$a^3 + b^3 + c^3$$

$$= a^3 + b^3 + [-(a + b)]^3$$

$$= a^3 + b^3 - (a + b)^3$$

$$= a^3 + b^3 - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$$

$$= -3a^2b - 3ab^2$$

$$= 3ab \cdot [-(a + b)]$$

$$= 3abc.$$

又由 $a^3 + b^3 + c^3 = 0$ 知 $3abc = 0$，因此，a，b，c 中至少有一个为 0，不妨设 $a = 0$，则 $a + b + c = b + c = 0$.

从而 $b = -c$.

所以 $a^5 + b^5 + c^5 = 0^5 + (-c)^5 + c^5 = 0$.

说明 刚拿到本题，好像无从下手，但我们可从已知条件入手，利用乘法公式，把已知条件化为一个更简单的条件，即 a、b、c 中至少有一个为 0，其余两个互为相反数，从而解决问题. 本题还可以推广为：求 $a^n + b^n + c^n$ 的值，其中 n 为奇数. 显然，所求的值仍为 0.

实际上，若我们对乘法公式很熟悉，我们可以非常容易地得到 $3abc = 0$，解答如下：

解 由乘法公式

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$$

及题设，立即得到

$$3abc = 0. \quad (\text{下略})$$

上述公式我们在整式的乘法与除法这一讲中已作了介绍. 实际上，它也是一个常用的公式.

对乘法公式越熟悉，解决问题就越方便.

例 4 已知 a、b、c 为有理数，且满足 $a = 8-b$，$c^2 = ab-16$，求 a、b、c 的值.

解 由已知条件可得

$$a+b = 8,\ ab = c^2+16,$$

而 $$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$$

$$= a^2-2ab+b^2+4ab$$

$$= (a-b)^2+4ab,$$

故 $$(a-b)^2 = (a+b)^2-4ab$$

$$= 8^2-4(c^2+16)$$

$$= -4c^2,$$

即：

$$(a-b)^2+4c^2 = 0,$$

由 $(a-b)^2 \geqslant 0$，$4c^2 \geqslant 0$ 知

$$a-b = 0,\ c = 0,$$

又因为 $a+b = 8$，所以

$$a = b = 4,\ c = 0.$$

说明 本例实际上用了乘法公式的变形，即 $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$. 乘法公式的变形还有很多，如

(1) $a^2+b^2=(a\pm b)^2\mp 2ab$.

(2) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$.

(3) $a^3\pm b^3=(a\pm b)^3\mp 3ab(a\pm b)$.

等等. 这些式子都建立在熟练掌握乘法公式的基础上，利用它们解题有时会有很好的效果.

下面着重谈一谈配方法及其应用.

配方法是利用完全平方公式，将代数式中的一些项配成完全平方，其中往往要用到拆项和补项的技巧. 如代数式 x^2+x+5，可以用下面方法配方

$$\begin{aligned}&x^2+x+5\\&=x^2+2\cdot x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+5\\&=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}.\end{aligned}$$

下面再举一些例子.

例 5 设 a、b、c、d 都是整数，且 $m=a^2+b^2$，$n=c^2+d^2$，试把 mn 表示成两个整数的平方和.

解 $$\begin{aligned}mn&=(a^2+b^2)(c^2+d^2)\\&=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\\&=[a^2c^2+2(ac)\cdot(bd)+b^2d^2]+[a^2d^2-2(ad)\cdot(bc)+b^2c^2]\\&=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2,\end{aligned}$$

由于 a、b、c、d 都是整数，所以 $ac+bd$ 和 $ad-bc$ 都是整数，即 mn 表示成了这两个整数的平方和.

说明 本例为了把代数式配成两个完全平方式的和的形式，添了“$2abcd$”这一项，又减去同一项，保证代数式的值不变，这种方法在代数式的恒等变形中有较多的应用.

例 6 已知 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，且 $a=1$，求 $(a+b-c)^{1999}$.

解 因为 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，

所以

$$2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+2ca,$$

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0,$$

$$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0,$$

即 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0.$

由于 $(a-b)^2\geqslant 0,(b-c)^2\geqslant 0,(c-a)^2\geqslant 0,$

故 $a-b=0,b-c=0,c-a=0,$

从而 $a=b=c.$

又由 $a=1$ 知，$b=c=1.$

所以 $(a+b-c)^{1999}=(1+1-1)^{1999}=1.$

说明 本题利用配方法来发现题目的隐含条件，即经过配方，把题设改为 $A^2+B^2+C^2=0$ 的形式(式中 A，B，C 都是代数式)，由完全平方的非负性知，上式 2 等价于 $A=B=C=0$，从而解决问题.

例 7 已知 $x+\frac{1}{x}=2$，求

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$.

(2) $x^3+\frac{1}{x^3}$.

解 (1) $x^2+\frac{1}{x^2}$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

$$=2^2-2$$

$= 2.$

(2) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

$= \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right)$

$= 2 \times (2 - 1)$

$= 2.$

说明 本题利用乘法公式及 $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ 这一简单事实来解决问题. 本题还可继续往下计算,如可计算 $x^4 + \frac{1}{x^4}$ 等的值,同学们可以试一试看.

例 8 已知 $\frac{a}{a^2 + a + 1} = \frac{1}{6}$, 试求 $\frac{a^2}{a^4 + a^2 + 1}$ 的值.

解 由已知条件得, $a \neq 0$. 因此,

由 $\frac{a}{a^2 + a + 1} = \frac{1}{6}$ 可得

$$\frac{a^2 + a + 1}{a} = 6,$$

即 $a + 1 + \frac{1}{a} = 6,$

$a + \frac{1}{a} = 5,$

所以

$$\frac{a^4 + a^2 + 1}{a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2} + 1$$

$$= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 1$$

$$= (5)^2 - 1$$

$$= 24.$$

因此　原式 $=\frac{1}{24}$.

说明　若题目中所给的条件或结论是一个分式，而且其分子是一个单项式，则往往将它倒过来求解.

练　习　题

A　组

1. 已知 $a+b=3$，$ab=2$，求 a^2+b^2 的值.

2. 已知 $a-b=6$，$ab=3$，求 $(a+b)^2$ 的值.

3. 已知 $a+2b=7$，$ab=2$，求 $(a-2b)^2$ 的值.

4. 若 $x+y=1$，求 x^3+y^3+3xy 的值.

5. 已知 $a(a-1)+(b-a^2)=4$，求代数式 $\frac{a^2+b^2}{2}-ab$ 的值.

6. 若 $3x^2-x=1$，求代数式 $6x^3+7x^2-5x+1\,999$ 的值.

7. 已知 $x+\frac{1}{x}=3$，求

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$ 的值.

(2) $x^3+\frac{1}{x^3}$ 的值.

8. 将下列各式配成完全平方与一个常数的和.

(1) x^2-x+3.

(2) $4x^2+5x-9$.

B　组

9. 如果 $a+b=m$，$a^3+b^3=n$，且 $m,n\neq 0$，求 a^2+b^2 的值.

10. 已知 $x^2-3x+1=0$，试求下列各式的值.

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}$.

(2) $x^3+\frac{1}{x^3}$.

(3) $x^4+\frac{1}{x^4}$.

11. 已知 $\frac{2a}{2a^2+a+2}=\frac{1}{3}$，试求 $\frac{2a^2}{2a^4+a^2+2}$ 的值.

12. 设 $A=\frac{6\,780\,241\,382\,718}{7\,120\,121\,319\,782}$，$B=\frac{6\,780\,241\,382\,719}{7\,120\,121\,319\,784}$，试比较 A 与 B 的大小.

13. 已知 $a+b+c=3$，$(a-1)^3+(b-1)^3+(c-1)^3=0$，且 $a=2$，求 $a^2+b^2+c^2$ 的值.

14. 若 $14(a^2+b^2+c^2)=(a+2b+3c)^2$，且 $a=1$，试求 b 与 c 的值.

测 试 题

1. 已知 $a+b=7$，$ab=3$，求 $(a-b)^2$ 的值.

2. 已知 $a-3b=6$，$ab=2$，求 $(a+3b)^2$ 的值.

3. 已知 $b(b+1)-a(a+1)+(a+b)(a-b)=2$，求 $\frac{a^2+b^2}{4}-\frac{ab}{2}$ 的值.

4. 已知 $x-\frac{1}{x}=2$，求 $x^3-\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x}-2x$ 的值.

5. 试比较 $A=\frac{368\,922\,132}{712\,432\,101}$ 与 $B=\frac{368\,922\,133}{712\,432\,102}$ 的大小.

6. 已知 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，试证明：$a=b=c$.

第十六讲　线　　段

一、知识要点和基本方法

线段是几何学的基本图形之一，用它可以组成各种几何图形，如三角形，四边形等. 因此，观察图形中的线段，发现线段和其他图形的联系，对分析图形是很重要的.

本讲介绍与线段有关的一些知识，包括数线段，两点之间线段最短及计算一些给定线段的长度.

二、例题精讲

例 1　数一数图 16-1 中共有多少条线段？

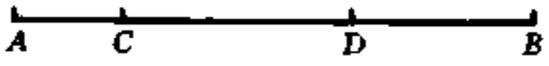


图 16-1

解　因为线段可以看作是直线上两点间的部分，所以，如果知道了直线上的点数，那么线段的总数也就好求了. 图 16-1 中，最长的线段 AB 上有两点 C 和 D，把 AB 分为 AC、CD、DB 三段. 但如果以为图中只有这三条线段，那就错了，因为这样就把一些线段（如 AB）给漏掉了. 那么怎样才能不重复不遗漏地数出图中线段的总数呢？关键是按顺序，有规律地去数，一般是以线段的一个端点为顺序来数.

如图 16-1，以 A 点开始，从左往右观察. 先看以 A 为左端点的线段数，有三条，分别为 AC，AD，AB；其次，看以 C 点为左端点的线

段数，有二条，分别为 CD 和 CB；再看以 D 为左端点的线段数，很明显，只有一条，即 DB. 这样，我们发现共有线段

$$3+2+1=6(\text{条}).$$

说明 例 1 的数线段的方法很容易推广，即一般地，如果线段 AB 上有 n 个点（如图 16-2），即加上两个端点 A 与 B，共有 $(n+2)$

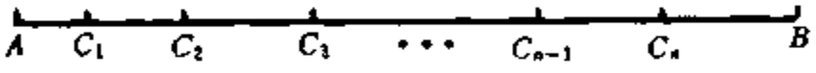


图 16-2

个点，则以 A 为左端点的线段为 AC_1，AC_2，…，AC_n，AB，共有 $n+1$ 条，以 C_1 为左端点的线段为 C_1C_2，C_1C_3，…，C_1B，共有 n 条，…，依此类推，以 C_n 为左端点的线段只有一条，即为 C_nB. 因此，图 16-2 中共有线段

$$(n+1)+n+(n-1)+\cdots+2+1=\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}(\text{条}).$$

此式也可以作为一个公式使用. 如例 1，若用此公式计算，则显然 $n=2$，因此共有线段 $\dfrac{(2+1)\times(2+2)}{2}=6(\text{条})$.

又如，若线段 AB 上共有 99 个点（不包括 A，B 两点），那么共有线段 $\dfrac{(99+1)(99+2)}{2}=5\,050(\text{条})$.

有些问题，最后可归结为数线段的问题，如下例.

例 2 如图 16-3，图中共有多少个长方形（包括正方形）？

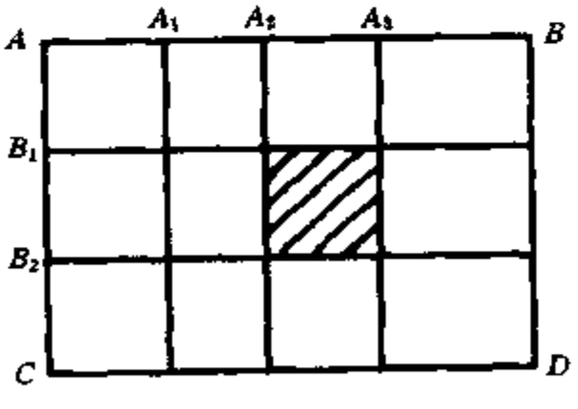


图 16-3

解 确定了长方形的一组邻边，就可以确定一个长方形. 每一个长方形都对应线段 AB 上任取的一条线段和线段 AC 上任取的一条线段所组成的线段对，反过来，这样的一条线段对也对应了一个长方形. 如 AB 上的线段 A_2A_3 和 AC 上的线段 B_1B_2 所组成的线段对 $(A_2A_3,\ B_1B_2)$ 对应了一个长方形（阴影部分），反过

来，阴影部分的长方形也确定了一个线段对(A_2A_3，B_1B_2)．因此，要计算图中长方形的个数，只要计算 AB 和 AC 中线段的条数即可．

由于 AB 上有三个点 A_1，A_2，A_3，因此，AB 上的线段共有 $\frac{(3+1)\times(3+2)}{2}=10$(条)；$AC$ 上有两个点 B_1 和 B_2．因此，AC 上的线段共有 $\frac{(2+1)\times(2+2)}{2}=6$(条)．线段对有：$10\times 6=60$(对)．所以，图中长方形的个数也为 60 个．

例 3 乘火车从北京到上海，共有 25 个车站(包括北京和上海在内)，那么共需准备多少种不同的车票？

解 我们可以将这个应用问题转化为数线段问题．可将每两个车站看成一条线段，则 25 个车站组成(即上面所说的公式中 $n+2=25$)

$$\frac{25\times 24}{2}=300$$

条线段．

但从甲地到乙地与从乙地到甲地应当准备两种不同的车票，所以应当准备

$$300\times 2=600$$

种车票．

与线段有关的问题，常用到一条公理，即两点之间线段最短．具体地说，就是在所有连结两点的线中，线段的长最短．由这一公理，我们马上得到下面一个重要结论：三角形中两边之和大于第三边．即如图 16-4，我们有：

$$AB+AC>BC,$$

$$AB+BC>AC,$$

$$AC+BC>AB.$$

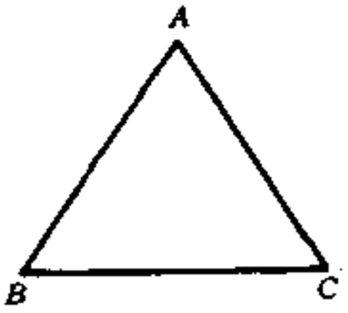


图 16-4

这个结论非常有用，如下例．

例 4 已知 O 是 $\triangle ABC$ 中任意一点，(如图 16-5)求证：

(1) $\frac{1}{2}(AB+AC+BC)<OA+OB+OC$;

(2) $AB+AC+BC>OA+OB+OC$.

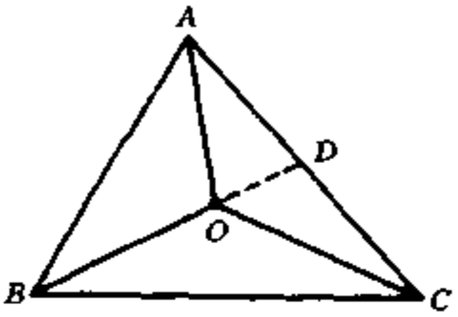


图 16-5

证明 (1) 在$\triangle OAB$中，$OA+OB>AB$，

在$\triangle OAC$中，$OA+OC>AC$，

在$\triangle OBC$中，$OB+OC>BC$.

三式相加，得

$$2(OA+OB+OC)>AB+AC+BC,$$

即$\frac{1}{2}(AB+AC+BC)<OA+OB+OC$.

(2) 延长BO交AC于D，则

在$\triangle ABD$中，有$AB+AD>BD$，

在$\triangle OCD$中，有$OD+CD>OC$.

两式相加得

$$AB+AD+CD+OD>BD+OC.$$

注意到$AD+CD=AC$，$BD=OB+OD$，

所以有

$$AB+AC>OB+OC.$$

同理可得

$$AC+BC>OA+OB,$$

$$AB+BC>OA+OC.$$

三式相加，得

$$2(AB+BC+AC)>2(OA+OB+OC),$$

即 $$AB+BC+AC>OA+OB+OC.$$

“两点之间，线段最短”不仅可用在三角形中，还可以用于一些最

短路线问题. 如下例.

例 5 如图 16-6，一位小牧童，从 A 地出发，赶着牛群到河边饮水，然后再到 B 地，问应当怎样选择饮水的地点，才能使牛群所走的路线最短？

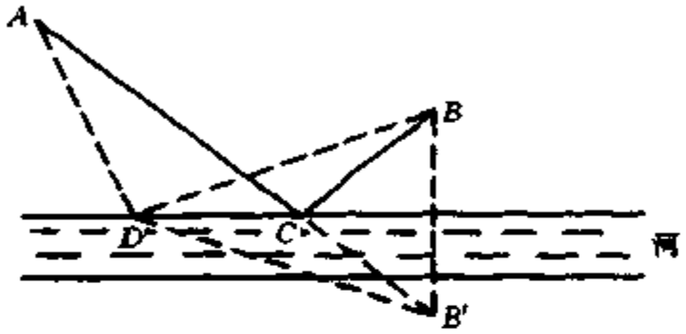


图 16-6

解 我们利用“对称”的方法来解决问题.

先求出 B 关于河岸线的对称点 B'，连接 AB'，设它与河岸线交于 C，则 C 点就是所选的最好位置. 即牧童赶着牛群从 A 出发，到 C 点饮水，再到 B 地，这条路线最短.

这是因为，若饮水点不在 C 点，不妨设在 D 点，则牧童所走路线长为 $AD + BD$. 下面只要证明 $AD + BD > AC + BC$ 即可(图 16-6).

连接 $B'D$，由于 B，B' 关于河岸线对称，因此有

$$BC = B'C,\ BD = B'D,$$

所以

$$AD + BD = AD + B'D,$$

$$AC + BC = AC + B'C = AB'.$$

在 $\triangle ADB'$ 中，有 $AD + B'D > AB'$，

从而 $AD + BD > AC + BC$.

即 C 点为所求的最好点.

说明 本题的实质是：先用对称的方法化成 A 点与 B' 点之间最短距离问题. 而两点之间线段最短. 从而找到所求的最短路线.

下面再举一个例子.

例 6 在一条河的两岸有 A，B 两个村庄，现要在河上建一座小

桥，桥的方向与河流垂直．设河的宽度不变，试问：桥架在何处，才能使从 A 到 B 的距离最短？（如图 16-7）

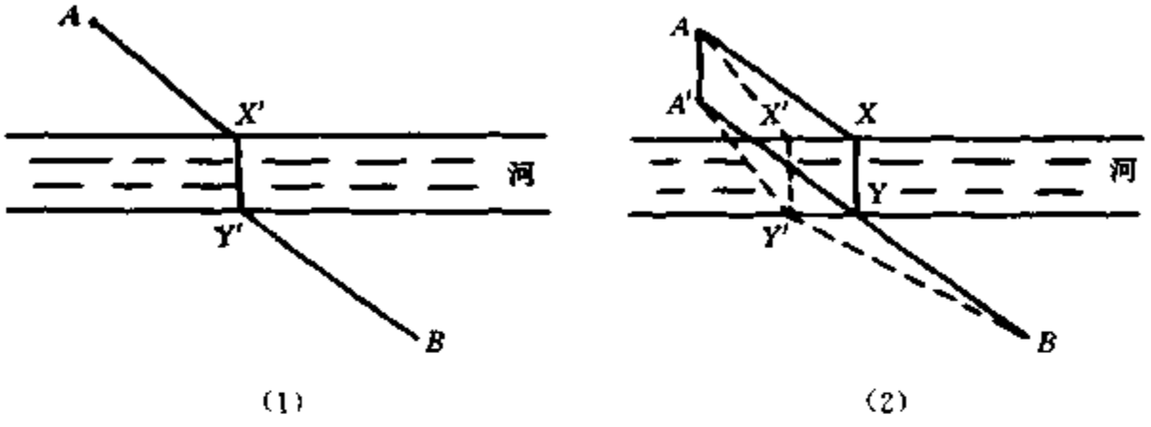


图 16-7

解 先对路线分析一下，整个路线可分作三段：AX'，$X'Y'$（桥），$Y'B$（如图 16-7-1），但不管桥建在何处，桥长是一定的，即 $X'Y'$ 为定长．因此，要使全程最短，只要使 $AX' + BY'$ 最小即可．

如图 16-7-2，先从 A 点出发，正对河岸走到 A' 点，使 AA' 等于桥长，则 A' 点是定点，而且四边形 $AA'Y'X'$ 是一个平行四边形，故 $AX' = A'Y'$．从而

$$AX' + BY' = A'Y' + Y'B.$$

问题化为在河岸上求一点 Y'，使 $A'Y' + Y'B$ 最短．

由两点之间线段最短，易得连结 $A'B$，交河岸于 Y，则 Y 点即为所求．即在 Y 处架桥 XY，沿路线 $A \to X \to Y \to B$ 的距离最短．

例 7 如图 16-8，C，D，E 将线段 AB 分成四部分，且 $AC : CD : DE : EB = 2 : 3 : 4 : 5$，$M$，$P$，$Q$，$N$ 分别是 AC，CD，DE，EB 的中点，且 $MN = 21$，求 PQ 的长．

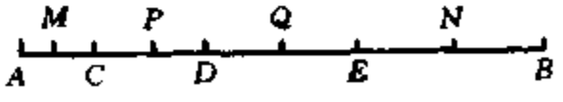


图 16-8

解 设 $AC = 2k$，由题意，可得 $CD = 3k$，$DE = 4k$，$EB = 5k$，且

$$MN = MC + CD + DE + EN$$

$$= \frac{1}{2}AC + CD + DE + \frac{1}{2}EB$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2k + 3k + 4k + \frac{1}{2} \cdot 5k$$

$$= \frac{21}{2}k,$$

所以，

$$\frac{21}{2}k = 21,$$

$$k = 2.$$

因此，

$$PQ = PD + DQ$$

$$= \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}DE$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3k + \frac{1}{2} \cdot 4k$$

$$= \frac{7}{2}k$$

$$= 7.$$

答　PQ 的长为 7.

说明　用代数方法解决几何问题，也是常用的思想方法. 特别是在计算线段的长度时，经常用到这种方法. 本题所给已知条件是一个连比，因此，经常使用的方法便是设与比值为 1 对应的部分为 k.

例 8　如图 16-9，线段 $AB = 2BC$，$DA = \frac{3}{2}AB$，M 是 AD 中点，N 是 AC 中点，试比较 MN 和 $AB + NB$ 的大小.

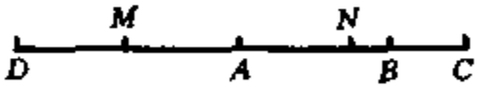


图 16-9

解　由题意

$$MN = MA + AN$$

$$= \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}AC$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}AB + \frac{1}{2}(AB + BC)$$

$$= \frac{3}{4}AB + \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AB$$

$$= \frac{3}{2}AB,$$

$$AB + NB = AB + (NC - BC)$$

$$= AB + \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}AB$$

$$= AB + \frac{1}{2}(AB + BC) - \frac{1}{2}AB$$

$$= AB + \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}AB$$

$$= \frac{5}{4}AB,$$

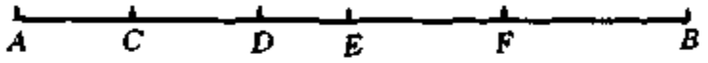
由于 $AB > 0$，所以 $MN > AB + NB$.

说明 本题的已知条件都与 AB 有关系，因此，我们把线段长度都用 AB 来表示，然后就很容易地比较出大小.

练　习　题

A　组

1. 如图 16-10，图中各有多少条线段？



(1)

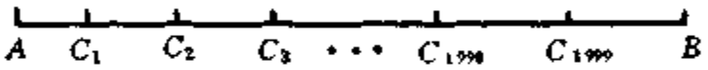


图 16-10

2. 如图 16-11，图中共有多少个长方形？（包括正方形）

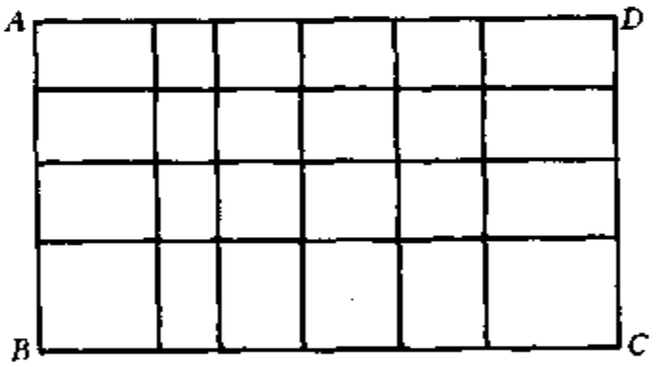


图 16-11

3. 如图 16-12，图中共有多少个三角形？

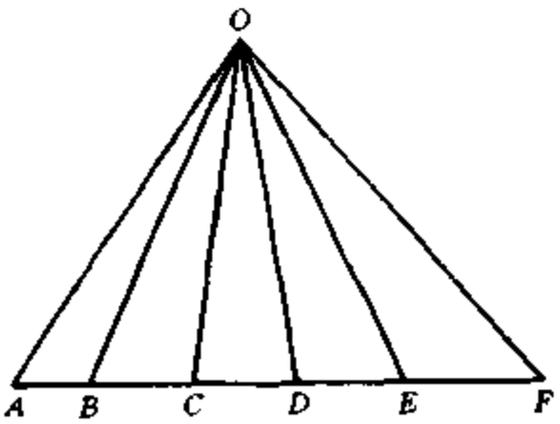


图 16-12

4. 平面上有 5 个点，无三点共线，以其中一点为端点，并且经过另一点的射线条数有多少？

5. 如图 16-13，已知 K，M，N，H 是线段 AB 的五等分点.

(1) 写出图中所有的线段.

(2) 点 M 是哪些线段的中点？

(3) 点 N 是哪些线段的一个三等分点？

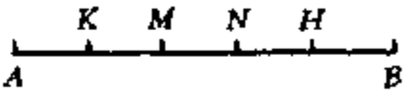


图 16-13

6. 如图 16-14，点 C，D，E 是线段 AB 的四等分点，点 F、G 是线段 AB 的三等分点，已知 $AB = 12\text{cm}$，求线段 $CF + DF + EF$ 的长.

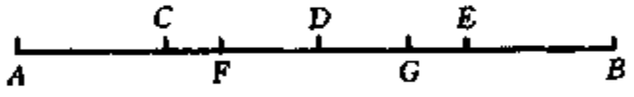


图 16-14

7. 已知线段 $AB = 14$，在 AB 上有 C，D，M，N 四点，且满足 $AC : CD : DB = 1 : 2 : 4$，$AM = \frac{1}{2}AC$，$DN = \frac{1}{4}DB$，求 MN 的长度(图 16-15).

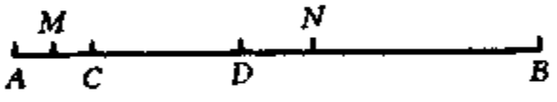


图 16-15

B 组

8. 图 16-16 是一个 3×4 的正方形方格，问图中共有多少个长方形(包括正方形)？共有多少个正方形？

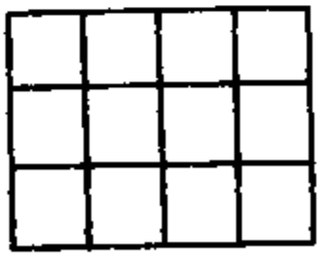


图 16-16

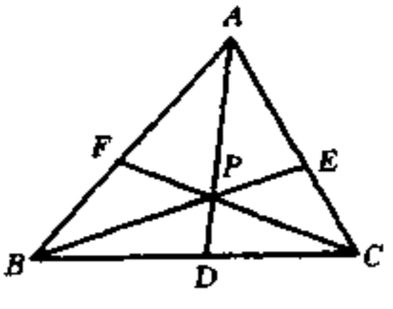


图 16-17

9. 如图 16-17，P 为 $\triangle ABC$ 中任意一点，延长 AP，BP，CP 分别交 BC，AC，AB 于 D，E，F. 求证：$AD + BE + CF > \frac{1}{2}(AB +$

$BC + CA$).

10. 如图 16-18，A，B 两村相隔两条河，且每条河的宽度相同，为使两村之间行程最短，应在两条河的什么位置架桥？

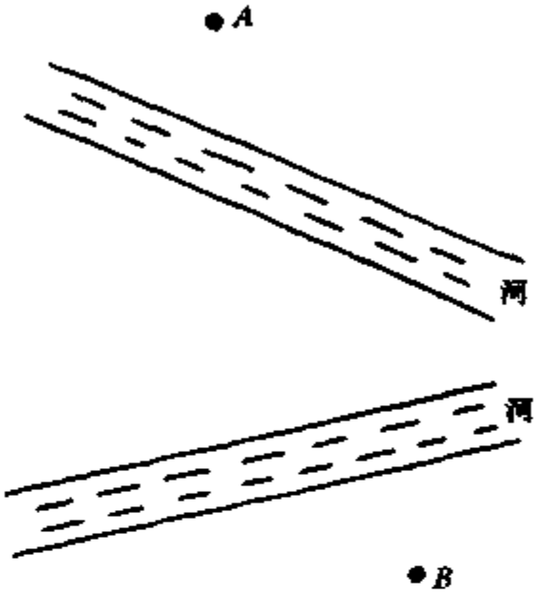


图 16-18

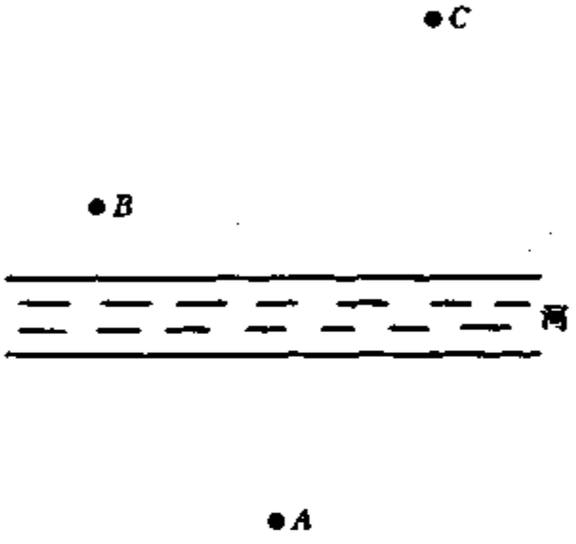


图 16-19

11. 如图 16-19，在河的两岸共有 A，B，C 三个村庄，A 村的人需过河才能到 B 村和 C 村. 问：应在河上什么位置架两座桥，使两岸人们来往的路程最短？

12. 如图 16-20，A 点是牧马营地，每天牧马人都要从营地出发，赶着马群先到河边饮水，再到草地吃草，然后回到营地. 问：怎样的放牧路线，路程最短？

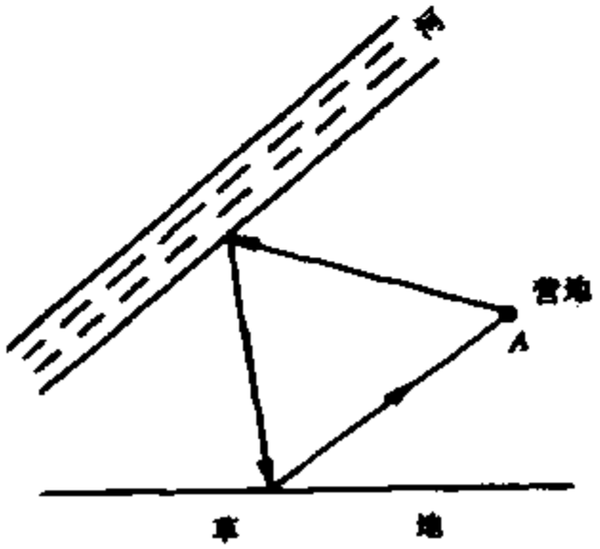
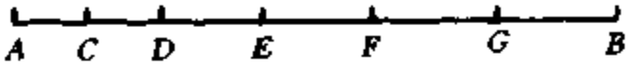


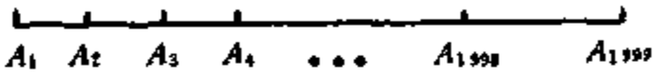
图 16-20

测 试 题

1. 如图 16-21，图中各有多少条线段？



(1)



(2)

图 16-21

2. 如图 16-22，图中共有多少个长方形？

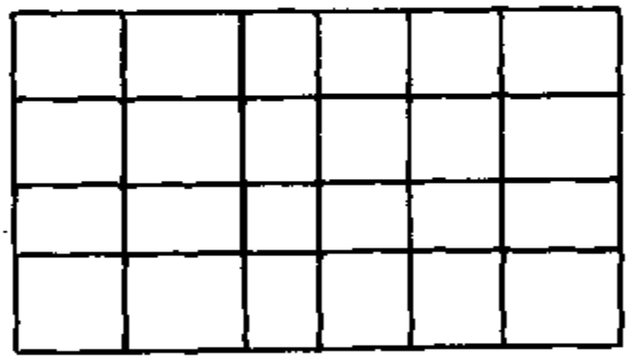


图 16-22

3. 设 P 为线段 AB 上一点，且 $AP=\frac{3}{5}AB$，M 是 AB 的中点，若 $PM=2\text{cm}$，求 AB 的长.

4. 如图 16-23，线段 $BD=\frac{1}{3}AB=\frac{1}{4}CD$，点 M，N 分别是线段 AB，CD 的中点，且 $MN=20\text{cm}$，求 AC 的长.

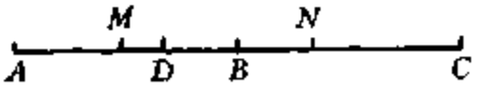


图 16-23

5. 如图 16-24，在河里有 A，B 两岛. 一次划船比赛，从 A 出发划向 B 岛. 赛程规定必须先划到北岸，然后又划到南岸，再划向 B

岛. 问:应选择怎样的路线,才能使路程最短?

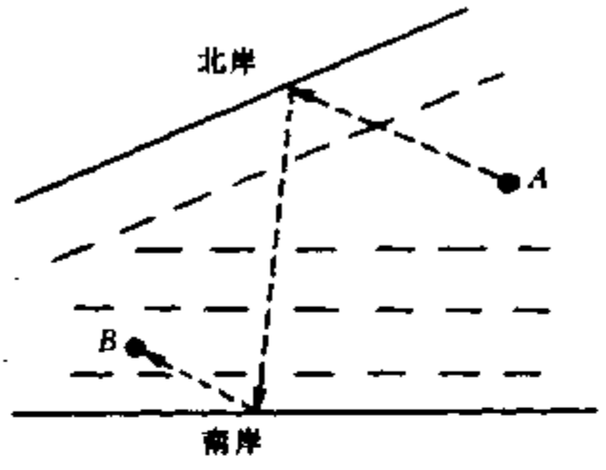


图 16-24

第十七讲　角

一、知识要点和基本方法

具有公共端点的两条射线所组成的图形称为角. 角也是几何学的基本图形之一. 与角有关的基本概念有：周角，平角，直角，锐角，钝角，对顶角等. 在初中几何中，如果谈到一个角，一般是指在 0°～180° 之间的角.

二、例题精讲

例 1　如图 17-1，图中共有多少个角？

解　从图中可以看出，最大的角 $\angle A_1OA_7$ 被五条射线 OA_2，OA_3，OA_4，OA_5，OA_6 分成 6 个部分. 但如果你认为图中只有 6 个角，那就错了，因为这样就漏数了许多角. 在数图形中角的总数时，要注意不重复不遗漏，一般可以按一定的规律去数. 如我们可以从左至右，先数以 OA_1 为左边的角，有 $\angle A_1OA_2$，$\angle A_1OA_3$，$\angle A_1OA_4$，$\angle A_1OA_5$，$\angle A_1OA_6$，$\angle A_1OA_7$，共 6 个；再数以 OA_2 为左边的角，有 $\angle A_2OA_3$，$\angle A_2OA_4$，$\angle A_2OA_5$，$\angle A_2OA_6$，$\angle A_2OA_7$，共 5 个；依此类推，可以数分别以 OA_3，OA_4，OA_5，OA_6 为左边的角，个数分别为 4，3，2，1 个，所以图中共有

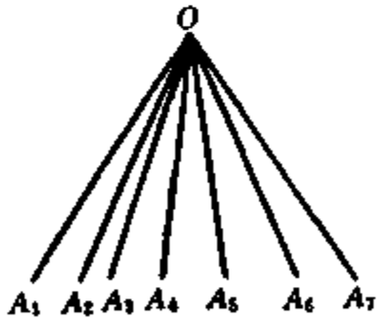


图 17-1

$$6+5+4+3+2+1=21(\text{个}).$$

说明　在数图形的角的总数时，和数线段一样，关键仍是做到不

重不漏，因此，必须按照一定的规律去数.

另外，本题也可以化为一个数线段的问题，如图 17-2，我们作一直线，分别交 OA_1，OA_2，…，OA_7 于 A_1，A_2，…，A_7，则每一个角都对应于 A_1A_7 上的某一条线段. 反过来，A_1A_7 上的每一条线段又对应于某一个角，如 $\angle A_3OA_5$，它对应线段 A_3A_5，而线段 A_3A_5，恰好对应于 $\angle A_3OA_5$，因此，要数图中角的个数，只要数 A_1A_7 上的线段数即可，而 A_1A_7 上的线段数有

$$\frac{6\times 7}{2}=21(\text{条}),$$

因此，图中共有 21 个角.

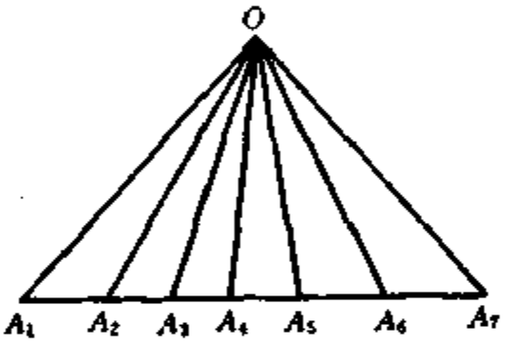


图 17-2

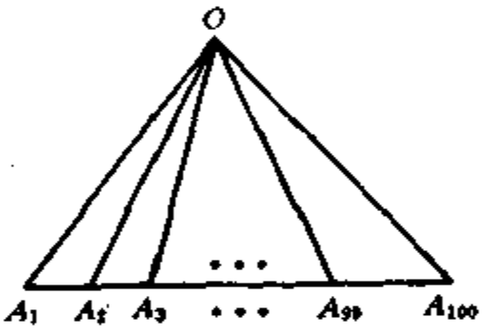


图 17-3

用这种方法，可以计算图 17-3 中角的个数，我们也作一直线和角的各边交于 A_1，A_2，…，A_{100}，则由数线段的公式，知 A_1A_{100} 上共有

$$\frac{99\times 100}{2}=4\,950(\text{条}),$$

因此，图中共有 4 950 个角.

例 2 一个角的余角的 2 倍和它的补角的 $\frac{1}{2}$ 互为补角，求这个角的度数.

解 设这个角的度数为 x，则它的余角为 $90^\circ-x$，补角为 $180^\circ-x$，由题意，得

$$2(90^\circ-x)+\frac{1}{2}(180^\circ-x)=180^\circ$$

解之得：

$$x = 36°,$$

所以，这个角等于 36°.

说明 与求线段的长度类似，在求某个角的度数时，我们经常使用解方程(组)的方法，用这种方法可以使解题简捷，方便，并且不易出错.

例 3 如图 17-4，从点 O 引出 6 条射线 OA，OB，OC，OD，OE，OF，且 $\angle AOB = 100°$，OF 平分 $\angle BOC$，$\angle AOE = \angle DOE$，$\angle EOF = 140°$，求 $\angle COD$ 的度数.

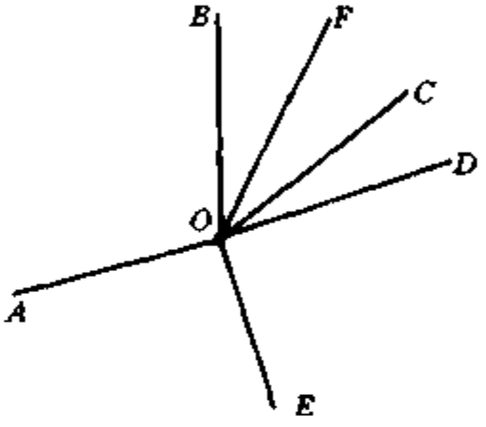


图 17-4

解 由题意，得

$$\angle EOF = \angle EOD + \angle COD + \angle COF$$

$$= 140°,$$

即 $$\angle COD = 140° - (\angle EOD + \angle COF).$$

又 $$\angle EOF + \angle BOF + \angle AOE + \angle AOB = 360°,$$

而 $$\angle EOF = 140°,\ \angle AOB = 100°,$$

因此 $$\angle BOF + \angle AOE = 120°.$$

由已知条件，$\angle BOF = \angle COF$，$\angle AOE = \angle DOE$，

所以 $$\angle EOD + \angle COF = \angle BOF + \angle AOE = 120°.$$

从而 $$\angle COD = 140° - (\angle EOD + \angle COF) = 140° - 120° = 20°.$$

答 $\angle COD$ 的度数为 20°.

说明 本题把 $\angle EOD + \angle COF$ 作为一个整体来看，它的值可求，从而问题得到解决(注意：$\angle EOD$ 和 $\angle COF$ 的度数是无法求出的). 在求解时，注意利用隐含的条件，即 $\angle EOF$，$\angle BOF$，$\angle AOE$，$\angle AOB$ 的和恰好为一个周角，即和为 360°.

另外，本题也可以用方程(组)来解，而且显得特别简单. 因为它

撇开了一些具体角的符号，可以使我们看得更加清楚，试解如下：

解 设 $\angle COD = x$，$\angle BOC + \angle AOD = y$，由题意，可得

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 140°, \\ x + y + 100° = 360°. \end{cases}$$

解之得 $\begin{cases} x = 20°, \\ y = 240°, \end{cases}$

即$\angle COD$ 的度数为 $20°$.

例 4 如图 17-5，$\angle A_1OA_{11}$是一个平角，$\angle A_3OA_2 - \angle A_2OA_1 = \angle A_4OA_3 - \angle A_3OA_2 = \angle A_5OA_4 - \angle A_4OA_3 = \cdots = \angle A_{11}OA_{10} - \angle A_{10}OA_9 = 2°$，求$\angle A_{11}OA_{10}$的度数.

图 17-5

解 由题意，有

$$\angle A_3OA_2 - \angle A_2OA_1 = 2°,$$

$$\angle A_4OA_3 - \angle A_3OA_2 = 2°,$$

$$\cdots$$

$$\angle A_{11}OA_{10} - \angle A_{10}OA_9 = 2°,$$

把上述 9 个式子相加，得

$$\angle A_{11}OA_{10} - \angle A_2OA_1 = 9 \times 2°$$

即

$$\angle A_{11}OA_{10} = \angle A_2OA_1 + 18°.$$

由题意，$\angle A_2OA_1$，$\angle A_3OA_2$，…，$\angle A_{11}OA_{10}$的度数成公差为 $2°$

的等差数列，由等差数列求和的公式，得，

$$\begin{aligned}\angle A_1OA_{11} &= \angle A_2OA_1 + \angle A_3OA_2 + \cdots + \angle A_{11}OA_{10}\\ &= \frac{1}{2} \times (\angle A_2OA_1 + \angle A_{11}OA_{10}) \times 10\\ &= \frac{1}{2} \times (\angle A_2OA_1 + \angle A_2OA_1 + 18°) \times 10\\ &= 5(2\angle A_2OA_1 + 18°),\end{aligned}$$

又由$\angle A_1OA_{11}$是平角，知

$$5(2\angle A_2OA_1 + 18°) = 180°,$$

所以 $\angle A_2OA_1 = 9°$.

因此 $\angle A_{11}OA_{10} = \angle A_2OA_1 + 18° = 27°$.

说明 本题利用等差数列的一些知识来解题.

例5 成对顶角的两个角的平分线，在一条直线上吗？为什么？

解 是在一条直线上.

如图17-6，AB、CD相交于O，则$\angle AOC$与$\angle BOD$成对顶角. 设OE、OF分别为$\angle AOC$和$\angle BOD$的平分线. 下证OE、OF在一直线上.

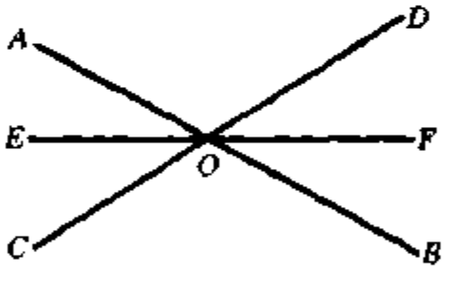


图 17-6

因为 $\angle AOE = \frac{1}{2}\angle AOC$,

$\angle BOF = \frac{1}{2}\angle BOD$，且 $\angle AOC = \angle BOD$,

所以 $$\angle AOE = \angle BOF.$$

又因为 $$\angle BOF + \angle FOD + \angle DOA = 180°,$$

所以 $$\angle AOE + \angle FOD + \angle DOA = 180°.$$

即 $$\angle EOF = 180°.$$

所以OE和OF在同一直线上.

说明 与对顶角有关的问题也比较多，特别是在判断题中，如判断下列命题是否正确：

(1) 相等的角一定是对顶角；

(2) 如果两个相等的角有公共顶点，且有一条边互为反向延长线，则这两个角一定是对顶角.

在判断这些问题时，主要运用对顶角的定义来解题. 易知上面两个命题都是错误的。

例6 钟面上从 2 点到 4 点有几次时针与分针夹成 60°的角？分别是几点几分？

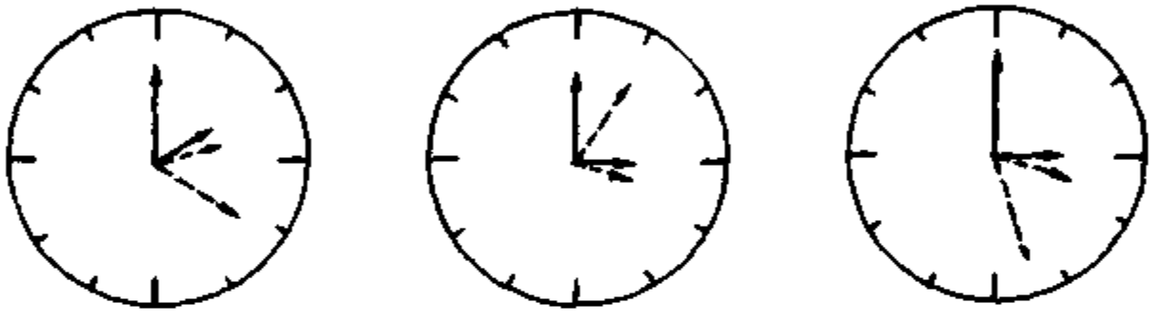


图 17-7

解 共有四次时针与分针所夹的角为 60°.

(1) 第一次正好为两点整. 显然，此时时针与分针恰成 60°角. (因为钟面上每一格恰好为 30°).

(2) 第二次如图 17-7(1)，设为 2 点 x 分时，时针与分针的夹角为 60°，则

$$x = 10 + \frac{x}{12} + 10,$$

解之得

$$x = 21\frac{9}{11},$$

即 2 点 $21\frac{9}{11}$分时，时针与分针的夹角也为 60°.

(3) 第三次如图 17-7(2)，设 3 点 y 分时，时针与分针的夹角为 60°，则

$$y + 10 = \frac{y}{12} + 15,$$

解之得 $$y = 5\frac{5}{11},$$

即 3 点 $5\frac{5}{11}$分时，时针与分针的夹角为 60°.

(4) 第四次如图 17-7(3)，设为 3 点 z 分时，时针与分针的夹角为 60°，则

$$z = 15 + \frac{z}{12} + 10,$$

解之得： $$z = 27\frac{3}{11},$$

即 3 点 $27\frac{3}{11}$分时，时针与分针的夹角为 60°.

说明 像例 6 这一类问题，解决的时候要注意下面几点：

(1) 针表盘上转一周恰好为 360°，而它上面分为十二格，因此，每一格恰为 30°，而分针每转过一格是 5 分钟，时针每转过一格为 1 小时.

(2) 时针转动的速度是分针转动速度的十二分之一.

(3) 可以把这类问题看成是行程类问题中的追及问题来解决.

练　习　题

A　组

1. 判断下列命题的真假.

(1) 一个钝角减去一个锐角,所得的差一定是个锐角. (　　)

(2) 一个直角减去一个锐角,所得的差一定是个锐角. (　　)

(3) 互补两角有一条公共边,则这两个角的平分线所组成的角一定是直角. (　　)

(4) 相等的两个角一定是对顶角. (　　)

(5) 如果两个相等的角有一条公共边,则另一条边一定在同一条直线上. (　　)

2. 一个角比它的余角大 20°,求这个角的余角的补角的度数.

3. 如果一个角的补角与余角的和,比它的补角与余角的差大 60°,求这个角的余角的度数.

4. 如图 17-8, $\angle AOB = 90°$, $\angle AOC$ 为锐角, ON 平分 $\angle AOC$, OM 平分 $\angle BOC$, 求 $\angle MON$ 的度数.

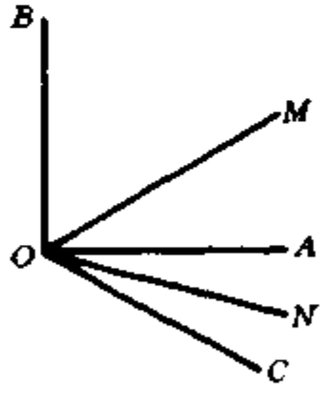


图 17-8

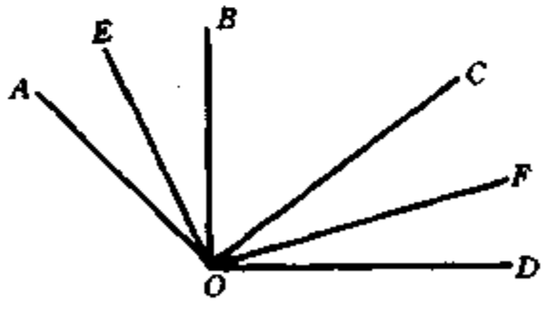


图 17-9

5. 如图 17-9, 已知 $\angle AOB$ 和 $\angle COD$ 都是 $\angle BOC$ 的余角, OE, OF 分别为 $\angle AOB$ 和 $\angle COD$ 的角平分线, 如果 $\angle BOC = 50°$, 求: $\angle AOE$, $\angle AOD$, $\angle EOF$ 的度数.

6. 如图 17-10, 图中共有多少个角?

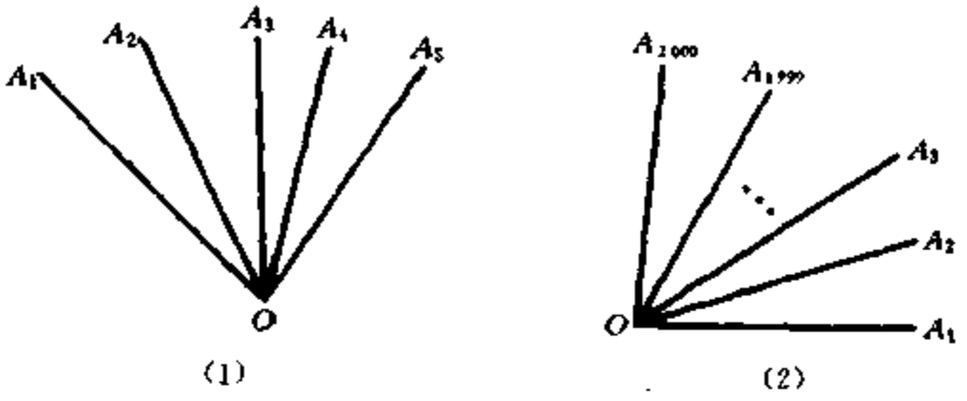


图 17-10

7. 如图 17-11，O 是直线 AB 上一点，OD，OE 分别是 $\angle AOC$ 和 $\angle BOC$ 的平分线，求证：$\angle DOE = 90°$.

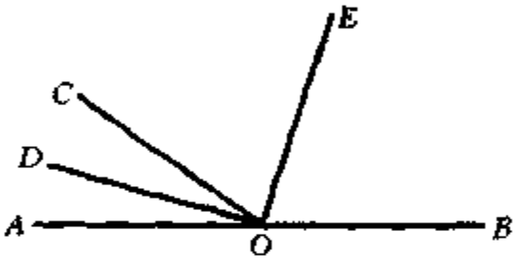


图 17-11

8. 证明：一个锐角一半的余角的 2 倍，减去这个锐角 2 倍角的补角，仍等于原角.

B 组

9. 如图 17-12，是一个 3×3 方格，试求 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 + \angle 9$ 的度数.

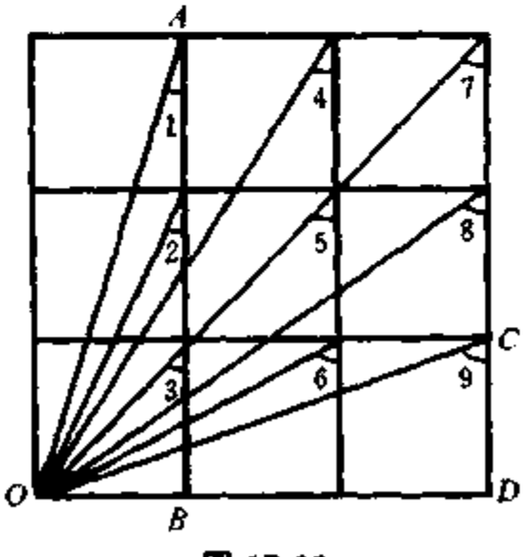


图 17-12

10. 如图 17-13，已知 $\angle A_3OA_2 - \angle A_2OA_1 = \angle A_4OA_3 - \angle A_3OA_2 = \angle A_5OA_4 - \angle A_4OA_3 = \cdots = \angle A_8OA_7 - \angle A_7OA_6 =$

$\angle A_1OA_8 - \angle A_8OA_7 = 4°$，求$\angle A_2OA_3$的度数.

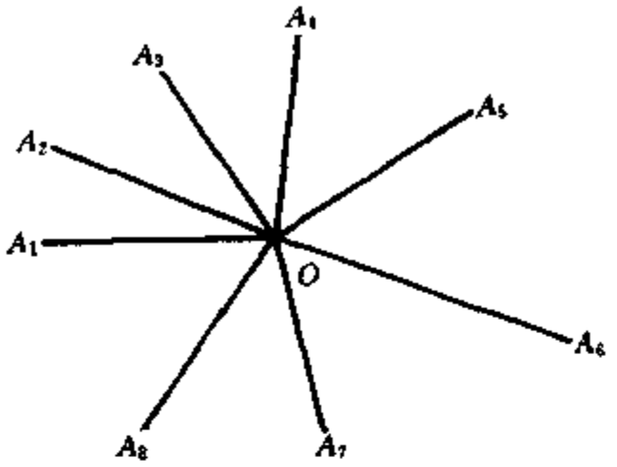


图 17-13

11. 8 点 20 分，时针与分针所成的角是多少度？

12. 在 3 点和 4 点之间(包括 3 点、4 点)，何时时针与分针成 90°？

测　试　题

1. 判断题.

(1) 同角的余角都相等. (　　)

(2) 一个钝角减去一个直角，其差必为一个锐角. (　　)

(3) 一个钝角减去一个锐角，其差必为一个直角. (　　)

(4) 一个角的补角减去这个角余角的 2 倍，大小仍等于原角.

(　　)

2. 如图 17-14，图中共有多少个角？

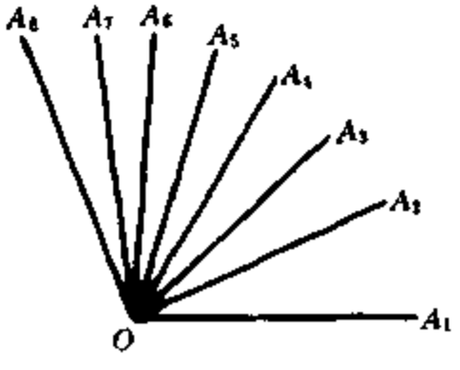


图 17-14

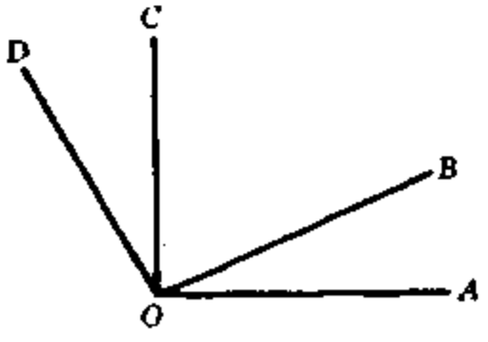


图 17-15

3. 如图 17-15，$\angle AOB$ 与 $\angle AOD$ 的度数比为 1∶7，$\angle AOC = \angle BOD = 90°$，求 $\angle AOB$，$\angle BOC$，及 $\angle COD$ 的度数.

4. 如果一个角的补角的 2 倍减去这个角的余角恰好等于这个角的 4 倍，求这个角的度数.

5. 问在 3 点与 4 点之间，何时分针与时针在一条直线上？

第十八讲　从三角形内角和谈起

一、知识要点和基本方法

我们知道，三角形的内角和等于 180°，由这个所有三角形都具有的性质，可以得到三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和. 这个性质可以把一些分散的角集中到一个三角形中来. 另外，我们从三角形的内角和可以得到多边形的内角和和外角和.

在计算一些角的和时，我们通常的做法是把这些角集中到一个三角形或多边形中来，从而利用三角形内角和或多边形的内角和来解决问题.

二、例 题 精 讲

例 1　如图 18-1，四边形 $ABCD$ 为任意的四边形，求它的内角和.

解　连结 AC，四边形 $ABCD$ 就划分成两个三角形，即△ABC 与△ACD. 因此，四边形 $ABCD$ 的内角和就等于两个三角形内角和的和，而一个三角形的内角和为 180°，所以，四边形的内角和为

$$180° \times 2 = 360°.$$

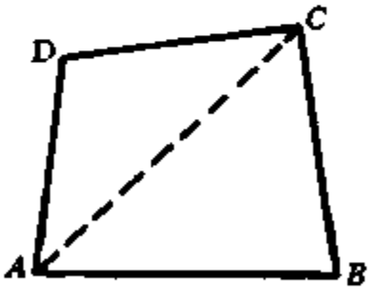


图 18-1

说明　本题通过连结 AC，把一个四边形划分成两个三角形来解决. 这种方法可以推广，即一般地，我们要求 n 边形的内角和，可从它的一个顶点 A_1 出发，连结 A_1A_3，A_1A_4，…，A_1A_{n-1}，将这个 n 边形划分成 $n-2$ 个三角形. 因此，n 边形的内角和为：

$180° \times (n-2)$. （如图 18-2）

这个式子可以作为一个公式来用. 如求 100 边形的内角和，则由上面的公式，得出它的内角和为：

$$180° \times (100-2) = 17\,640°.$$

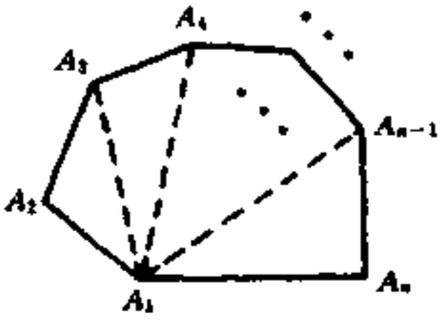


图 18-2

例 2 求证：三角形的外角和等于 360°. 一般地，n 边形的外角和等于 360°.

证明 如图 18-3，$\triangle ABC$ 中，$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 为三个内角，$\angle 4$，$\angle 5$，$\angle 6$ 为三个外角.

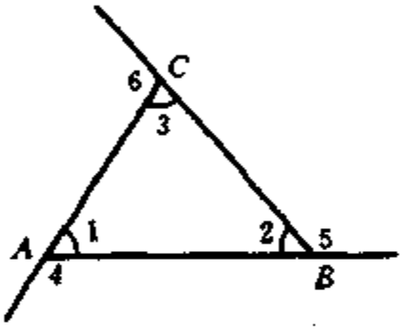


图 18-3

则有

$$\angle 1 + \angle 4 = 180°,$$

$$\angle 2 + \angle 5 = 180°,$$

$$\angle 3 + \angle 6 = 180°.$$

所以，$\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 3 \times 180° - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3)$

$$= 3 \times 180° - 180°$$

$$= 360°.$$

同理，若 $\angle \alpha_1$，$\angle \alpha_2$，…，$\angle \alpha_n$ 是 n 边形的 n 个内角，$\angle \beta_1$，$\angle \beta_2$，…，$\angle \beta_n$ 是它们所对应的 n 个外角，则有

$$\angle \alpha_1 + \angle \beta_1 = 180°,$$

$$\angle \alpha_2 + \angle \beta_2 = 180°,$$

$$\cdots$$

$$\angle \alpha_n + \angle \beta_n = 180°.$$

所以，$\angle \beta_1 + \angle \beta_2 + \cdots + \angle \beta_n = n \times 180° - (\angle \alpha_1 + \angle \alpha_2 + \cdots + \angle \alpha_n)$

$$= n \times 180° - (n-2) \times 180°$$

$$= 360°.$$

说明 多边形的外角和等于 360°. 不论这个多边形有多少条边，这个结论均成立. 即多边形的外角和与边数无关.

与外角有关的性质还有：三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和. 这个性质的证明非常简单，但是这个性质却非常有用，它把许多分散的角集中到一个或几个三角形(或多边形)中来.

例 3 已知一个四边形的第二个内角是第一个内角的 3 倍，第三个内角是第二个内角的一半，第四个内角比第三个内角大 20°，求它的第一个内角.

解 设它的第一个内角为 x，则它的第二个内角为 $3x$，第三个内角为 $\frac{3}{2}x$，第四个内角为 $\frac{3}{2}x+20°$，由四边形的内角和为 360°，知

$$x+3x+\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}x+20°\right)=360°,$$

解之得

$$x=50°.$$

答 它的第一个内角为 50°.

例 4 如图 18-4，在 $\triangle ABC$ 中，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，CD 是 $\angle C$ 的外角 $\angle ACE$ 的平分线，求证：$\angle D=\frac{1}{2}\angle A$.

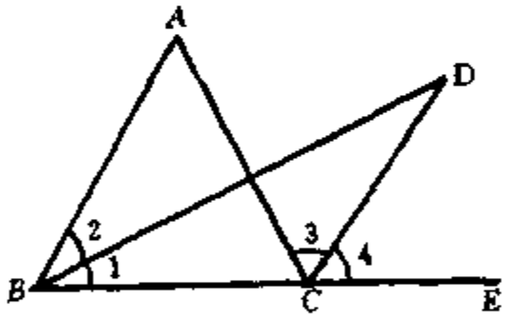


图 18-4

证明 根据三角形外角性质有

$$\angle 3+\angle 4=\angle 1+\angle 2+\angle A,$$

又因为，BD，CD 是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACE$ 的平分线，

所以 $$\angle 1=\angle 2,\ \angle 3=\angle 4.$$

从而 $$2\angle 4=2\angle 1+\angle A,$$

即 $$\angle 4=\angle 1+\frac{1}{2}\angle A. \tag{1}$$

又在 $\triangle BCD$ 中，$\angle 4$ 是一个外角，有

$$\angle 4 = \angle 1 + \angle D, \tag{2}$$

由(1)，(2)即得 $\angle D = \frac{1}{2}\angle A$.

说明 本题反复利用外角的性质，从而简便地解决了问题.

例 5 如图 18-5，在七星形 $ABCDEFG$ 中，求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G$ 的度数.

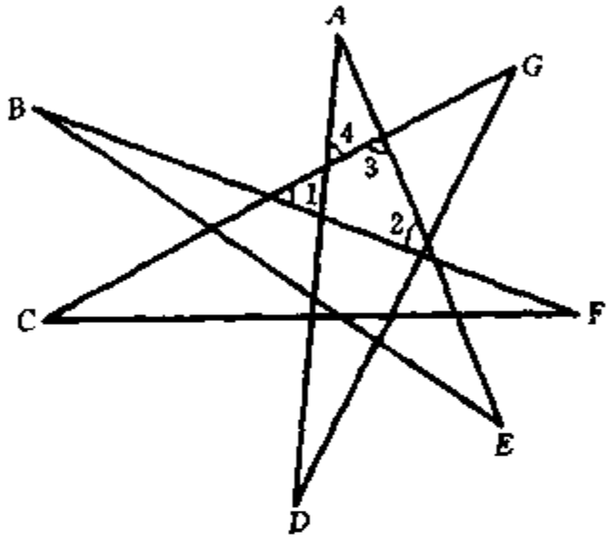


图 18-5

解 由三角形的外角性质，得

$$\angle 1 = \angle C + \angle F,$$

$$\angle 2 = \angle B + \angle E,$$

$$\angle 4 = \angle D + \angle G,$$

$$\angle 3 = \angle 4 + \angle A = \angle D + \angle G + \angle A.$$

从而：

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G$$

$$= \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$$

$$= 180^\circ.$$

说明 本题中，由于所求的 7 个角很分散，直接求它们的和很困难，因此，我们利用三角形的外角性质，把它们集中在一个三角形中，

从而解决问题.

例 6 如图 18-6，BE 平分$\angle ABD$，CF 平分$\angle ACD$，BE 与 CF 相交于 G，若 $\angle BDC = 140°$，$\angle BGC = 100°$，求$\angle A$ 的度数.

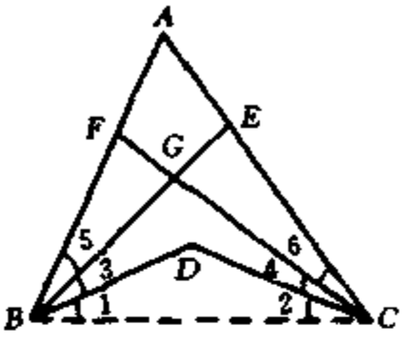


图 18-6

解 连结 BC，则在$\triangle BDC$ 中

$$\angle D + \angle 1 + \angle 2 = 180°,$$

所以 $$\begin{aligned}\angle 1 + \angle 2 &= 180° - \angle D\\ &= 180° - 140°\\ &= 40°.\end{aligned}$$

在$\triangle BGC$ 中，$\angle 1 + \angle 3 + \angle 2 + \angle 4 + \angle BGC = 180°$，

所以 $$\begin{aligned}&\angle 3 + \angle 4\\ &= 180° - \angle BGC - (\angle 1 + \angle 2)\\ &= 180° - 100° - 40° = 40°,\end{aligned}$$

又因为 BE，CF 分别为$\angle ABD$，$\angle ACD$ 的平分线，

所以 $$\angle 3 = \angle 5,\ \angle 6 = \angle 4,$$

从而 $$\angle 5 + \angle 6 = \angle 3 + \angle 4 = 40°.$$

在$\triangle ABC$ 中，$\angle A+\angle 1+\angle 3+\angle 5+\angle 2+\angle 4+\angle 6 = 180°$，

所以 $$\begin{aligned}\angle A &= 180° - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6)\\ &= 180° - (40° + 40° + 40°)\\ &= 60°.\end{aligned}$$

说明 从本题的已知条件，即已知$\angle BDC$ 和$\angle BGC$，发现$\angle BDC$ 和$\angle BGC$ 都不在三角形中，也不是三角形的外角，因此，很自然地想到连结 BC，使这两个角都落在三角形中，然后根据三角形的内角和及其他已知条件，解决问题.

例 7 如图 18-7，已知在$\triangle ABC$中，AD是$\angle BAC$的平分线，CE垂直AD交AD于E，求证：$\angle ACE > \angle B$.

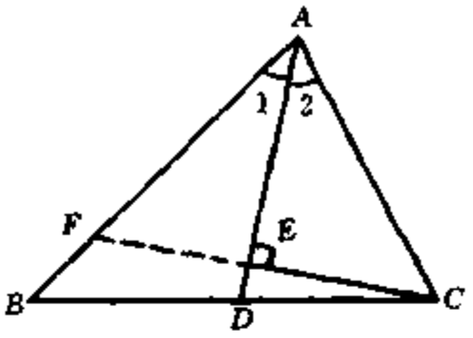


图 18-7

证明 延长CE交AB于F，因为AD是$\angle BAC$的平分线，所以$\angle 1 = \angle 2$，又因为CE垂直AD，所以$\angle AEC = \angle AEF = 90°$.

在$\triangle AEF$中，$\angle AFC = 180° - (\angle 1 + \angle AEF)$，

在$\triangle AEC$中，$\angle ACE = 180° - (\angle 2 + \angle AEC)$，

所以 $$\angle ACE = \angle AFC.$$

又因为在$\triangle BCF$中，$\angle AFC$是它的一个外角，

所以 $$\angle AFC = \angle B + \angle BCF > \angle B,$$

从而 $$\angle ACE > \angle B.$$

说明 利用已知条件，构造$\angle AFC$作为桥梁，一方面它等于$\angle ACE$，另一方面，它又是$\triangle BFC$的一个外角，它应大于不相邻的任一内角，从而解决问题.

例 8 已知锐角三角形(即每个内角都是锐角的三角形)的所有内角的度数都是正整数，且其中最小的内角的度数是最大的内角的度数的$\frac{1}{4}$，求满足此条件的所有锐角三角形的内角度数.

解 设这三角形的最小内角的度数为x，则最大内角的度数为$4x$，设另一个内角的度数为y，由题意，可得

$$\begin{cases} x + 4x + y = 180°, & (1) \\ x \leqslant y \leqslant 4x, & (2) \\ 4x < 90°. & (3) \end{cases}$$

由(1)得 $$y = 180° - 5x, \quad (4)$$

把(4)代入(2)得 $$x \leqslant 180° - 5x \leqslant 4x,$$

即　　$20° \leqslant x \leqslant 30°$,

又由(3)得　　$x < 22.5°$,

所以,此不等式组的解为

$$20° \leqslant x < 22.5°,$$

由 x 是正整数知,x 的取值分别为 20°, 21°, 22°.

(1) 当 $x = 20°$ 时,$4x = 80°$, $y = 180° - (20° + 80°) = 80°$.

(2) 当 $x = 21°$ 时,$4x = 84°$, $y = 180° - (21° + 84°) = 75°$.

(3) 当 $x = 22°$ 时,$4x = 88°$, $y = 180° - (22° + 88°) = 70°$.

所以,满足题意的锐角三角形的内角的度数为:20°, 80°, 80°或 21°, 84°, 75°,或 22°, 88°, 70°.

说明　本题先由题设,得到一个不等式组,以确定其中一个角(最小角)的度数的取值范围,然后根据角度为正整数的条件求解.

在列不等式组时,一些隐含的条件不要忘记,如锐角三角形中,最大角必须小于 90°等.

练　习　题

A　组

1. 计算 10 边形的内角和及外角和.

2. 已知四边形的一个内角是 56°,第二个内角是它的 2 倍,第三个内角比第二个内角小 10°,求第四个内角的度数.

3. 如图 18-8, $\angle A = 80°$, $\angle B$ 的平分线和 $\angle C$ 的外角平分线相交于 D,求 $\angle D$ 的度数.

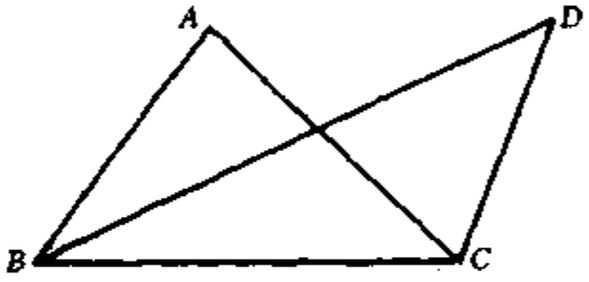


图 18-8

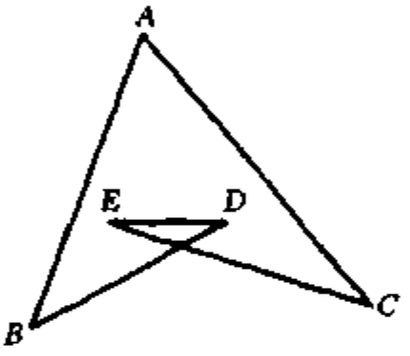


图 18-9

4. 如图 18-9,求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ 的大小.

5. 如图 18-10,求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ 的大小.

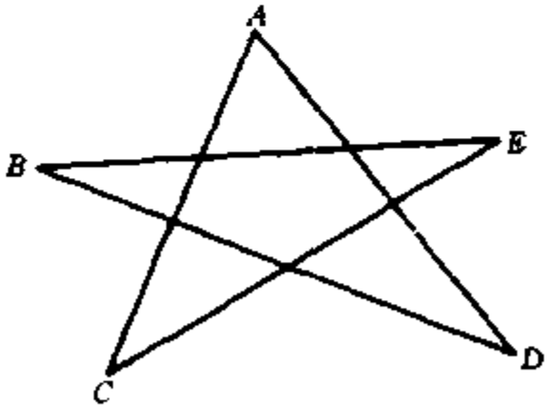


图 18-10

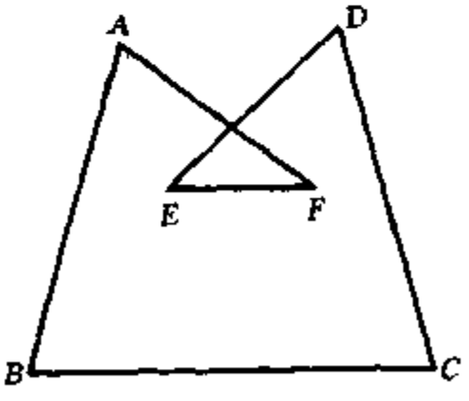


图 18-11

6. 如图 18-11,求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$ 的大小.

7. 如图 18-12，求△ABC 中，$\angle ABC=\angle C$，$BD\perp AC$ 于 D，求证：$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle A$.

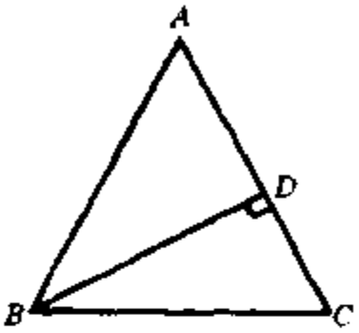


图 18-12

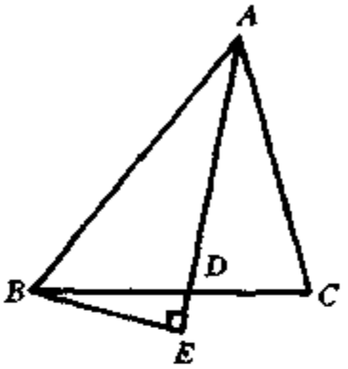


图 18-13

8. 如图 18-13，在△ABC 中，AD 是$\angle BAC$ 的平分线，$BE\perp AD$ 于 E，求证：$\angle ABE<\angle ACB$.

B 组

9. 如图 18-14，△ABC 的$\angle C$ 的外角平分线与 BA 的延长线相交于 D，求证：$\angle BAC>\angle B$.

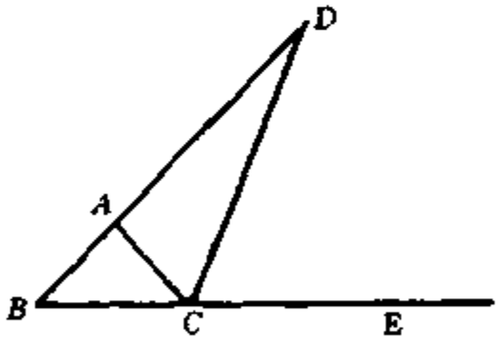


图 18-14

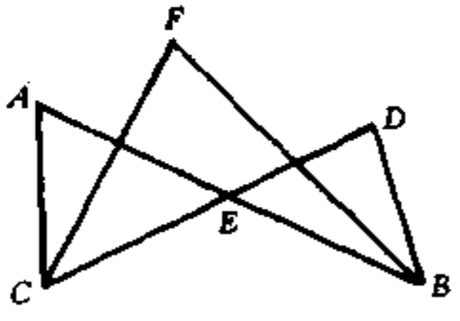


图 18-15

10. 如图 18-15，AB、CD 相交于 E，CF、BF 分别为$\angle ACD$ 和$\angle ABD$ 的平分线，它们相交于 F，求证：$\angle F=\frac{1}{2}(\angle A+\angle D)$.

11. 在一个五边形中，它的第一个内角比第二个内角小 20°，第二个内角比第三个内角小 20°，…，第四个内角比第五个内角小 20°，求它的第三个内角.

12. △ABC 的三个内角$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 满足以下条件：$3\angle A$

$> 5\angle B$，$3\angle C \leqslant 2\angle B$.

(1) 试找出两组符合条件的$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的度数.

(2) 满足条件的三角形是什么三角形？为什么？

测 试 题

1. 求 1 999 边形的内角和及外角和.

2. 若一个五边形的各个内角都相等，求这个五边形的一个内角的度数.

3. 如图 18-16，求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ 的大小.

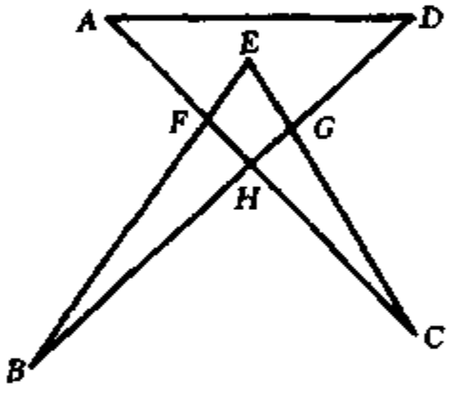


图 18-16

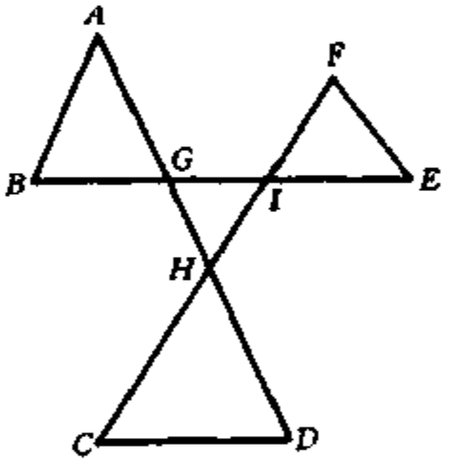


图 18-17

4. 如图 18-17，求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F$ 的大小.

5. 如图 18-18，BE 平分 $\angle ABD$，CF 平分 $\angle ACD$，BE、CF 相交于 G，若 $\angle BDC = 150°$，$\angle BGC = 95°$，求 $\angle A$.

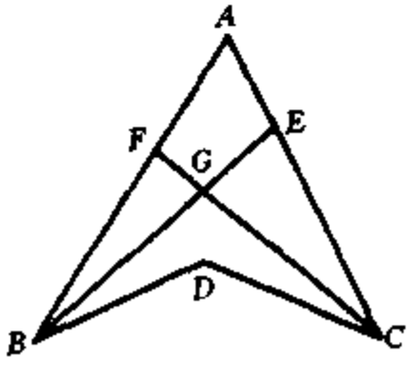


图 18-18

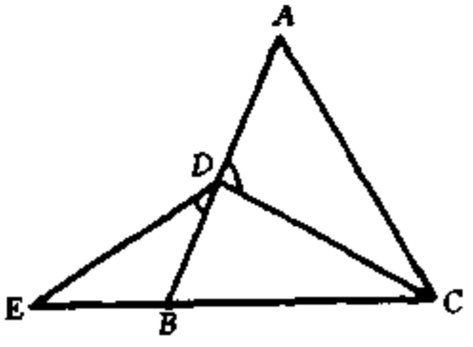


图 18-19

6. 如图 18-19，$\triangle ABC$ 中，D 是 AB 上一点，E 是 CB 延长线上一点，求证：$\angle ADC > \angle BDE$.

第十九讲　相交线和平行线

一、知识要点和基本方法

平面上两条不重合的直线，位置关系只有两种：相交和平行，在平面几何中，相交线和平行线也是最基本的图形.

与相交线有关的知识有：斜线、垂线、垂足、垂线的性质、点到直线的距离等.

与平行线有关的知识有：平行公理，平行线的性质定理及判定定理等.

二、例 题 精 讲

例 1　如图 19-1，$AB \parallel CD$，$AB \parallel EF$，EG 平分$\angle BED$，$\angle B = 45°$，$\angle D = 30°$，求$\angle GEF$ 的大小.

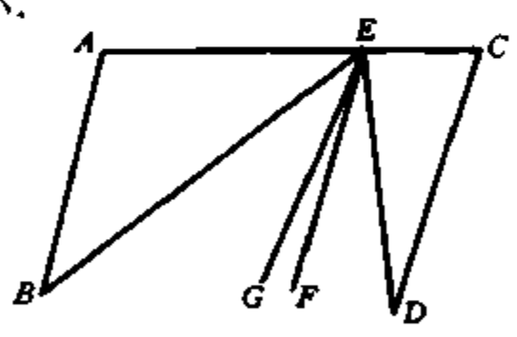


图 19-1

解　因为　$AB \parallel CD$，

$AB \parallel EF$，

所以　$EF \parallel CD$，

所以　$\angle FED = \angle D = 30°$.

又因为　$AB \parallel EF$，所以

$\angle FEB = \angle B = 45°$，

从而　$\angle BED = \angle FED + \angle FEB$

$= 75°$.

因为　EG 平分$\angle BED$，

所以　　$\angle BEG = \frac{1}{2}\angle BED = 37.5°.$

从而　$\angle GEF = \angle BEF - \angle BEG = 45° - 37.5°$

$= 7.5°.$

答　$\angle GEF$ 为 7.5°.

说明　在判定两直线是否平行时，除了一般的判定定理外，我们还经常用到下面两条：

(1) 两条直线同平行于第三条直线，则这两条直线平行.

(2) 若两条直线同垂直于第三条直线，则这两条直线平行.

例 2　如图 19-2，已知 $AB \parallel CD$，E 在 AB 之间，且 $\angle B = 40°$，$\angle D = 20°$，求 $\angle BED$ 的大小.

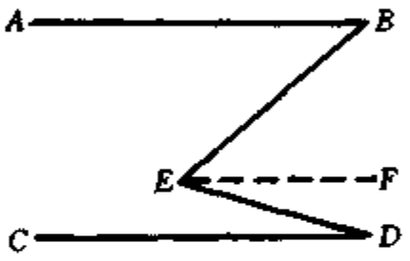


图 19-2

解　过 E 作 $EF \parallel AB$，则 $EF \parallel CD$，

所以　$\angle FEB = \angle B = 40°$，

$\angle DEF = \angle D = 20°$，

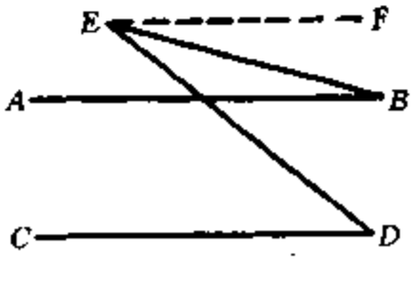
从而　$\angle BED = \angle BEF + \angle DEF = 40° + 20° = 60°.$

说明　本题虽然很简单，但它是一类典型的题目. 如下面几题.

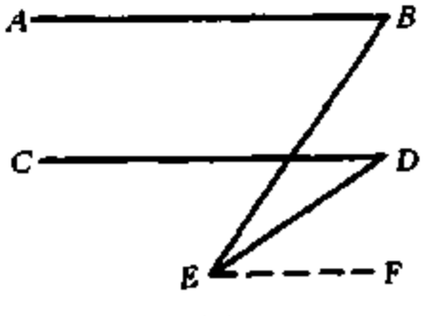
(1) 如图 19-3(1)，$AB \parallel CD$，若 E 在 AB，CD 的外面，同样地，可过 E 点作 $EF \parallel AB$，则

$$\angle BED = \angle FED - \angle FEB = \angle D - \angle B.$$

(2) 如果 E 点在 CD 的下方，则同理可知，$\angle BED = \angle B - \angle D$. (图 19-3(2))



(1)



(2)

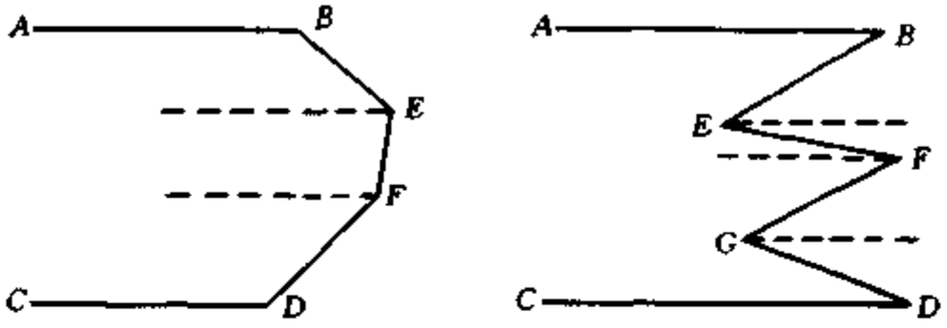


图 19-3

(3) 如图 19-3(3)，$AB \parallel CD$，通过作图中所示的辅助线，不难证明：$\angle B + \angle BEF + \angle DFE + \angle D = 540°$.

(4) 如图 19-3(4)，$AB \parallel CD$，可以用同样的方法证明：

$$\angle B + \angle EFG + \angle D = \angle BEF + \angle DGF.$$

解这一类问题的关键是过中间的那些点，作 AB 的平行线，然后利用平行线的性质来解决问题.

例 3 如图 19-4，E 是 DF 上一点，B 是 AC 上一点，$\angle 1 = \angle 2$，$\angle C = \angle D$，求证：$\angle A = \angle F$.

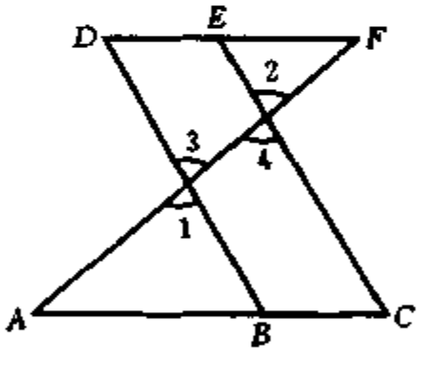


图 19-4

证明 因为 $\angle 1 = \angle 2$，$\angle 1 = \angle 3$，$\angle 2 = \angle 4$，

所以 $\angle 3 = \angle 4$，

从而 $BD \parallel CE$，

$\angle C = \angle ABD$.

又因为 $\angle C = \angle D$，

所以 $\angle ABD = \angle D$，

从而 $AB \parallel DF$，

所以 $\angle A = \angle F$.

说明 本题利用平行线的性质和判定定理来解题.

例 4 如图 19-5，$AB \parallel CD$，AE 平分 $\angle BAC$，CE 平分 $\angle ACD$，求证：$AE \perp CE$.

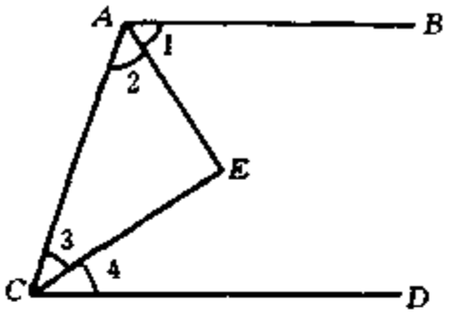


图 19-5

证明 因为 $AB \parallel CD$，

所以 $\angle BAC + \angle DCA = 180°$.

又因为 AE 平分 $\angle BAC$，CE 平分 $\angle ACD$，

所以 $$\angle 2 = \frac{1}{2}\angle BAC,\ \angle 3 = \frac{1}{2}\angle ACD.$$

从而 $$\angle 2 + \angle 3 = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ACD) = 90°,$$

$$\angle E = 180° - (\angle 2 + \angle 3) = 90°,$$

即 $$AC \perp CE.$$

例 5 我们知道，两条直线相交，有且只有一个交点，三条直线相交，最多只有三个交点，那么，四条直线相交，最多有多少个交点呢？5 条，6 条的情况又怎样？

解 由图 19-6(4)，我们可以发现，4 条直线相交，最多可有 6 个交点.

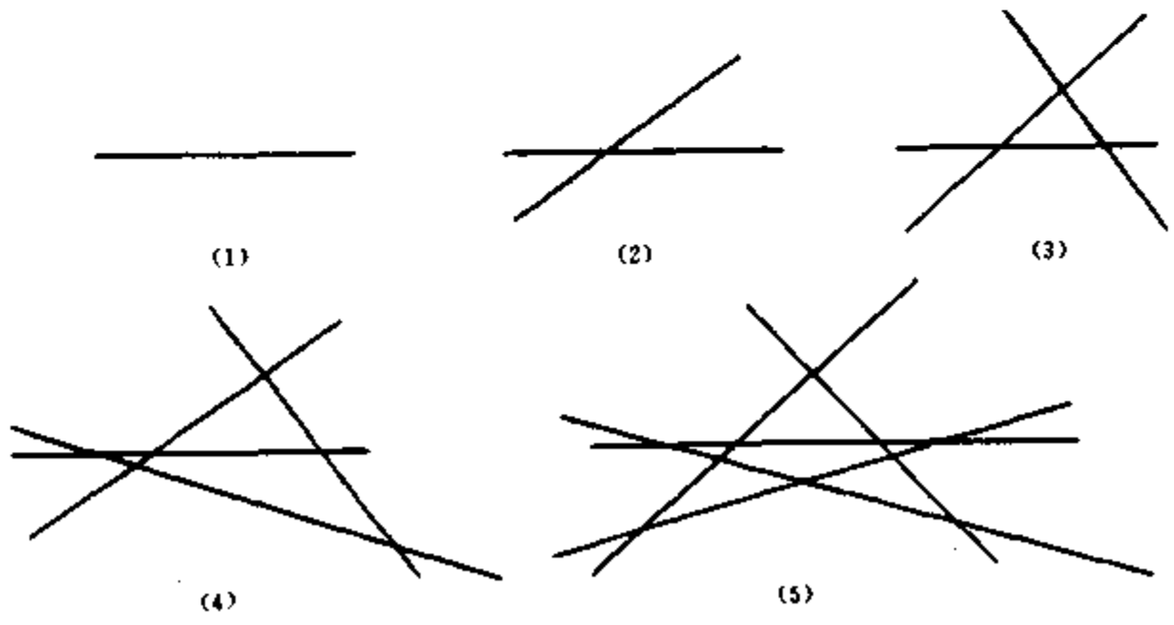


图 19-6

为了一般地解决问题，我们一步一步看交点数量与直线数量的关系.

首先要说明，要使交点的个数尽可能的多，不能出现三条或三条以上直线共点的情况，下设所有直线都是两两相交并且没有三条直线共点.

两条直线相交，有一个交点，这个交点我们可以这样得来：先在平面上画一条直线，再画一条直线，由于此时平面上已经有一条直线，因此，要多出一个交点来.（从图(1)—图(2)）

三条直线的情形：若平面上已有两条直线，再添一条直线，则这条直线和原来平面上的两条直线各有一个交点，即又多出 2 个交点，所以有 1 + 2 个交点.（图(2)—图(3)）

同理，4 条直线的情形为在原来三条直线的基础上添加一条直线，共多出 3 个交点，因此，其交点总数为 1 + 2 + 3 个.（图(3)—图(4)）

由此，可以得出规律，5 条直线两两相交的交点数为 1 + 2 + 3 + 4 = 10 个.

…

一般地，n 条直线两两相交，其交点数为 $1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ 个.

例 6 一条直线分平面为两个部分，二条直线最多分平面为四个部分，那么，5 条直线最多分平面为多少个部分？一般地，n 条直线最多分平面为多少个部分？

解 与例 5 类似，我们从一条直线开始，寻找其规律.

从图 19-6(1)到图 19-6(2)，我们发现图中多了一个交点，而平面被多分为 2 个部分，即为 2 + 2 个部分.

从图 19-6(2)到图 19-6(3)，我们发现图中多了二个交点，而平面被多分为 3 个部分，即为 (2 + 2) + 3 = 7 个部分.

从图 19-6(3)到图 19-6(4)，我们发现图中多了三个交点，而平面被多分为 4 个部分，即 (2 + 2 + 3) + 4 = 11 个部分.

于是，我们发现，每多 m 个交点，则平面被多分出 m + 1 个部

分. 因此，我们得到，一般地，n 条直线最多可分平面为

$$2+2+3+4+\cdots+n=1+\frac{n(n+1)}{2}\text{ 个部分.}$$

所以，当平面上有 5 条直线时，最多可分平面为：$1+\frac{5\times 6}{2}=16$ 个部分.

说明 例 5，例 6 是两个找规律的问题. 需要在仔细观察的基础上，由简及繁，深入思考，从中发现规律. 这就是人类发现规律的重要途径.

例 7 7 条直线两两相交，试证明：在所有的交角中，至少有一个角小于 26°.

证明 在平面上任取一点 O，过 O 点分别作这 7 条直线的平行线 l_1'，l_2'，l_3'，l_4'、l_5'，l_6'，l_7'，则由平行线的性质知，l_1'，l_2'，l_3'，l_4'，l_5'，l_6'，l_7' 之间互成的角与原来的 7 条直线 l_1，l_2，…，l_7 之间互成的角相等.

现在我们只考察 l_1' 与 l_2'，l_2' 与 l_3'，…，l_7' 与 l_1' 所成的角，由图 19-7，不难发现这 7 个角的和为一个平角，即 180°.

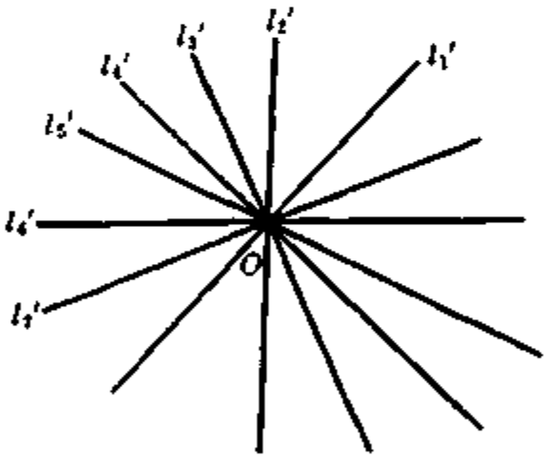


图 19-7

假设这七个角没有一个小于 26°，则这 7 个角的和至少为：$26°\times 7=182°$，这是不可能的. 因此，这七个角中至少有一个小于 26°，不妨设为 l_1' 与 l_2' 的交角小于 26°，则原来的直线 l_1 和 l_2 所成的角小于 26°.

说明 通过平移，可以把原来分散的直线集中交于同一点，从而解决问题.

练　习　题

A　组

1. 如图 19-8，$AB \parallel CD$，BE 和 DE 相交于 E，证明：$\angle ABE = \angle D + \angle E$.

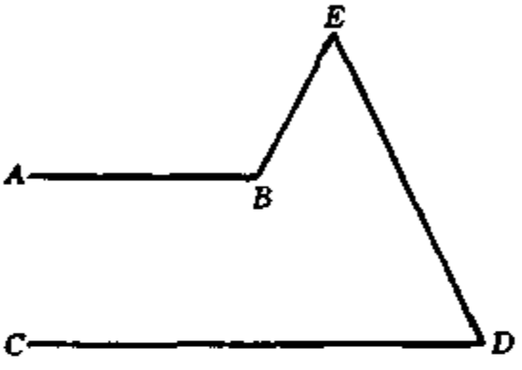


图 19-8

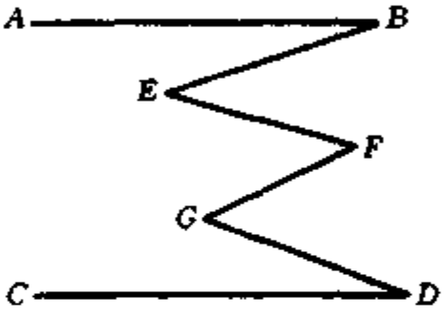


图 19-9

2. 如图 19-9，$AB \parallel CD$，证明：$\angle B + \angle F + \angle D = \angle E + \angle G$.

3. 如图 19-10，$\angle ABC + \angle BCD + \angle EDC = 360°$，求证：$AB \parallel ED$.

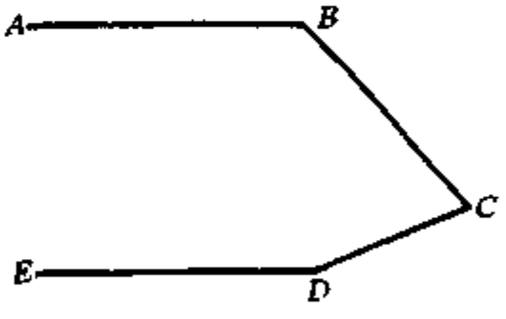


图 19-10

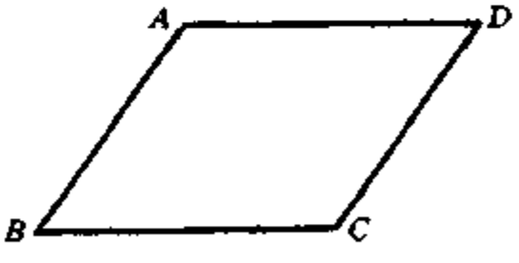


图 19-11

4. 如图 19-11，$AB \parallel CD$，$\angle A = \angle C$，证明：

(1) $AD \parallel BC$.

(2) $\angle B = \angle D$.

5. 如图 19-12，$AB \parallel CD$，$\angle 1 = \angle 2$，$\angle EFD = 70°$，求 $\angle D$ 的

度数.

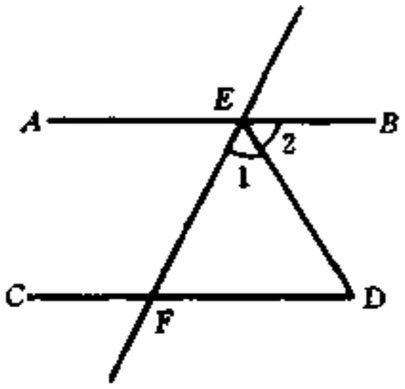


图 19-12

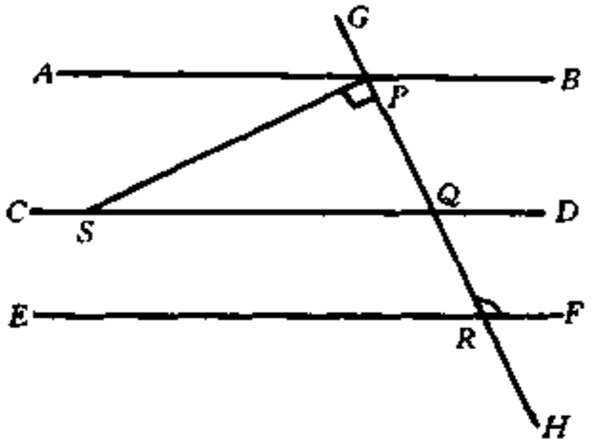


图 19-13

6. 如图 19-13,已知 $AB \parallel CD \parallel EF$, $PS \perp GH$ 于 P,当 $\angle FRG = 110°$ 时,求 $\angle PSQ$ 的度数.

7. 如图 19-14, $\angle ABE + \angle DEB = 180°$, $\angle 1 = \angle 2$, 求证: $\angle F = \angle G$.

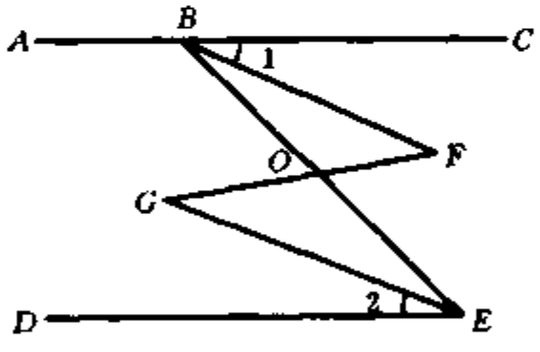


图 19-14

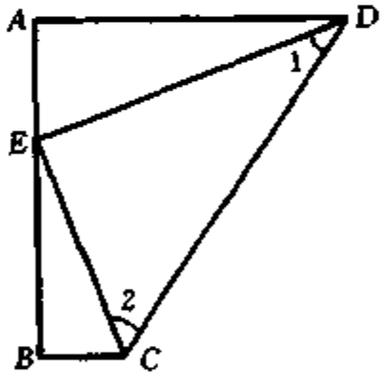


图 19-15

B 组

8. 如图 19-15,已知 $DA \perp AB$, DE 平分 $\angle ADC$, CE 平分 $\angle BCD$, $\angle 1 + \angle 2 = 90°$, 求证: $BC \perp AB$.

9. 平面上 10 条直线,最多有多少个交点?

10. 平面上 10 条直线,最多可以将平面分成几个部分?

11. 平面上有 8 条直线两两相交,试证明在所有的交角中至少有一个角小于 23°.

测 试 题

1. 如图 19-16，$OA \perp OB$，$OC \perp OD$，$\angle BOC - \angle AOD = 40°$，求 $\angle BOC$ 与 $\angle AOD$ 的大小.

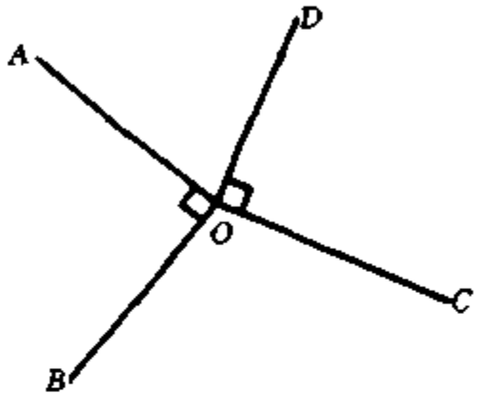


图 19-16

2. 判断下列命题是否正确.

(1) 两直线被第三条直线所截，同位角相等，内错角不相等.

(2) 两直线被第三条直线所截，同旁内角不互补，同位角相等.

(3) 两直线被第三条直线所截，内错角相等，则同旁内角一定互补.

(4) 平面上 4 条直线必定有 6 个交点.

(5) 平面上 3 条直线，最多可分平面为 7 个部分.

3. 如图 19-17，$AB \parallel CD$，求证 $\angle B + C + \angle E + \angle F = 540°$.

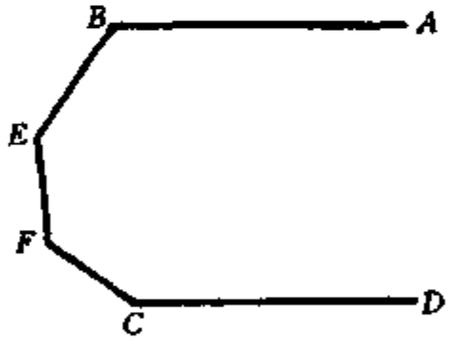


图 19-17

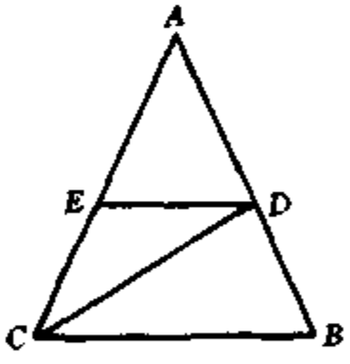


图 19-18

4. 如图 19-18，在 $\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$，CD 是 $\angle ACB$ 的平分线，$\angle B = 70°$，$\angle A = 56°$，求 $\angle BDC$ 的度数.

5. 平面上有 11 条直线互不平行，试证明：在所有的交角中，至少有一个角小于 17°.

第二十讲　面　　积

一、知识要点和基本方法

在实际生产、生活和学习中，我们经常会遇到一些求图形面积的问题. 虽然这些图形千姿百态，各式各样，但它们大多可以经过割补或等积变换化为我们很熟悉的基本图形(如三角形，长方形，正方形，梯形，圆，扇形，弓形等). 这些基本图形的面积计算公式大家都很熟悉，这里就不再一一列出了.

二、例 题 精 讲

例 1　图20-1 是由三个等边三角形$\triangle ABE$，$\triangle ADE$ 和$\triangle CDE$ 组成的等腰梯形，它的面积为 1. F 为 AB 的中点. 求$\triangle CEF$ 的面积.

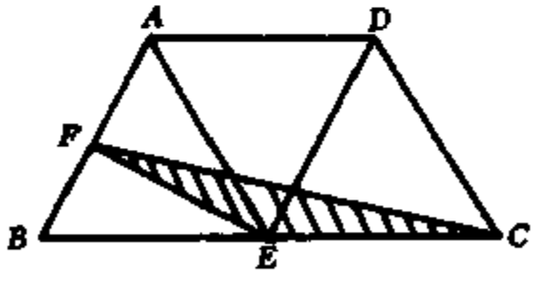


图 20-1

解　我们知道，三角形的面积等于 $\frac{1}{2}$(底 × 高). 本题中，若想直接用此公式计算，则难度比较大. 现在我们回到三角形的面积公式，发现若两个三角形是同底等高，或同高等底或等高等底，则这两个三角形的面积必相等. 由此，我们得到本题的一种解法.

由$\triangle ABE$，$\triangle ADE$ 和$\triangle CDE$ 为等边三角形，有 $BE = AE = DE$

$= EC$，因此，$\triangle BEF$ 和 $\triangle CEF$ 是同高等底的三角形（分别以 BE，CE 为底）. 只要求出 $\triangle BEF$ 的面积即可.

由 F 为 AB 的中点，知 $AF = BF$，所以，$\triangle AEF$ 和 $\triangle BEF$ 也为同高等底的三角形，它们的面积相等，而 $\triangle ABE$ 的面积为这两个三角形面积的和，因此，$\triangle BEF$ 的面积为 $\triangle ABE$ 面积的一半.

由等腰梯形 $ABCD$ 的面积为 1，知 $\triangle ABE$ 的面积为它的 $\frac{1}{3}$，即为 $\frac{1}{3}$. 所以，$\triangle BEF$ 的面积为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

因此，$\triangle CEF$ 的面积为 $\frac{1}{6}$.

说明 本题所用的方法是等积变换的方法. 即如果所要求的图形面积不容易求得，我们可以去求与它面积相等的图形的面积. 这种方法在求面积时经常使用.

另外，从本题中，我们知道，若 D 为 BC 的中点，则 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的面积都相等，即 AD 将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分（图 20-2）. 同理，若 D，E 是 BC 的三等分点，则 $\triangle ABD$，$\triangle ADE$，$\triangle AEC$ 的面积相等，即 AD，AE 将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的三个部分（图 20-3）. 用同样的方法，我们可以将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的 n 等分，只要将 BC n 等分，设 D_1，D_2，…，D_{n-1} 是 n 等分点，连结 AD_1，AD_2，…，AD_{n-1} 即可.

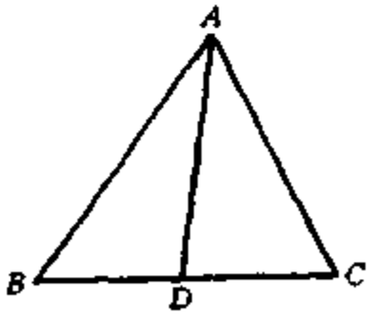


图 20-2

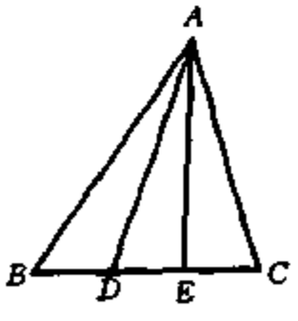
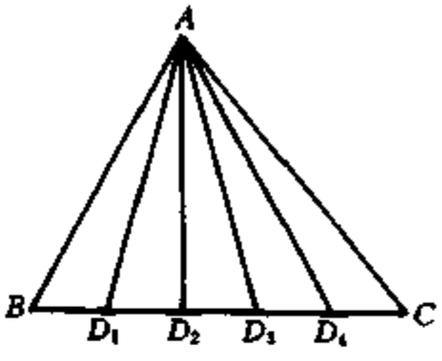


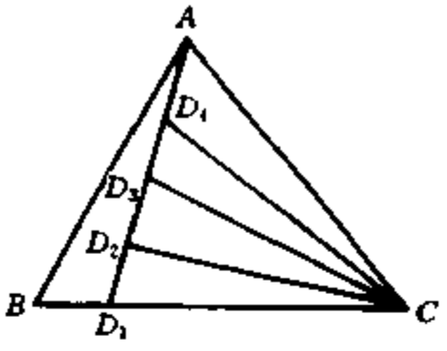
图 20-3

例 2 请用三种不同的分法将任意三角形分成面积相等的五个小三角形.

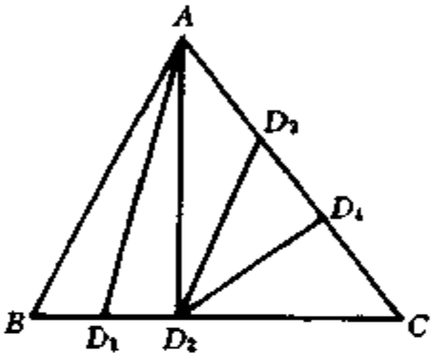
解 由上面的讨论，我们给出下面三种分法.



(1)



(2)



(3)

图 20-4

图(1)中，D_1，D_2，D_3，D_4 为 BC 的五等分点；图(2)中，D_1 为 BC 的一个五等分点，D_2，D_3，D_4 为 AD_1 的四等分点；图(3)中，D_1，D_2 为 BC 的两个五等分点，D_3，D_4 为 AC 的三等分点.

想一想，你还有其他的分法吗？

实际上，上面这种划分三角形的方法还可以推广成以一定的比例分三角形为 n 部分.

例 3 把任意三角形分成三个小三角形，使它们的面积比为 1∶2∶3.

解 如图 20-5，取 D、E 为 BC 上两点，且 $BD∶DE∶EC=1∶2∶3$，连结 AD，AE，则 $\triangle ABD$，$\triangle ADE$，$\triangle AEC$ 的面积之比即为 1∶2∶3.

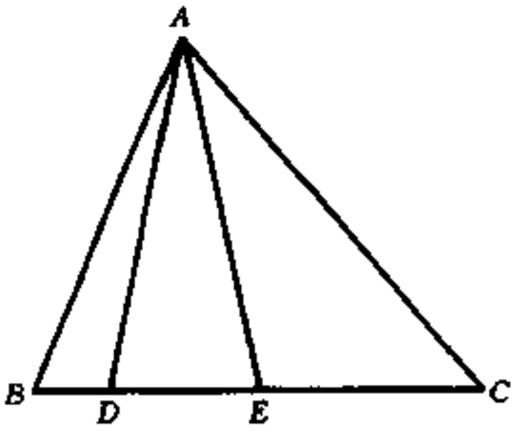


图 20-5

这是因为这三个三角形有一

条高是相同的，对应这条高的底边分别为 BD、DE 和 EC，由三角形面积计算公式，这三个三角形的面积之比等于这三个三角形的底边 BD、DE 和 EC 之比，即为 $1:2:3$.

说明 由例 3 知，如图 20-5，若 $BD:DE:EC=a:b:c$，则 $\triangle ABD$、$\triangle ADE$、$\triangle AEC$ 的面积之比也为 $a:b:c$. 反过来，在图 20-5 中，若 $\triangle ABD$、$\triangle ADE$、$\triangle AEC$ 的面积之比为 $a:b:c$，则 $BD:DE:EC=a:b:c$. 请同学们自己证明这个结论.

例 4 如图 20-6，D 在 BC 上，E 在 AD 上，若 $\triangle ABE$，$\triangle BDE$，$\triangle CDE$ 的面积分别为：16，7，5，求 $\triangle AEC$ 的面积.

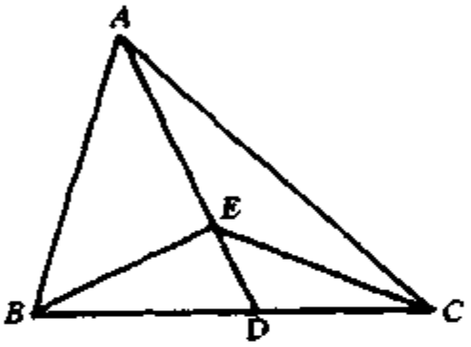


图 20-6

解 由上面的讨论，我们知：$\triangle ABE$ 和 $\triangle BDE$ 的面积之比与 AE 和 DE 的长度之比相同，即

$$AE:DE=16:7.$$

同样地，$\triangle AEC$ 与 $\triangle CDE$ 的面积之比也与 AE 和 DE 的长度之比相同，从而

$$\triangle AEC \text{ 的面积}:5=AE:DE=16:7.$$

从而

$$\triangle AEC \text{ 的面积}=\frac{5\times 16}{7}=\frac{80}{7}.$$

答 $\triangle AEC$ 的面积为 $\frac{80}{7}$.

三角形的面积相等除了同高等底的情形外，还有同底等高的情形，此时，一般和平行线联系在一起. 我们知道，平行线间的距离处处相等，如图 20-7，若 $AB\parallel CD$，AH 为 $\triangle ACD$ 的 CD 边上的高，BI 为 $\triangle BCD$ 的 CD 边上的高，则 $AH=BI$. 即 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BCD$ 的公共边 CD 上的高相等，由此可得，这两个三角形的面积相等.

即有：如果两个三角形有公共的底边且这边所对的第三个顶点所在的直线与这个底边平行，那么这两个三角形的面积一定相等.

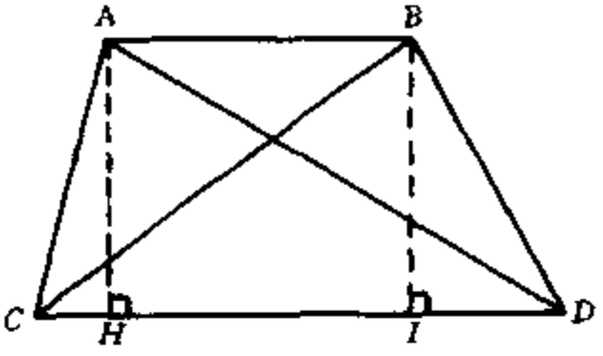


图 20-7

由此，你能判定图 20-7 中$\triangle ABC$与$\triangle ABD$的面积相等吗？

例 5 如图 20-8，平行四边形 $ABCD$ 中，$EF \parallel AC$ 分别交 CD、AD 于 E、F. 连结 AE、BE、BF、CF. 问与$\triangle BCE$面积相等的三角形还有几个？分别是哪几个？

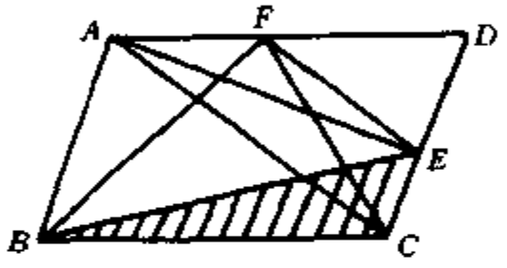


图 20-8

解 由已知条件，知 $AB \parallel CD$，$AD \parallel BC$，$EF \parallel AC$，我们利用刚才讨论的在平行线间的同底等高的三角形等积来找等积三角形.

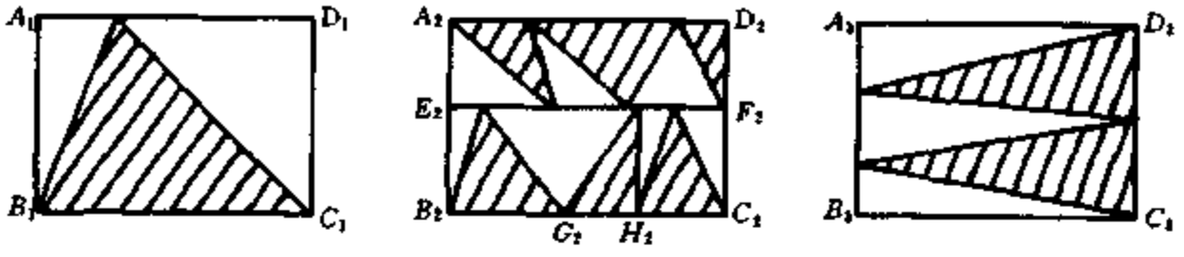
先看与$\triangle BEC$同底的三角形. 若以 BC 为底，这样的三角形还有$\triangle ABC$，$\triangle BFC$，这两个三角形显然与$\triangle BEC$不等积；以 BE 为底的三角形还有$\triangle ABE$，$\triangle BEF$，它们与$\triangle BEC$也不等积；以 EC 为底的三角形还有$\triangle AEC$，$\triangle FEC$，由 $AB \parallel CE$ 知$\triangle AEC$与$\triangle BEC$的面积相等.

下面找与$\triangle AEC$等积的三角形. 用同样的方法，由 $EF \parallel AC$ 得$\triangle AEC$与$\triangle AFC$等积.

再找与$\triangle AFC$等积的三角形，同样地，由 $AF \parallel BC$ 得$\triangle AFC$与$\triangle AFB$等积.

除此之外，不能找到与$\triangle AFB$等积的三角形. 从而，与$\triangle BEC$等积的三角形有三个，它们分别为：$\triangle AEC$，$\triangle AFC$ 和$\triangle ABF$.

例 6 如图 20-9，是三个形状和大小都相同的长方形，图(2)中 $E_2F_2 \parallel A_2D_2$，若图(1)，图(2)，图(3)中阴影部分的面积分别为 a、b，c，求 a，b，c 的大小关系.



(1) (2) (3)

图 20-9

解 a、b、c 三者大小相等，都等于大长方形面积的一半，设大长方形的面积为 S.

图(1)中，由三角形面积公式立即得 $a = \frac{1}{2}S$.

图(2)中，长方形 $E_2B_2C_2F_2$ 中的阴影部分的面积为：$\frac{1}{2} \cdot E_2B_2 \cdot B_2G_2 + \frac{1}{2} \cdot E_2B_2 \cdot G_2H_2 + \frac{1}{2}E_2B_2 \cdot H_2C_2 = \frac{1}{2}E_2B_2 \cdot (B_2G_2 + G_2H_2 + H_2C_2) = \frac{1}{2}E_2B_2 \cdot B_2C_2$.

同理，在长方形 $A_2E_2F_2D_2$ 中阴影部分的面积为 $\frac{1}{2} \cdot A_2E_2 \cdot A_2D_2 = \frac{1}{2}A_2E_2 \cdot B_2C_2$.

从而，图(2)中阴影部分面积

$$b = \frac{1}{2}E_2B_2 \cdot B_2C_2 + \frac{1}{2}A_2E_2 \cdot B_2C_2$$

$$= \frac{1}{2}B_2C_2 \cdot (E_2B_2 + A_2E_2)$$

$$= \frac{1}{2}B_2C_2 \cdot A_2B_2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot S.$$

图(3)中，用和图(2)一样的方法，可得

$$c = \frac{1}{2}S.$$

所以 $$a = b = c = \frac{1}{2}S.$$

例 7 如图 20-10，长方形 $ABCD$，$EH \parallel FG \parallel AD$，交 AB、CD 于 E、F、H、G 四点，连结 AC 交 EH、FG 于 M、N，若 $EF = \frac{1}{2}AB$，试证明，梯形 $EMNF$ 的面积等于梯形 $AMHD$ 与 $\triangle CGN$ 的面积之和.

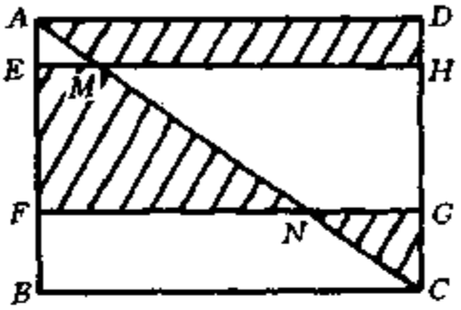


图 20-10

证明 由图 20-10，

$\triangle CGN$ 的面积 + 梯形 $AMHD$ + 梯形 $NGHM$ 的面积

= $\triangle ACD$ 的面积

= 长方形 $ABCD$ 面积的一半.

梯形 $EMNF$ 的面积 + 梯形 $NGHM$ 的面积

= 长方形 $EFGH$ 的面积

= 长方形 $ABCD$ 面积的一半(因为 $EF = \frac{1}{2}AB$).

所以

梯形 $EMNF$ 的面积 + 梯形 $NGHM$ 的面积

= 梯形 $AMHD$ 的面积 + $\triangle CGN$ 的面积 + 梯形 $NGHM$ 的面积，

从而 梯形 $EMNF$ 的面积

= 梯形 $AMHD$ 的面积 + $\triangle CGN$ 的面积.

说明 本题直接用面积公式计算比较麻烦，我们通过图形割补的方法来解决.

例 8 如图 20-11，从一个正方形的边上截去一条宽为 1cm 的长方形条，剩下的部分还是一个长方形，它的面积为 $6cm^2$，问截去的长方形的面积是多少？

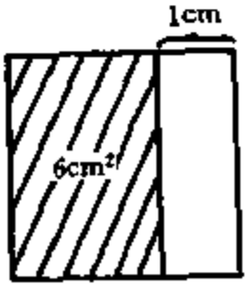


图 20-11

解 本题直接去求比较困难(需要解二次方程),我们还是采取割补法来求解.

我们用四块与图 20-11 中阴影部分完全一样的长方形拼成如图 20-12 的大正方形.由于每个长方形的宽都比长小 1cm,因此,图 20-12 中间是一个边长为 1cm 的小正方形,因此,所拼得的大正方形的面积为

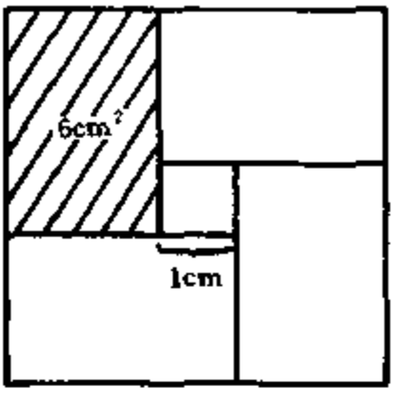


图 20-12

$$4 \times 6 + 1 \times 1 = 25\text{cm}^2,$$

这说明,大正方形的边长为 5cm.所以,对于阴影部分的长方形,有:

$$\text{长} + \text{宽} = 5 \quad \text{且} \quad \text{长} - \text{宽} = 1,$$

从而解得其长为 3cm,宽为 2cm.

这个长也是截去的长方形的长,所以,截去的长方形的面积为:

$$1 \times 3 = 3\text{cm}^2.$$

答 截去长方形的面积为 3cm^2.

本讲讨论与面积有关的问题,细心的同学发现我们没有讨论与圆(或圆弧)有关的图形.实际上,在解决与圆有关图形的面积问题时,其基本思路还是一样的,即设法通过等积变换和割补等方法,化原图形为基本图形,然后利用基本图形的面积公式求解.限于篇幅,我们不再讨论其具体情况了.

练　习　题

A　组

1. 如图 20-13，证明梯形 $ABCD$ 中，$\triangle AOB$ 的面积等于 $\triangle DOC$ 的面积.

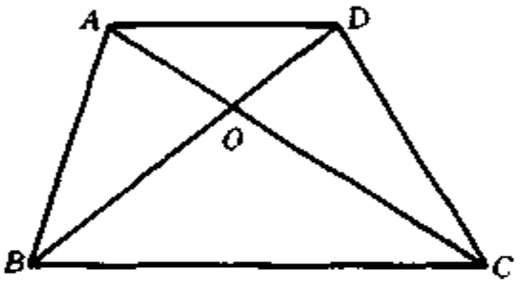


图 20-13

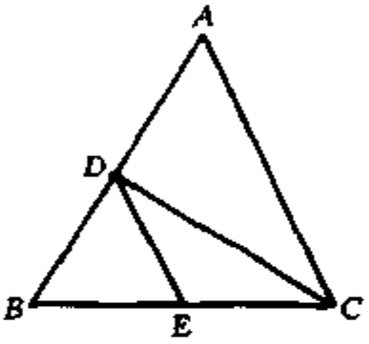


图 20-14

2. 如图 20-14，$\triangle ABC$ 中，D、E 分别为 AB，BC 的中点，连 DE、DC，若 $\triangle ABC$ 的面积为 1，求 $\triangle CDE$ 的面积.

3. 试用两种不同的方法分任意三角形为面积相等的三个小三角形.

4. 把任意三角形分成三个小三角形，使其面积比为 2∶3∶4.

5. 如图 20-15，若 $\triangle ABE$、$\triangle BDE$、$\triangle ACD$ 的面积分别为 6、9、10，求 $\triangle ACE$ 的面积.

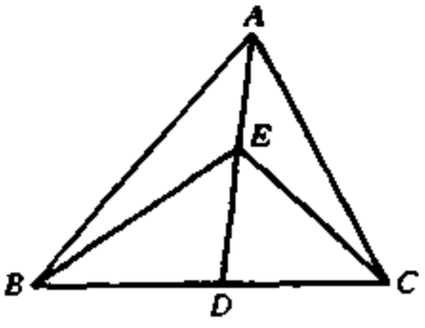


图 20-15

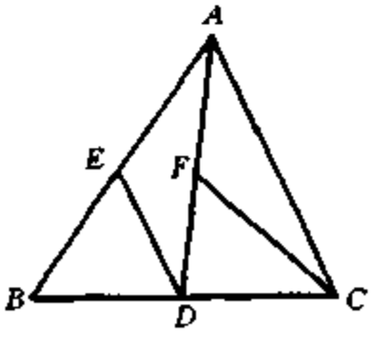


图 20-16

6. 如图 20-16，在 $\triangle ABC$ 中，D、E、F 分别为 BC、AB、AD 的

中点，图中与$\triangle AED$面积相等的三角形有哪些？

7. 如图 20-17，长方形 $ABCD$ 的长为 9，宽为 6，E、F 分别在 BC、CD 上，连 AE，AF，EF，若$\triangle ABE$、$\triangle ADF$ 和四边形 $AECF$ 的面积彼此相等，求$\triangle AEF$ 的面积.

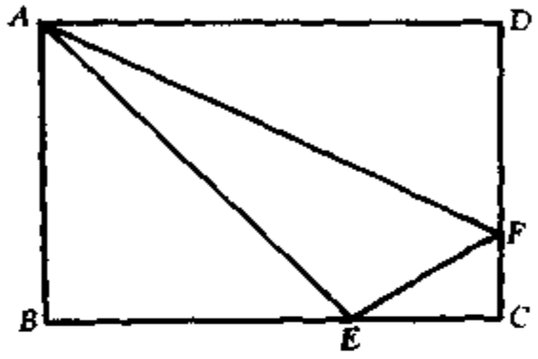


图 20-17

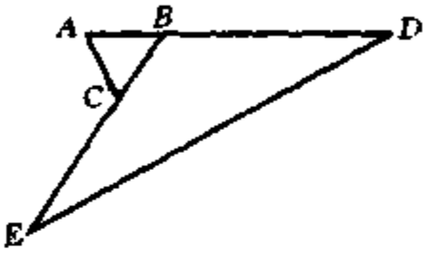


图 20-18

8. 如图 20-18，$\triangle ABC$ 的面积为 1，延长 AB 到 D，使 $BD = 3AB$，延长 BC 到 E，使 $CE = 2BC$，求$\triangle BDE$ 的面积.

B 组

9. 如图 20-19，$\triangle ABC$ 的面积为 1. 分别延长 AB、BC、CA 到 D、E、F，使 $AB = BD$，$BC = CE$，$CA = AF$. 连 DE、EF、FD. 求 $\triangle DEF$ 的面积.

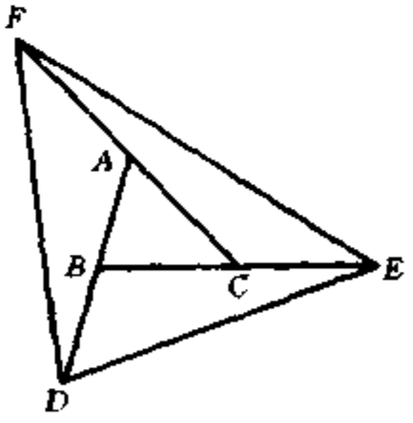


图 20-19

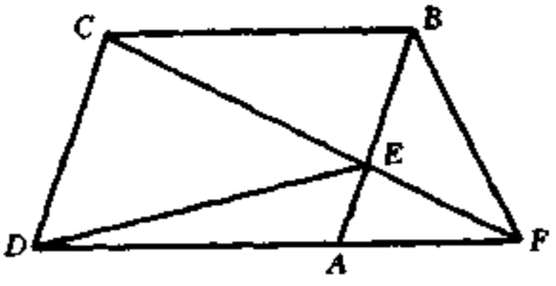


图 20-20

10. 如图 20-20，平行四边形 $ABCD$，F 在 DA 的延长线上，CF 与 AB 相交于 E，连结 DE. 求证：$\triangle ADE$ 与$\triangle BEF$ 面积相等.

11. 证明：在边长为 1 的单位正方形内的任意三角形的面积不

超过$\frac{1}{2}$.

12. 如图 20-21，在一个给定的等腰直角三角形中作内接正方形可以有两种方法(图(1)与图(2))，如果按图(1)作出的正方形面积是441，问按图(2)作出的内接正方形的面积是多少？

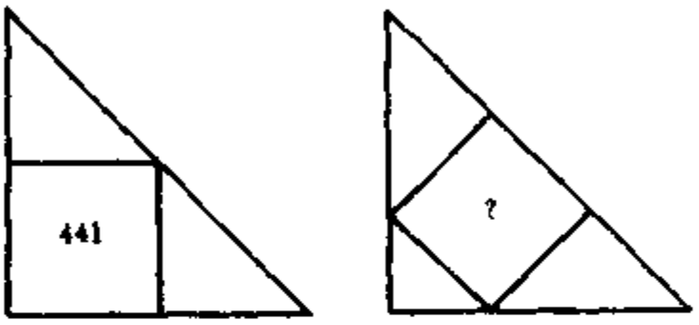


图 20-21

测　试　题

1. 请用两种不同的方法分任意三角形为四个面积相等的小三角形.

2. 如图 20-22，梯形 $ABCD$ 中，AC、BD 相交于 O，若$\triangle ABC$和$\triangle BOC$ 的面积分别为 8 与 5，试求$\triangle COD$ 的面积.

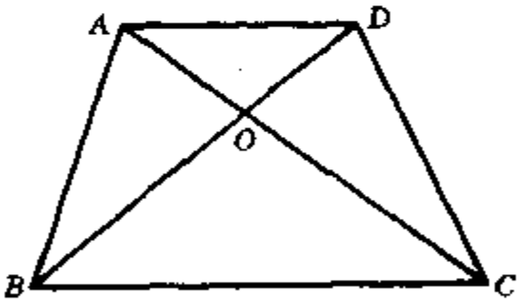


图 20-22

3. 如图 20-23，$\triangle ABC$ 的面积为 1，延长 AB 到 E，使 $BE = 2AB$，延长 BC 到 D，使 $DC = BC$. 连 AD、DE，求$\triangle ADE$ 的面积.

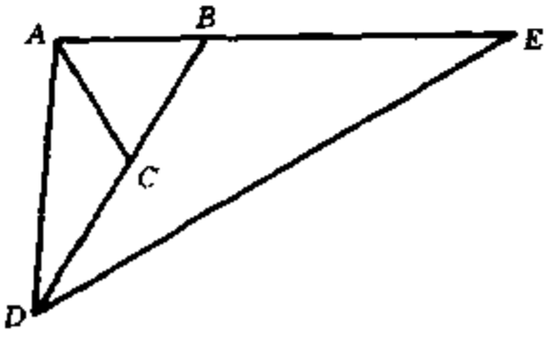


图 20-23

4. 如图 20-24，从正方形上截去一个宽为 2 的小长方形，剩余部分的长方形面积为 8，问：截去的小长方形的面积是多少？

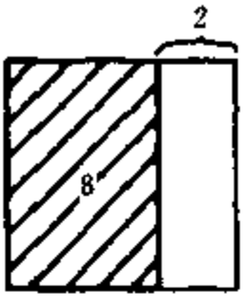


图 20-24

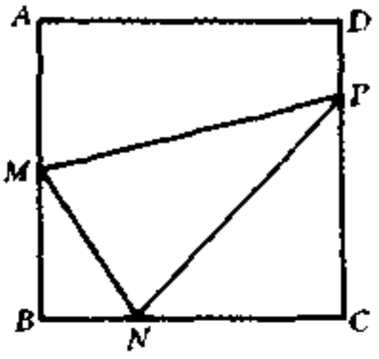


图 20-25

5. 如图 20-25，在单位正方形 $ABCD$ 中，M 是 AB 的中点，$BN=\frac{1}{3}BC$，$DP=\frac{1}{4}DC$，问$\triangle PMN$ 的面积是多少？

6. 如图 20-26，图中每一个小长方形的面积都是 1，则阴影部分的面积为多少？

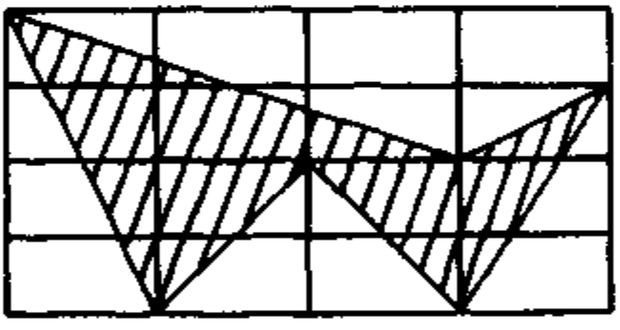


图 20-26

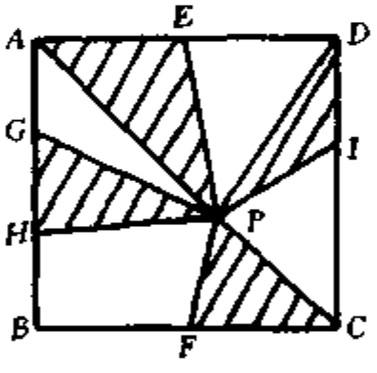


图 20-27

7. 如图 20-27，正方形 $ABCD$ 的边长为 12，E、F 分别为 AD、BC 的中点，G、H 为 AB 的三等分点，I 为 CD 的一个三等分点，P 为正方形 $ABCD$ 内任意一点，求图中阴影部分的面积.

综合篇

第二十一讲　整　　除

一、知识要点和基本方法

在数论中，整数的整除问题占有重要的地位，在各级数学竞赛中经常出现这一类的问题. 我们把有关整除的必要的基础知识整理如下：

对于整数 a（本讲字母均表示整数）和不为零的整数 b，我们有带余除法：$a = bq + r$，$(0 \leqslant r < b)$. 其中 q 称为商，r 称为余数. 特别地，若 $r = 0$，即 $a = bq$，则称 a 被 b 整除或称 b 整除 a，记为 $b|a$；若 $r \neq 0$，则称 b 不整除 a，记为 $b \nmid a$. 若 $b|a$，我们也称 a 是 b 的倍数，b 是 a 的约数（或因数）.

整除有下面的基本性质：

(1) 若 $a|b$，$b|c$，则 $a|c$；

(2) 若 $a|b$，k 为整数，则 $a|kb$；

(3) 若 $a|bc$，且 a 与 c 互质，则 $a|b$；特别地，

若质数 $p|bc$，则必有 $p|b$ 或 $p|c$；

(4) 若 $a|b$，$a|c$，则 $a|(b \pm c)$；

(5) 若 $b|a$，$c|a$，且 b 与 c 互质，则 $bc|a$.

二、例题精讲

例 1　在 100 以内同时被 2、3、5 整除的正整数有多少个？

解　由于 2 与 3 互质，3 与 5 互质，5 与 2 互质（这种特性我们也称为 2、3、5 两两互质），根据性质 5，同时被 2、3、5 整除的整数必

然被 $2\times3\times5=30$ 整除，另一方面，由性质 1，被 30 整除的正整数必然可同时被 2、3、5 整除，因此，在 100 以内同时被 2、3、5 整除的正整数就是在 100 以内被 30 整除的正整数，显然只有 30、60、90 三个.

说明 若 a_1，a_2，…，a_m 两两互质，则同时被 a_1，a_2，…，a_m 整除的正整数就是被 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_m$ 整除的正整数，这也是一个非常有用的结论.

一般地，在 a_1，a_2，…，a_m 不一定两两互质时，有下面的结论：

同时被 a_1，a_2，…，a_m 整除的正整数就是被 a_1，a_2，…，a_m 的最小公倍数整除的整数.

另外，在求 100 以内被 30 整除的正整数的个数时，并不一定要把 30、60、90 全部列出，只要用 100 除以 30，则商 3 便是所求的个数.

例 2 求 1 000 以内同时被 3、4、5、6 整除的正整数的个数.

解 因为 3、4、5、6 的最小公倍数为 60，因此 1 000 以内同时被 3、4、5、6 整除的正整数就是被 60 整除的正整数，由于 1 000 除以 60 的商为 16，故这样的正整数共有 16 个.

例 3 证明：形如$\overline{abc\,abc}$的六位数一定被 7，11，13 整除.

证明
$$\begin{aligned}\overline{abc\,abc}&=a\times10^5+b\times10^4+c\times10^3+a\times10^2\\&\quad+b\times10+c\\&=a\times(10^5+10^2)+b\times(10^4+10)\\&\quad+c\times(10^3+1)\\&=10^2a\times(10^3+1)+10b\times(10^3+1)\\&\quad+c\times(10^3+1)\\&=(10^3+1)\times(10^2a+10b+c)\\&=1\,001\times(100a+10b+c)\\&=7\times11\times13\times(100a+10b+c)\end{aligned}$$

由此可见，$\overline{abc\,abc}$被 7，11，13 整除.

说明 在求解某些问题时，我们需要用十进制把整数表示出来，如 $13\,207 = 1 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 0 \times 10 + 7$.

例 4 设五位数$\overline{x6\,79y}$被 72 整除，求数字 x 与 y.

解 因为 $72 = 8 \times 9$，所以$\overline{x6\,79y}$被 8 与 9 整除.

一个数被 8 整除时，它最后三位组成的数一定被 8 整除，所以$\overline{79y}$能被 8 整除. 通过除法运算，不难得到 $y = 2$.

一个数被 9 整除时，它的数字和被 9 整除，所以 $x + 6 + 7 + 9 + 2 = x + 24$ 被 9 整除，注意到 $0 \leqslant x \leqslant 9$，因此，$x$ 只能为 3.

所以 $x = 3$，$y = 2$.

说明 本例利用被 8 与 9 整除的整数的一些特征，顺利地解决了问题. 这一类问题在竞赛时经常出现，下面我们给出一些常用的数字特征.

(1) 被 2 整除的数：个位数字是偶数；

(2) 被 5 整除的数：个位数字是 0 或 5；

(3) 被 4 整除的数：末两位组成的数被 4 整除；

被 25 整除的数：末两位组成的数被 25 整除；

(4) 被 8 整除的数：末三位组成的数被 8 整除；

被 125 整除的数：末三位组成的数被 125 整除；

(5) 被 3 整除的数：数字和被 3 整除；

(6) 被 9 整除的数：数字和被 9 整除；

(7) 被 11 整除的数：奇数位数字和与偶数位数字和的差被 11 整除.

例 5 令 $N = \underbrace{19991999\cdots1999}_{\text{连写1 999个1 999}}$. 求 N 被 11 除，所得的余数.

解 显然，N 的奇数位数字和与偶数位数字和的差为 $1\,999 \times (9 + 9 - 9 - 1) = 1\,999 \times 8$. 通过除法，我们不难得到 $1\,999 \times 8$ 除以 11 的余数为 9. 从而 N 除以 11，所得的余数为 9.

这是为什么呢？我们可以考虑

$N - 9 = \underbrace{19991999\cdots19991990}_{\text{1 998个1 999连写}}$. 它的奇数位数字和减去偶数位数字和是 $1\,999 \times 8 - 9$，被 11 整除. 根据被 11 整除的数字特征，$N - 9$

被 11 整除，因此，N 除以 11 以后的余数为 9.

说明 由上例，我们不难得到以下结论：一个整数，被 11 除所得的余数等于这个数的奇数位数字和减去偶数位数字和的差除以 11 所得的余数.

同理，我们还有：一个整数，被 3 或 9 除所得的余数等于这个数的数字和除以 3 或 9 所得的余数.

例 6 任给一个自然数 N，把 N 的各位数字按相反的顺序写出来，得到一个新的自然数 N'，试证明：$|N-N'|$ 被 9 整除.

证明 令 $N=\overline{a_1a_2\cdots a_n}$，则 $N'=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}$. 所以 N 除以 9 所得的余数等于 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 除以 9 所得的余数. 而 N' 除以 9 所得余数等于 $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1$ 除以 9 所得的余数. 显然 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1$. 因此，$N$ 与 N' 除以 9 所得的余数相同，从而 $|N-N'|$ 被 9 整除.

说明 本例用到了一个结论：若 a 与 b 除以 c 所得的余数相同，则 $c|a-b$. 这个结论是显然的，但它的应用十分广泛.

另外，本例的结论还可以推广. 不一定非把 N 的各位数字按相反顺序重写，可以以任意的次序重写 N 的各位数字得出 N'. 请大家把这个证明过程写出来.

例 7 240 能被多少个不同的自然数整除？

解 本题换一种提法，就是求 240 的约数个数.

因为 $240=2^4\times3\times5$

所以 240 的约数个数为 $(4+1)\times(1+1)\times(1+1)=20$，即 240 能被 20 个不同的自然数整除.

说明 有个定理，在数论中占有很重要的地位，我们称之为算术基本定理或唯一分解定理.

算术基本定理 任一整数 $n>1$，可以分解成

$$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k},\quad k\geqslant1$$

其中 p_1，p_2，…，p_k 是互不相同的质数，a_1，a_2，…，a_k 是正整数. 而且在不考虑 p_1，p_2，…，p_k 的顺序时，这样的分解只有一种.

这个定理，在数论中有着广泛的应用. 其实在小学阶段学的分解

质因数，用的就是这一定理.

求 n 的正约数个数的一般方法如下：先将 n 分解成 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$，则 n 的正约数个数为：$(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$. 它的证明我们将在“加法原理与乘法原理”这一讲中给出.

例 8 有多少个自然数除 200，余数为 8?

解 设 x 为符合题意的一个自然数，则由带余除法，有：$200 = x \cdot q + 8 \quad (x > 8)$. 即：$200 - 8 = x \cdot q$，亦即 $192 = x \cdot q$. 因此，x 应该为 192 的约数，原问题就转化为求 192 的大于 8 的约数的个数.

因为 $192 = 2^6 \times 3$，所以 192 的正约数的个数为：$(6 + 1) \times (1 + 1) = 14$(个).

但 $x > 8$，故前面的 6 个约数：1、2、3、4、6、8 均不符合要求. 因此，符合题意的自然数共有 $14 - 6 = 8$ 个.

练　习　题

A　组

1. 求在 200 以内同时被 3、4、5 整除的正整数个数.

2. 求在 1 000 以内，同时被 2、4、6、8 整除的正整数的个数.

3. 试证明：六位数$\overline{abc\,abc}$被 11 整除.

4. 一个六位数$\overline{3a1\,23b}$被 88 整除，求 a 与 b 的值.

5. 求被 11 与 13 同时整除的最大的四位数.

6. 当 x 与 y 是什么数字时，四位数$\overline{7\,2xy}$同时被 2、3、4、5、6、9 整除.

7. 求 360 的所有的正约数的个数.

8. 有多少个自然数除 732，余数为 12?

B　组

9. 小明买了三支钢笔、五支圆珠笔、八支铅笔、十二块橡皮，共花去二十元一角钱，若钢笔 4 元一支，圆珠笔八角一支，问售货员有没有算错?

10. 有个三位数，如果把这个数减去 7，它就被 7 整除；如果把这个数减去 8，它就被 8 整除；如果把这个数减去 9，它就被 9 整除，求这个三位数.

11. 有个二位数，被 3 除余 1，被 4 除余 1，被 5 除也余 1，求这个二位数.

12. 求 100 以内既不被 3 整除，又不被 4 整除的正整数的个数.

13. 从 5、6、7、8、9 这五个数字中，选出四个数字组成一个四位数，它被 3、5、7 整除. 在所有符合条件的四位数中，最大的一个是多少?

14. 120 的正约数共有多少个? 这些正约数的和为多少?

15. 如果 92、118、157 被正整数 $n(n \neq 1)$ 除，所得的余数都相同，那么 n 应为多少?

测 试 题

1. 求 1 000 以内同时被 3、5、7 整除的正整数的个数.

2. 求 500 以内同时被 2、4、8 整除的正整数的个数.

3. 求同时被 9、11、17 整除的最小的六位数.

4. 求 100 以内既不被 3 整除，又不被 5 整除的正整数的个数.

5. 一个六位数 $3a1\,25b$ 被 72 整除，试求数字 a 与 b 的值.

6. 求 $\underbrace{19991999\cdots1999}_{1\,999个1\,999连写}$除以 9，所得的余数.

7. 求 72 的正约数的个数.

8. 如果 67、88、116 被正整数 $n(n\neq1)$ 除，所得的余数都相等，那么这个余数是多少？

第二十二讲　奇数和偶数

一、知识要点和基本方法

整数可分为奇数与偶数两大类.不被2整除的整数称为奇数,被2整除的整数称为偶数.整数的奇偶性有下列基本性质.

(1) 奇数不可能与偶数相等.

(2) 偶数 ± 偶数 = 偶数,

偶数 ± 奇数 = 奇数,

奇数 ± 偶数 = 奇数,

奇数 ± 奇数 = 偶数.

从中不难看出:在一个只含整数加减法的算式中,如果奇数的个数是偶数,那么结果为偶数;如果奇数的个数是奇数,那么结果为奇数.

(3) 偶数 × 偶数 = 偶数,

偶数 × 奇数 = 偶数,

奇数 × 奇数 = 奇数.

即:奇数的乘积是奇数,奇数与偶数的乘积是偶数.

(4) 偶数可用 $2k$ 表示,奇数可用 $2k+1$(或 $2k-1$)表示,其中 k 为整数.

利用奇偶性的基本性质,特别是奇数不可能等于偶数这一浅显的性质,可以解决许多数学问题.

二、例题精讲

例1　有一只小渡船往返于一条小河的左右两岸之间,问:

(1) 若最初小船是在左岸,往返若干次后,它又回到左岸,那么

这只小船过河的次数是奇数还是偶数?如果它最后到了右岸,情况又是怎样呢?

(2) 若小船最初在左岸,它过河 99 次之后,是停在左岸还是右岸?

解 (1) 小船最初在左岸,过 1 次河就到了右岸,再过一次河就由右岸回到左岸.即每次由左岸出发到右岸后再回到左岸,都过了二次河.因此,小船由左岸开始,往返多次后又回到左岸,则过河的次数必为 2 的倍数,所以是偶数.同样的道理,不难得出,若小船最后停在右岸,则过河的次数必为奇数.

(2) 通过(1),我们发现,若小船最初在左岸,过偶数次河后,就回到左岸;过奇数次河后,就停在右岸.现在小船过河 99 次,是奇数次.因此,最后小船应该停在右岸.

例 2 五个连续的奇数的和是 995,求这五个奇数.

解 设中间一个奇数为 n.由于这五个奇数是连续的,所以其余的四个分别为:$n-4$,$n-2$,$n+2$,$n+4$.因此,这五个奇数的和为

$$(n-4)+(n-2)+n+(n+2)+(n+4)=5n.$$

依题意,有:$5n=995$,

所以 $n=199$.

这五个连续的奇数分别为 195、197、199、201、203.

说明 在讨论连续的整数、偶数、奇数时,我们往往设它们中间的一个数为 n,其余的数就可根据条件获得.这样处理可以使问题简化.

例 3 图 22-1 是一所房子的示意图,每一个房间与相邻的房间都有门相通,小明在某一房间中,他想从这个房间开始不重复地走遍每一个房间,能做到吗?若能,他开始时应在哪一个房间,又应该怎样走?若不能,请说明理由.

解 不能做到.

将图 22-1 的房间黑白相间地涂色如图 22-2,这样,不论小明从

哪一间房间开始出发，他总是从白房间走进黑房间，或者从黑房间走进白房间. 因此，其走法必为：白→黑→白→黑→…→白→黑→…或者为：黑→白→黑→白→…→黑→白→…，不管为哪一种走法，我们发现，如果他能走遍每一个房间而不重复，那么黑房间的数目与白房间的数目相等或者相差一间，而图 22-2 上的白房间为 5 间，黑房间为 3 间，它们相差 2 间，因此不能做到.

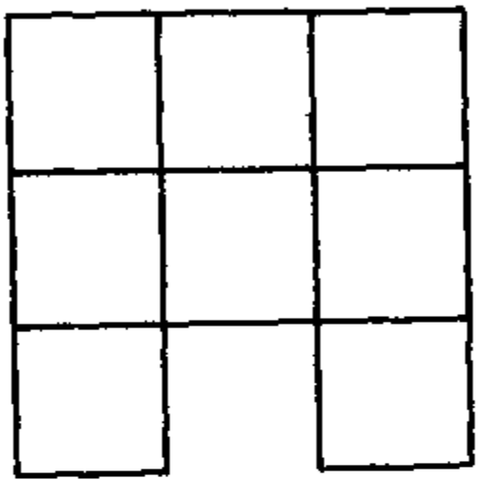


图 22-1

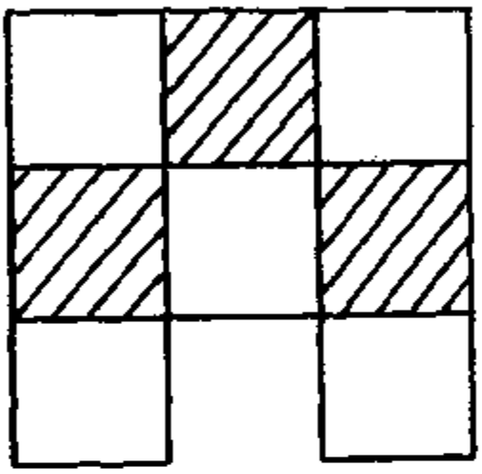


图 22-2

说明 就像整数可以分为奇数与偶数两类一样，我们把房间涂上黑白两色，也分成两类. 几个连续的整数，必然是奇偶相间，而且奇数个数与偶数个数相差至多为一个. 类似地，我们走房间的方法也是黑白相间. 因此，若走法成立，则黑、白房间的数目至多相差一间，这一点正是我们解决本例的关键. 因此，从本质上说，我们还是利用奇偶性来解决问题的. 事实上，如果我们不用黑白两色来涂房间，而是将房间相间地贴上奇偶两字，问题一样得到解决.

例 4 围棋盘上有 19×19 个交叉点，在交叉点上已经放满了黑子与白子，并且黑子与白子相间地放，即黑子(或白子)的上、下、左、右都放着白子(或黑子). 问能否把这些黑子全部移到原来白子的位置上，而白子也全移到原来的黑子的位置上？

解 不能.

因为 $19 \times 19 = 361$ 是奇数，所以，必然有奇数个白子、偶数个黑子，或者奇数个黑子、偶数个白子，即黑、白子数必然一奇一偶，但奇数不可能等于偶数，所以无法使黑子与白子的位置对调.

例5 参加会议的人，有不少互相握过手. 问握手的次数是奇数的那部分人的人数是奇数还是偶数？为什么？

解 由于每握一次手，握手的两个人，每一个都握了一次手. 因此每握一次手，两个人握手次数的和就是 2 次. 所以，全部与会的人握手的总次数必定是偶数.

我们把参加会议的人分成两类，甲类握手次数是偶数，乙类握手次数是奇数. 那么，甲类人握手的总次数显然是偶数. 注意甲类人握手的总次数加上乙类人握手的总次数等于全部与会的人握手的总次数，所以乙类人握手的总次数也应当是偶数. 由于乙类人每人握手的次数都是奇数，而偶数个奇数相加和才能为偶数，因此，乙类中必有偶数个人，即握手次数是奇数的那部分人的人数是偶数.

例6 设标有 A、B、C、D、E、F、G 记号的七盏灯顺次排成一行，每盏灯安装一个开关. 现在 A、C、E、G 四盏灯开着，其余三盏灯是关的. 小刚从灯 A 开始，顺次拉动开关，即从 A 到 G，再从 A 开始顺次拉动开关，即又从 A 到 G，……，他这样拉动了 1 999 次开关后，问哪几盏灯是开的.

解 一盏灯的开关被拉动奇数次后，改变原来的状态，即开的变成关的，关的变成开的；而一盏灯的开关被拉动偶数次后，不改变原来的状态，即开的仍为开的，关的仍为关的. 因此本题的关键是计算各盏灯被拉次数的奇偶性. 由于

$$1\,999 = 7 \times 285 + 4.$$

再由灯的开关的拉法，我们知 A、B、C、D 四盏灯的开关各被拉动了 286 次，而 E、F、G 三盏灯的开关各被拉动了 285 次. 所以，小刚拉动 1 999 次开关后，A、B、C、D 四灯不改变状态，E、F、G 三灯将改变原来的状态. 由于开始时 A、C、E、G 四灯是开着的. 因此，最后 A、C、F 三灯是开着的.

例7 桌上放着七只杯子，杯口全朝上，每次翻转四个杯子. 问能否经过若干次这样的翻动，使全部的杯子口都朝下？

解 不可能.

我们将口向上的杯子记为 0，口向下的杯子记为 1，开始时，由于

七个杯子全朝上，所以这七个数的和为0，是个偶数.

一个杯子每翻动一次，所记数由0变为1或由1变为0，改变了奇偶性. 每一次翻转四个杯子，因此这七个数的和的奇偶性改变了四次，从而和的奇偶性仍与原来相同. 所以，不论翻动多少次，这七个数的和与原来一样，仍为偶数.

当杯子全部朝下时，这七个数的和为7，是奇数. 因此，不论经过多少次翻转，都不可能使所有的杯子的口都朝下.

例8 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{1\,999}$ 是 $1, 2, \cdots, 1\,999$ 的任意一个排列，试证明：$(a_1 - 1)(a_2 - 2)\cdots(a_{1\,999} - 1\,999)$ 必为偶数.

证明 $1, 2, \cdots, 1\,999$ 中奇数比偶数多1个，因此 $a_1, a_2, \cdots, a_{1\,999}$ 中奇数也比偶数多1个. 这样，在 $a_1, a_3, \cdots, a_{1\,999}$ 这些数中至少有1个奇数，相应的差 $a_1 - 1, a_3 - 3, \cdots, a_{1\,999} - 1\,999$ 中至少有1个是奇数减去奇数，因而这差是偶数. 从而 $(a_1 - 1)(a_2 - 2)\cdots(a_{1\,999} - 1\,999)$ 是偶数.

练　习　题

A　组

1. 有一个班的学生，每人都参加了数学、语文或外语三个兴趣小组中的一个，如果参加数学兴趣小组的学生比参加语文兴趣小组的学生多 3 人，而参加语文兴趣小组的学生又比参加外语兴趣小组的学生多 5 人，若参加外语兴趣小组的人数是偶数，试问这个班的人数是奇数还是偶数？

2. 求正整数中前 10 个奇数的和. 一般地，求正整数中前 n 个奇数的和.

3. 图 22-3 是一条浅水河的平面图. 图中曲线为河岸，人在河中走，下水时脱鞋，上岸时穿鞋. 某人从水中 A 点走到某个点 B 时，他脱鞋与穿鞋的次数相同，问 B 点是在水中还是岸上？

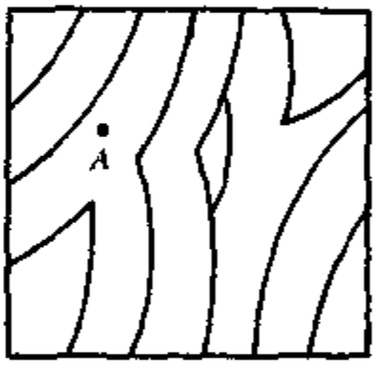


图 22-3

4. 七个连续的奇数的和为 399，求这七个数.

5. 三个相邻的偶数的乘积是一个六位数 $8**\ **2$，求这三个偶数.

6. 两人通一次电话，则认为这两个人都打了一次电话，问全世界打电话的次数是奇数的人数是奇数还是偶数？

7. 现有 A、B、C、D、E 五盏灯，开始时五盏灯都是关的，小明顺次拉动这五盏灯的开关，即先从 A 到 E 拉动开关，再从 A 到 E 拉动开关，……，问小明共拉动 189 次开关后，有哪几盏灯是开的？

8. 桌上放着四个杯子，杯口都朝上，每次翻动三个杯子，能否翻动若干次后，将杯子口全部朝下？

B　组

9. 今有 9 只杯子，杯口全朝上，每次翻动其中的四只杯子，问能

否经过若干次这样的翻动，使杯口全朝下？

10. 图 22-4 是一所房子的示意图，数字表示房间号码，每个房间与隔壁的房间有门相通，小胖要从一号房间开始不重复地走遍这九间房间，最后回到一号房间，他能做到吗？为什么？

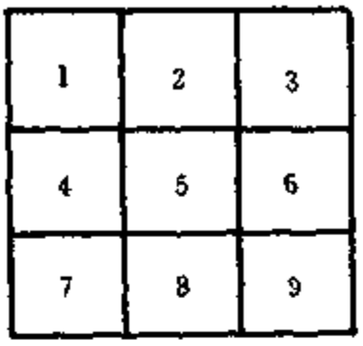


图 22-4

11. 平面上有 9 个点，每三点都不在同一条直线上，现想从每一点都正好引出三条直线和其余的任意三个点相连，问这种想法能实现吗？为什么？

12. 中国象棋盘的任意位置上有一只马，它跳了若干步正好回到原来的位置，问这只马所跳的步数是奇数还是偶数？为什么？

测　验　题

1. 若有六个连续的奇数之和为 612，求这六个奇数.

2. 三个连续的偶数之积是一个六位数 15＊ ＊＊8，求这三个偶数.

3. 有一队小朋友，每人都拿一个球，其中拿排球的人比拿足球的人少 3 人，拿篮球的人比拿排球的人多 6 人. 若拿足球的人数是奇数，那么这一队小朋友的人数是奇数还是偶数？

4. 桌上放五个杯子，杯口朝上的有 2 个，朝下的有 3 个，每次翻动 4 个杯子，能否翻动若干次后，将杯口全部朝上？

5. 两个人握一次手，则记这两个人都握了一次手，问在一次集会上握奇数次手的人数是奇数还是偶数？为什么？

6. 试证明：如果一个整数的平方是偶数，则这个整数也是一个偶数.

7. 某地进行数学竞赛，试题共 10 道，答对一道得 5 分，不答得 1 分，答错一道扣 1 分，试证明：无论有多少人参加竞赛，所有学生的得分总和一定是偶数.

第二十三讲　质数和合数

一、知识要点和基本方法

一个大于 1 的整数，如果它的约数只有两个，即 1 与它本身，我们称这样的整数为质数；如果它的约数的个数超过两个，即它有不同于 1 与它本身的约数，我们称这样的整数为合数. 正整数可分为质数、合数和 1 三类，即

$$\text{正整数}\begin{cases}\text{质数}\\ \text{合数}\\ 1\end{cases}$$

应注意：1 既不是质数，也不是合数，它是异于质数与合数的一类. 我们也称它为单位.

质数与合数有下面常用的性质：

(1) 质数有无数多个.

(2) 2 是唯一的既是质数，又是偶数的整数，即是唯一的偶质数. 大于 2 的质数必为奇数.

(3) 若质数 $p|a\cdot b$，则必有 $p|a$ 或 $p|b$.

(4) 若正整数 a、b 的积是质数 p，则必有 $a=p$ 或 $b=p$.

(5) 唯一分解定理：任何整数 $n(n>1)$ 可以唯一地分解为：$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$，其中 $p_1<p_2<\cdots<p_k$ 是质数，a_1，a_2，…，a_k 是正整数.

二、例题精讲

例 1　有四个数，一个是最小的奇质数，一个是偶质数，一个是

小于 30 的最大质数，另一个是大于 70 的最小质数，求它们的和.

解 最小的奇质数为 3，唯一的一个偶质数为 2，小于 30 的最大质数是 29，大于 70 的最小质数是 71，因此，它们的和为

$$3 + 2 + 29 + 71 = 105.$$

说明 在解有关质数的问题时，知道一些小常识是有用的，如 1 既非质数又非合数，2 是唯一的偶质数，也是最小的质数，3 是最小的奇质数等，另外，100 以内的质数共有 25 个，它们为：2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97.

例 2 p 为质数，$p^4 + 3$ 仍为质数，求 $p^5 + 3$ 的值.

解 因为 p 为质数，故 $p^4 + 3 > 3$. 又 $p^4 + 3$ 为质数，故 $p^4 + 3$ 必为奇数，从而 p^4 必为偶数，因此，p 必为偶数（见上一讲测试题 6），又由于 p 为质数，故 $p = 2$.

所以 $p^5 + 3 = 2^5 + 3 = 35$.

说明 本题利用了 2 是唯一的偶质数这一特性.

例 3 若 n 为自然数，$n + 3$ 与 $n + 7$ 都是质数，求 n 除以 3 所得的余数.

解 我们知道，n 除以 3 所得的余数只可能为 0、1、2 三种.

若余数为 0，即 $n = 3k$（k 是一个非负整数，下同），则 $n + 3 = 3k + 3 = 3(k + 1)$，所以 $3 | n + 3$，又 $3 \neq n + 3$，故 $n + 3$ 不是质数，与题设矛盾.

若余数为 2，即 $n = 3k + 2$，则 $n + 7 = 3k + 2 + 7 = 3(k + 3)$，故 $3 | n + 7$，$n + 7$ 不是质数，与题设矛盾，所以，n 除以 3 所得的余数只能为 1.

说明 一个整数除以 m 后，余数可能为 0、1、…、$m - 1$，共 m 个，将整数按除以 m 所得的余数分类，可以分成 m 类. 如 $m = 2$ 时，余数只能为 0 与 1，因此可以分为两类，一类是除以 2 余数为 0 的整数，即偶数，另一类是除以 2 余数为 1 的整数，即奇数. 同样，对 $m = 3$ 时，就可将整数分为三类. 即除以 3 余数分别为 0、1、2 这样的三

类.通过余数是否相同来分类是数论中的一种重要思想方法,有着广泛的应用.

例4 设 n_1 与 n_2 是任意两个大于 3 的质数,$N_1 = n_1^2 - 1$,$N_2 = n_2^2 - 1$. N_1 与 N_2 的最大公约数至少为多少?

解 因为 n_1 是大于 3 的质数,所以 n_1 不是 3 的倍数且 n_1 是奇数.因为 n_1 不是 3 的倍数,所以 $n_1 = 3k + 1$ 或 $n_1 = 3k + 2$ (k 为正整数).当 $n_1 = 3k + 1$ 时,$n_1^2 - 1 = (3k + 1)^2 - 1 = 9k^2 + 6k + 1 - 1 = 3(3k^2 + 2k)$,故 $3 | n_1^2 - 1$. 当 $n_1 = 3k + 2$ 时,$n_1^2 - 1 = (3k + 2)^2 - 1 = 9k^2 + 6k + 4 - 1 = 3(3k^2 + 2k + 1)$,故 $3 | n_1^2 - 1$.

又因为 n_1 是奇数,所以 $n_1 = 2k + 1$. 从而

$$n_1^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k + 1)$$

又因为 k 与 $k + 1$ 是连续的整数,所以 $2 | k(k + 1)$,$8 | 4k(k + 1)$ 即 $8 | n_1^2 - 1$.

由于 3 与 8 互质,故 $24 | n_1^2 - 1$.

同理 $24 | n_2^2 - 1$.

另外,取 $n_1 = 5$,则 $n_1^2 - 1 = 24$.

综上所述,N_1 与 N_2 的最大公约数至少为 24.

说明 从上述例题中,我们得到两个有用的结论:

(1) 若 n 不是 3 的倍数,则 n^2 除以 3 的余数为 1.

(2) 若 n 是奇数,则 n^2 除以 8 的余数为 1.

例5 设自然数 $n_1 > n_2$,且有 $n_1^2 - n_2^2 = 79$,试求 n_1 与 n_2 的值.

解 由题意:$n_1^2 - n_2^2 = (n_1 + n_2)(n_1 - n_2) = 79$. 因为 n_1,n_2 是整数,故 $n_1 + n_2$ 与 $n_1 - n_2$ 都是整数,而 79 是一个质数,由质数的性质,且注意到 $n_1 + n_2 > n_1 - n_2$,有,

$$\begin{cases} n_1 + n_2 = 79, \\ n_1 - n_2 = 1, \end{cases}$$

不难解得 $n_1 = 40$,$n_2 = 39$.

例6 n 是不小于 40 的偶数,试证明:n 总可以表示成两个奇合数的和.

证明 因为 n 是不小于 40 的偶数，所以，n 的个位数字必为 0、2、4、6、8，现在以 n 的个位数字分类：

(1) 若 n 的个位数字为 0，则 $n = 15 + 5k$ ($k \geqslant 5$ 为奇数).

(2) 若 n 的个位数字为 2，则 $n = 27 + 5k$ ($k \geqslant 3$ 为奇数).

(3) 若 n 的个位数字为 4，则 $n = 9 + 5k$ ($k \geqslant 7$ 为奇数).

(4) 若 n 的个位数字为 6，则 $n = 21 + 5k$ ($k \geqslant 5$ 为奇数).

(5) 若 n 的个位数字为 8，则 $n = 33 + 5k$ ($k \geqslant 3$ 为奇数).

综上所述，不小于 40 的任一偶数，都可以表示成两个奇合数之和.

说明 同学们知道什么是“哥德巴赫猜想”吗？二百多年前，德国数学家哥德巴赫发现：任一个不小于 6 的偶数都可以写成两个奇质数之和. 如 $6 = 3 + 3$，$12 = 5 + 7$ 等. 对许多偶数进行检验，都说明这个猜想是正确的，但至今仍无法从理论上加以证明，也没有找到一个反例. 到目前最好的结论是我国数学家陈景润证明的“$1 + 2$”，即任一充分大的偶数，都可表示成一个质数加上一个质数或两个质数的积，这一结论被命名为“陈氏定理”.

本题证明一个不小于 40 的偶数可表示成两个奇合数之和，其难度与“哥德巴赫猜想”当然不可同日而语，但本题证明时使用了构造的方法，值得大家注意.

例 7 证明有无穷多个 n，使多项式

$$n^2 + 3n + 7$$

(1) 表示合数.

(2) 是 11 的倍数.

证明 (1) 当 n 为 7 的倍数，即 $n = 7k$($k \geqslant 1$ 的整数)时，多项式

$$\begin{aligned} n^2 + 3n + 7 &= (7k)^2 + 3 \times (7k) + 7 \\ &= 7(7k^2 + 3k + 1) \end{aligned}$$

为 7 的倍数，所以它显然是合数.

(2) 当 $n = 11k + 1$ ($k \geqslant 1$) 时，多项式

$$n^2+3n+7=11(11k^2+5k+1)$$

是 11 的倍数.

说明 用同样的方法,可以证明对每一个整系数多项式,都有无穷多个 $n\in\mathbf{N}$,使它为合数.事实上,若当 $n=a$ 时,该多项式的值是质数 p,则当 $n=a+kp$ 时($k\geqslant 1$),该多项式必为 p 整除.如上例的(2),当 $n=1$ 时,多项式的值为 11(质数),所以当 $n=1+11k$ 时,多项式就必定被 11 整除.

例 8 $p>2$,p 是质数,若 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-2}+\frac{1}{p-1}=\frac{a}{b}$,证明:$p\mid a$.

证明

$$1+\frac{1}{p-1}=\frac{p}{1\cdot(p-1)},$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}=\frac{p}{2\cdot(p-2)},$$

……

$$\frac{1}{\left(\frac{p-1}{2}\right)}+\frac{1}{\left(\frac{p+1}{2}\right)}=\frac{p}{\left(\frac{p-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{p+1}{2}\right)},$$

因此,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\left(\frac{p-1}{2}\right)}+\frac{1}{\left(\frac{p+1}{2}\right)}+\cdots+\frac{1}{p-2}+\frac{1}{p-1}$$

$$=\frac{p}{1\cdot(p-1)}+\frac{p}{2\cdot(p-2)}+\cdots+\frac{p}{\left(\frac{p-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{p+1}{2}\right)}$$

$$=\frac{p\cdot M}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot\frac{(p-1)}{2}\cdot\frac{(p+1)}{2}\cdot\cdots\cdot(p-2)(p-1)},$$

其中 $M=2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(p-2)+1\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(p-3)\cdot(p-1)$

$$+\cdots+1\cdot 2\cdots\left(\frac{p-3}{2}\right)\left(\frac{p+3}{2}\right)\cdots(p-1).$$

因为 $p>2$,p 为质数,所以 p 与 1、2、…、$p-1$ 都互质,从而

与分母 $1\cdot2\cdot3\cdots(p-1)$ 互质. 因此约分后的分子中仍有因数 p，亦即 $p\mid a$.

说明 本例仿照了高斯求和的办法，将一头一尾两两搭配. 分组运算. 方法非常巧妙.

另外，我们也常记 $1\times2\times3\times\cdots\times n$ 为 $n!$，因而上面的 $1\times2\times3\times\cdots\times(p-1)$ 也可记为 $(p-1)!$，由上面的证明过程，我们有：当 p 为质数时，$p\nmid(p-1)!$，从而 p 与 $(p-1)!$ 互质.

练　习　题

A　组

1. 有三个正整数，一个是最小的奇质数，一个是最小的奇合数，另一个既不是质数，也不是合数，求这三个数的积.

2. 有三个数，一个是偶质数，一个是大于 50 的最小的质数，一个是 100 以内最大的质数，求这三个数的和.

3. 设 p_1 与 p_2 是两个大于 2 的质数，证明 p_1+p_2 是一个合数.

4. 若 p 是一个质数，p^2+3 仍为质数，求证：p^3+3 也是一个质数.

5. 若 p 与 $p+2$ 都是质数，求 p 除以 3 所得的余数.（$p>3$）.

6. 若自然数 $n_1>n_2$，且 $n_1^2-n_2^2-2n_1-2n_2=19$，求 n_1 与 n_2 的值.

7. 有四个不同质因数的最小的自然数是多少？

8. 求 2 000 的正约数个数，并求它的所有质因数的和.

B　组

9. 试证明：形如 $111\,111+9\times10^k$（k 是非负整数）的正整数必为合数.

10. 若自然数 $n+3$ 与 $n+7$ 都是质数，求 n 除以 6 以后的余数.

11. n 是自然数，试证明 $10\mid n^5-n$.

12. 证明有无穷多个 n，使 n^2+n+41

(1) 表示合数.

(2) 为 43 的倍数.

13. 试证明：自然数中有无穷多个质数.

测　试　题

1. 有四个数，一个是最小的质数，一个是最小的合数，一个是小

于 50 的最大质数，一个是大于 70 的最小质数，求这四个数之和.

2. 方程 $px+q=333$ 的解是 1，且 p 与 q 都是质数，$p<q$，求 p 与 q 的值.

3. 一个质数的平方与一个奇数的和为 125，这两个数的积为多少？

4. 若自然数 n 分别加上 3、5，所得的数都是质数，这个数被 3 除所得的余数是多少？

5. 若自然数 $n_1>n_2$，且 $n_1^2-n_2^2=61$，试求 n_1 与 n_2 的值.

6. 有三个不同质因数的最小的四位数是多少？

7. 试证明：形如 $12\,344\,321+111\,111\times10^k$（$k\geqslant0$ 的整数）的正整数必为合数.

8. 证明：有无穷多个 n，使多项式 n^2+n+1 的值是一个合数.

第二十四讲　二元一次不定方程

一、知识要点和基本方法

当一个方程中未知数的个数多于一个时，称这个方程为不定方程. 本讲只讨论有二个未知数的一次不定方程.

一个不定方程总有无穷多组解，但更多的情况是讨论一个整系数的不定方程的整数解或正整数解，此时，它可能仍有无穷多组解，也可能只有有限组解，甚至可能无解.

我国对不定方程的研究已经有几千年的历史，“物不知其数”，“秦王暗点兵”，“百鸡问题”，“五家共井”等趣题一直流传至今. 对不定方程的研究是令人感兴趣的课题之一.

二、例题精讲

例 1　解方程　$x-3y=8$.

解　由原方程，易得　$x=8+3y$.

因此，对 y 的任意一个值，都有一个 x 与之对应，并且，此时 x 与 y 的值必定满足原方程，故这样的 x 与 y 是原方程的一组解，即原方程的解可表为：

$$\begin{cases} x=8+3k, \\ y=k, \end{cases}$$

其中 k 为任意数.

说明　由 y 取值的任意性，可知上述不定方程有无穷多组解. 一般地，二元一次不定方程总有无穷多组解，其解法也和例 1 类似，即先将其中的一个未知数看作常数，把另一个未知数解出，最后把看作常数的未知数取为任意数即可. 对二元一次不定方程，我们通常研究

它的整数解.

例 2 求方程 $3x + 6y = 8$ 的整数解.

解 因为 $3x + 6y = 3 \times (x + 2y)$，所以，不论 x 与 y 取何整数，总有 $3 \mid 3x + 6y$，但 $3 \nmid 8$. 因此，不论 x 与 y 取何整数，$3x + 6y$ 都不可能等于 8，即原方程无整数解.

说明 例 2 告诉我们，并非所有的二元一次方程都有整数解. 二元一次方程什么时候有整数解，什么时候没有整数解呢？我们有下面的定理：

定理 1 整系数方程 $ax + by = c$ 有整数解的充分而且必要条件是 a 与 b 的最大公约数 d 能整除 c.

定理 1 告诉我们，若 $d \mid c$，则原方程有整数解，否则，若 $d \nmid c$，则原方程没有整数解.

例 3 求方程 $4x + 10y = 34$ 的整数解.

解 因为 4 与 10 的最大公约数为 2，而 $2 \mid 34$，由定理 1，原方程有整数解.

两边约去 2 后，得 $2x + 5y = 17$.

故 $y = \dfrac{17 - 2x}{5}$.

因此，要使 y 取得整数，$17 - 2x$ 必须是 5 的倍数，如 $x = 1$ 时，$17 - 2x = 15$，$y = 3$，即我们找到了方程的一组解 $x_0 = 1$，$y_0 = 3$.

设原方程的所有解的表达式为：

$$\begin{cases} x = 1 + m, \\ y = 3 + n, \end{cases}$$

代入原方程，得 $2(1 + m) + 5(3 + n) = 17$，

即 $2m + 5n = 0$，亦即 $2m = -5n$，从而 $5 \mid 2m$. 因为 2 与 5 互质，所以 $5 \mid m$. 令 $m = 5k$，k 为整数，则有 $n = -2k$.

由此得到原方程的所有解为

$$\begin{cases} x = 1 + 5k, \\ y = 3 - 2k, \end{cases}$$

其中 k 为任意整数.

说明 由定理1，我们知道，若 $ax+by=c$ 有解，则 a 与 b 的最大公约数 $d|c$. 此时，我们可以在原方程的两边同时约去 d，得 $\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}y=\frac{c}{d}$，令 $\frac{a}{d}=a_1$，$\frac{b}{d}=b_1$，$\frac{c}{d}=c_1$，我们又得到另一个同解的二元一次方程 $a_1x+b_1y=c_1$. 显然，此时 a_1 与 b_1 的最大公约数为1. 因此，只要讨论 $d=1$ 的情况即可. 我们有如下的定理：

定理2 若 a 与 b 的最大公约数为1(即 a 与 b 互质)，x_0、y_0 为二元一次整系数不定方程 $ax+by=c$ 的一组整数解(也称为特解)，则 $ax+by=c$ 的所有解(也称通解)为

$$\begin{cases}x=x_0+bk,\\ y=y_0-ak,\end{cases}$$

其中 k 为任意整数.

因此，当 $d=1$ 时，显然 $ax+by=c$ 有解，并且解这个二元一次方程的关键在于找它的特解 x_0、y_0.

例4 求方程 $2x+3y=5$ 的整数解.

解 我们很容易发现，$x=1$，$y=1$ 是方程的一组解，又因为 $(2,3)=1$，由定理2，方程的所有整数解为

$$\begin{cases}x=1+3k,\\ y=1-2k.\end{cases}\quad(k\text{ 为任意整数})$$

说明 本例通过观察，容易发现一组解. 但有时，不定方程的特解是不容易获得的，如不定方程 $1999x+105y=1$ 就很难直接找到一组整数解.

下面通过几个例子来介绍求不定方程的特解的常用方法.

例5 求方程 $3x+5y=12$ 的整数解.

解 由 $3x+5y=12$ 得

$$x=4-\frac{5}{3}y,$$

所以当且仅当 $3|y$ 时，x 为整数，取 $y=3$，得 $x=4-\frac{5}{3}\times 3=-1$，即 $x=-1$，$y=3$ 是原方程的一组解. 因此，原方程的所有整

数解为

$$\begin{cases} x = -1 + 5k, \\ y = 3 - 3k. \end{cases} \quad (k \text{ 为任意整数})$$

例 6 求方程 $3x + 5y = 31$ 的整数解.

解 由原方程,得

$$x = \frac{31 - 5y}{3},$$

即

$$x = 10 - 2y + \frac{1 + y}{3},$$

要使方程有整数解,$\frac{1 + y}{3}$ 必须为整数. 取 $y = 2$,得 $x = 10 - 2y + \frac{1 + y}{3} = 10 - 4 + 1 = 7$,故 $x = 7$, $y = 2$ 是原方程的一组解. 因此,原方程的所有整数解为

$$\begin{cases} x = 7 + 5k, \\ y = 2 - 3k. \end{cases} \quad (k \text{ 为任意整数})$$

以上我们讨论了二元一次方程的整数解的情况,下面我们介绍二元一次不定方程有正整数解的情况.

例 7 求方程 $3x + 5y = 31$ 的正整数解.

解 由例 6,我们知道 $3x + 5y = 31$ 的所有整数解为

$$\begin{cases} x = 7 + 5k, \\ y = 2 - 3k. \end{cases} \quad (k \text{ 为任意整数})$$

故要求原方程的正整数解,只要使 $x > 0$, $y > 0$ 即可,即有不等式组

$$\begin{cases} 7 + 5k > 0, \\ 2 - 3k > 0. \end{cases}$$

这个不等式组的解为 $-\frac{7}{5} < k < \frac{2}{3}$. 注意到 k 为整数,所以在此范围内的整数 k 只能取 0 或 -1,分别令 $k = 0$ 和 $k = -1$,得到原方程

的所有正整数解，分别为

$$\begin{cases} x = 7, \\ y = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2, \\ y = 5. \end{cases}$$

说明 求二元一次不定方程的正整数解时，可先求出它的通解，然后令 $x > 0$，$y > 0$，得不等式组，由不等式组可解得 k 的范围，在此范围内取 k 的整数值，代入通解，即得这个不定方程的所有正整数解.

例 8 求方程 $5x - 3y = -7$ 的正整数解.

解 原方程可化为 $x = \dfrac{3y - 7}{5}$，

即 $x = -2 + \dfrac{3(y+1)}{5}$.

$y = 4$ 时，$x = 1$. 即 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ 为原方程的一组整数解. 因此，原方程的所有整数解为

$$\begin{cases} x = 1 - 3k, \\ y = 4 - 5k. \end{cases} \quad (k \text{ 为任意整数})$$

再令 $x > 0$，$y > 0$，即有不等式组

$$\begin{cases} 1 - 3k > 0, \\ 4 - 5k > 0, \end{cases}$$

解得 $k < \dfrac{1}{3}$，所以，当 k 取 0，-1，-2，…时原方程可得到无穷多组正整数解

$$\begin{cases} x = 1 - 3k, \\ y = 4 - 5k. \end{cases} \quad (k = 0, -1, -2, \cdots)$$

例 9 求方程 $11x + 5y = 12$ 的正整数解.

解 如果方程有正整数解，则 $x \geqslant 1$，$y \geqslant 1$，因此 $11x + 5y \geqslant 11 + 5 = 16$.

而方程的右端为 12，所以这个方程无正整数解.

说明 一般地，若方程 $ax+by=c$ 中，$a>0$，$b>0$，$a+b>c$，则这个方程无正整数解.

例 10 如果三个既约真分数 $\frac{2}{3}$，$\frac{a}{4}$，$\frac{b}{6}$ 的分子都加上 b，这时得到的三个分数的和为 6，求这三个既约真分数的积.

解 由题意，我们有 $\frac{2+b}{3}+\frac{a+b}{4}+\frac{b+b}{6}=6$，

整理得 $3a+11b=64$.

问题转化为求 $3a+11b=64$ 的正整数解.

由 $3a+11b=64$ 得 $a=\frac{64-11b}{3}$，

从而 $a=21-4b+\frac{1+b}{3}$.

令 $b=2$ 得 $a=14$. 即这个不定方程有一组整数解 $\begin{cases}a=14,\\b=2,\end{cases}$ 从而它的所有整数解为

$$\begin{cases}a=14+11k,\\b=2-3k.\end{cases}(k\text{ 为任意整数})$$

令 $a>0$，$b>0$，得不等式组

$$\begin{cases}14+11k>0,\\2-3k>0,\end{cases}$$

解得 $-\frac{14}{11}<k<\frac{2}{3}$，从而 $k=0$ 或 -1. 因此，这个方程有两组正整数解

$$\begin{cases}a=14,\\b=2,\end{cases}\quad\text{和}\quad\begin{cases}a=3,\\b=5.\end{cases}$$

注意 $\frac{a}{4}$ 与 $\frac{b}{6}$ 为既约真分数，所以 $a=3$，$b=5$ 是它的唯一解.

因此所求的积为 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{12}$.

练　习　题

A　组

1. 判断下列二元一次方程有无整数解，并说明理由

(1) $2x + 6y = 5$.

(2) $4x + 6y = 8$.

(3) $3x + 5 = 6y + 11$.

(4) $x = \dfrac{11 - 2y}{3}$.

2. 求下列二元一次方程的解

(1) $2x + 6y = 7$.

(2) $-3x - 3 = 4y + 6$.

3. 求下列二元一次方程的整数解

(1) $5x + 10y = 20$.

(2) $3x - 4y = 7$.

(3) $4x + 7y = 8$.

(4) $13x + 30y = 4$.

B　组

4. 求下列方程的正整数解

(1) $11x + 15y = 20$.

(2) $2x + 5y = 21$.

(3) $5x - 2y = -3$.

(4) $5x + 8y = 32$.

5. 试将 100 分成两个正整数之和，其中一个为 11 的倍数，另一个为 17 的倍数.

测　试　题

1. 解下列二元一次不定方程

(1) $3x + 5y = 6$.

(2) $7y - 6 = -3x + 5$.

2. 判断下列二元一次不定方程有无整数解，并说明理由

(1) $3x + 5y = 1\,118$.

(2) $2x + 100y = 10\,101$.

(3) $14x + 3 = 21y + 4$.

(4) $13x + 17y = 999$.

3. 求下列不定方程的整数解和正整数解

(1) $3x + 5y = 28$.

(2) $7x - 3y = -2$.

(3) $5x + 10y = 25$.

(4) $3x + 7y = 2$.

4. 把 118 分成两个正整数的和，一个为 11 的倍数，另一个为 13 的倍数.

第二十五讲　加法原理和乘法原理

一、知识要点和基本方法

在日常生活中，我们经常会碰到一些与排列组合有关的数学问题，而且随着计算机科学的迅猛发展，组合数学这门古老的数学学科又焕发出新的活力，因而，在数学竞赛中也经常会碰到有关这方面的命题. 本讲只讨论组合数学中两个最基本的原理：加法原理和乘法原理. 这两个原理可叙述如下：

加法原理　做一件事情，完成它有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，…，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事情共有

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同的方法.

乘法原理　做一件事情，完成它可分成 n 步，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，…，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事情共有 $m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$ 种不同的方法.

二、例题精讲

例 1　从甲地到乙地，可以乘火车，汽车和轮船. 一天中，火车有 4 班，汽车有 8 班，轮船有 3 班，问一天中乘这些交通工具从甲地到乙地共有多少种不同的走法？

解　从甲地到乙地，共有三类办法，一类是乘火车，有 4 种不同的走法；一类是乘汽车，有 8 种不同的走法；另一类是乘轮船，有 3 种不同的走法. 根据加法原理，一天中乘这些交通工具从甲地到乙地共

有 $4+8+3=15$ 种不同的走法.

例 2 一个盒中有 5 个小球，另一个盒中有 6 个小球，所有这些小球各不相同，问：

(1) 从这两个盒中任取一个小球，有多少种不同的取法？

(2) 从这两个盒中各取一个小球，有多少种不同的取法？

解 (1) 从两个盒中任取一个小球，有两类办法，第一类办法是从第一个盒中取球，共有 5 种不同的方法，第二类办法是从第二个盒中取球，共有 6 种不同的方法，由加法原理，共有 $5+6=11$ 种不同的取法.

(2) 要从两个盒子中各取一球，可分两步进行，第一步是从第一个盒中取一球，有 5 种不同的方法；第二步是从第二个盒子中取一球，有 6 种不同的取法. 这二步都完成了，这件事(从两个盒中各取一球)才得以完成. 根据乘法原理，共有 $5\times 6=30$ 种不同的取法.

说明 从上例中可看到，使用乘法原理与加法原理的不同之处在于：在用加法原理时，完成一件事情有 n 类办法，不论用哪一类办法，都能完成这件事. 而用乘法原理时，完成一件事情可分为 n 步，但不论哪一步，都只是完成这件事情的一部分，只有每一步都完成了，这件事情才得以完成. 因此，这 n 步缺一不可. 这就是使用乘法原理还是使用加法原理的主要区别.

例 3 把多项式

$$(a_1+a_2)(b_1+b_2+b_3)(c_1+c_2+c_3+c_4)$$

展开，问展开式中有多少个不同的项？

解 因为原多项式的展开式的每一项都具有 $a_ib_jc_k$ 的形式，其中 $i=1,2$，$j=1,2,3$，$k=1,2,3,4$. 所以要得到其中一项，可以分三个步骤，第一步，先选取 a_i，它从 a_1，a_2 中选择，故有 2 种选取方法. 同样地，第二步选取 b_j，它有 3 种选取方法. 第三步，选取 c_k，它有 4 种选取方法. 根据乘法原理，选择一项的方法共有 $2\times 3\times 4=24$ 种. 亦即原多项式的展开式共有 24 个不同的项.

前面我们曾不加证明地给出了一个正整数的正约数的个数的公

式，下面我们就来证明这一公式.

例 4 如果一个正整数 n 分解质因数后的形式为 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$，其中 p_1，p_2，…，p_k 是不同的质数，a_1，a_2，…，a_k 是正整数，那么 n 的正约数个数为

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1)\cdots(a_k + 1).$$

证明 因为 n 分解成 $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$，所以 n 的正约数的形式一定为 $p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdots p_k^{i_k}$，其中 $i = 0, 1, 2, \cdots, a_1$；$i_2 = 0, 1, 2, \cdots, a_2$；…；$i_k = 0, 1, 2, \cdots, a_k$. 因此，要得到一个正约数可分 k 步走，第一步，选取 $p_1^{i_1}$，由于 $i_1 = 0, 1, 2, \cdots, a_1$，所以共有 $(a_1 + 1)$ 种选法；第二步选取 $p_2^{i_2}$，共有 $(a_2 + 1)$ 种选法；…；第 k 步选取 $p_k^{i_k}$，共有 $(a_k + 1)$ 种选法. 根据乘法原理，正约数的个数为

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1)\cdots(a_k + 1).$$

例 5 图 25-1 是一个 5×5 的正方形，现在要把 A、B、C、D、E 五个棋子放在方格里，每行和每列只能出现一个棋子，那么一共有多少种放法？

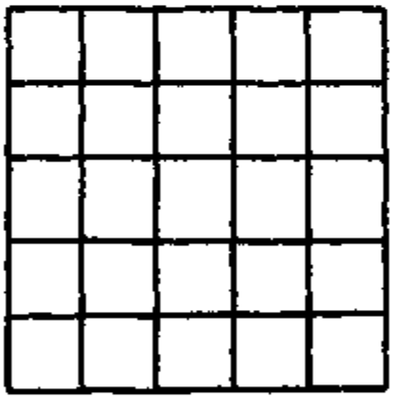


图 25-1

解 要将 A、B、C、D、E 五个棋子放到 5×5 的方格中，可分五步走. 第一步，先放 A，它可以放在这 $5 \times 5 = 25$ 个方格的任一个小方格中，所以共有 25 种放法；第二步，放 B，根据题意，B 不能与 A 同行，也不能与 A 同列，故一旦 A 占用一个小方格后，这个小方格所在的行与列都不能再放 B，因此，B 有 $4 \times 4 = 16$（去掉 A 所占的一行一列还剩 4×4 个方格）种放法；同样地，第三步放 C 时，它不能与 A、B 同行同列，故它只能有 $3 \times 3 = 9$ 种放法；第四步放 D，它不能与 A、B、C 同行同列，故它只能有 $2 \times 2 = 4$ 种放法；第五步为 E，它不能与 A、B、C、D 同行同列，故只有 $1 \times 1 = 1$ 种放法. 根据乘法原理，符合题意的放法共有：

$$25 \times 16 \times 9 \times 4 \times 1 = 14\,400 \text{（种）}.$$

例6 由0、1、2、3、4、5、6这7个数字，可以组成

(1) 多少个四位数，其中有多少个奇数，有多少个偶数？

(2) 多少个没有重复数字的四位数，其中有多少个奇数，多少个偶数？

解 (1) 我们一位一位来考虑.

这个四位数的最高位不能是0，因此，最高位有6种选法(即选1～6中的任一个数字).其余各位，可以从0～6这7个数字中任选，因此，都有7种不同的选法，因此，共有$6\times7\times7\times7=2058$个四位数.

在这些四位数中，奇数的个数也可用类似方法获得，即：

最高位不能为0，共有6种选法；百位，十位可从0～6中任选，各有7种选法；个位数字只能为1，3，5，共有3种选法.因此，其中的奇数个数为$6\times7\times7\times3=882$.

在这些四位数中，偶数的个数可用下面两种方法获得.

第一种，与获得奇数个数的方法完全一样，不难得到，偶数的个数为$6\times7\times7\times4=1176$.

第二种，偶数的个数等于所有四位数的个数减去其中的奇数个数，即其个数为$2058-882=1176$.

(2) 我们用同样的方法来考虑有多少个没有重复数字的四位数.

最高位不能是0，因此只能有6种选法；百位不能与最高位的数字相同，所以在0～6这7个数字中去掉最高位所选的数字，共有6种选法；十位不能与百位和最高位相同，故共有5种选法；个位不能与十位、百位及最高位相同，故共有4种选法.所以，没有重复数字的四位数共有$6\times6\times5\times4=720$个.

其中奇数的个数可通过下面的方法得到：个位数字只能为1，3，5，共有3种选法；最高位不能为0，也不能与个位相同，因此，最高位有5种选法；百位不能与个位和最高位相同，故有5种选法；十位不能与个位、最高位及百位相同，故有4种选法，因此，其中奇数的个数为：$3\times5\times5\times4=300$.

其中偶数的个数为：$720-300=420$.

说明 我们在求没有重复数字的偶数时，也可用下面的方法：这样的偶数可分为两类，一类个位数字为 0，则显然千位有 6 种、百位有 5 种、十位有 4 种取法，故有 $6\times5\times4=120$ 种；另一类个位为 2、4、6，3 种取法. 这时千位有 5 种(不为 0 及与个位不同)，百位有 5 种(不与个位与千位同)，十位有 4 种方法，故有 $3\times5\times5\times4=300$ 种；由加法原理，这样的偶数共有 $120+300=420$ 种. 结果和前面一致. 这种解法综合应用了加法原理与乘法原理.

请大家想一想，我们为什么要分个位为 0 与个位不为 0 两种情况？

例 7 将十个人任意分成甲、乙两组，每组至少 1 人，问有多少种不同的分法？

解 由于每个人都可分在甲组，也可分在乙组，即有 2 种分法. 因此，由乘法原理知，10 个人共有 $\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{10个2}=2^{10}=1024$ 种不同的分法.

但在这 1 024 种分法中，有一种是 10 个人全在甲组，乙组没人；另一种是全在乙组而甲组没人. 这两种情况都不符合题意，因此，符合题意的分法共有 $1024-2=1022$ 种.

说明 有时我们先求出总的种数，然后去掉一些不符题意的. 这种做法常常有很好的效果.

练　习　题

A　组

1. 书架上共有三排书，第一排共有 12 本书，第二排共有 20 本书，第三排共有 15 本书，小明从中取一本书来阅读，问他共有几种不同的取法？

2. 某班有男生 18 人，女生 15 人，现从中选出一人去参加夏令营，问有多少种不同的选法？

3. 第一个口袋中装 2 个球，第二个口袋中装 4 个球，第三个口袋中装 5 个球，所有三个口袋中的球各不相同.

(1) 从口袋中任取一个小球，共有多少种不同的取法？

(2) 从三个口袋中各取一个球，问有多少种不同的取法？

4. 如图 25-2，从甲地到乙地有两条路，从乙地到丙地有三条路，从甲地到丙地有四条路，问从甲地到丙地共有多少种不同的走法？

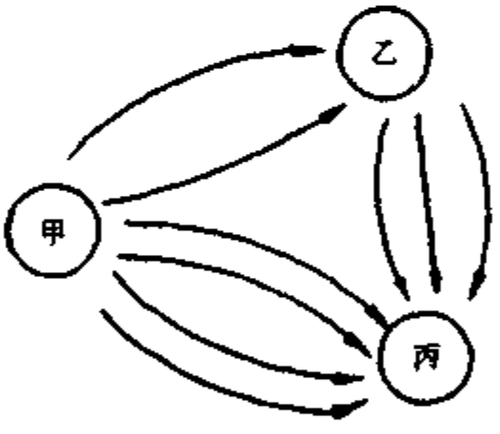


图 25-2

5. 把多项式

$$(a_1+a_2+a_3)\cdot(b_1+b_2+b_3+b_4)\cdot(c_1+c_2)$$

展开，问展开式中有多少种不同的项？

6. 求 2 000 的正约数的个数.

7. 用 1、2、3、4 这四个数字可组成多少个不同的三位数？

8. 将 6 个人分成两组，每组至少 1 人，问有多少种不同的分法？

B　组

9. 用 2、3、4 这三个数字组成没有重复数字的三位数.

(1) 求所有这些三位数的数字和的和.

(2) 求所有这些三位数的和.

10. 2 000 有多少个正约数？在这些正约数中，有多少个偶数？

11. 用数字 0、1、2、3、4 可以组成多少个

(1) 四位数？

(2) 四位偶数？

(3) 没有重复数字的四位数？

(4) 没有重复数字的四位偶数？

(5) 没有重复数字的正整数？

12. 三封信，随机地投入四个信箱中，问共有多少种不同的投信方法？

13. 5 人站成一排照相，其中一人必须站在中间，有多少种站法？

14. 有多少个被 3 整除并且含有数字 9 的三位数？

测　试　题

1. 一个学生要从 2 本科技书，3 本文艺书，4 本外文书中任选一本，共有多少种不同的选法？

2. 某人到食堂吃饭，主食有 3 种，副食有 5 种，主副食各选一种，问他有多少种不同的选法？

3. 书架第一排有 10 本书，第二排有 8 本书，第三排有 11 本书，某人要从三排书中各取一本，问有多少种取法？

4. 求 720 的正约数的个数，并求这些正约数的和.

5. 将 5 个人分成两组，每组至少一人，共有多少种不同的分法？

6. 由 1、2、3、4、5 这五个数可以组成

(1) 多少个四位数？其中有多少个奇数？

(2) 多少个没有重复数字的四位数？其中有多少个是 3 的倍数？

第二十六讲　抽屉原理

一、知识要点和基本方法

抽屉原理又称鸽巢原理，它是组合数学的一个基本原理，最先是由德国数学家狄利克雷明确地提出来的，因此，也称为狄利克雷原理.

把3个苹果放入2个抽屉中，一定有一个抽屉中放了2个或2个以上的苹果，这个人所皆知的常识就是抽屉原理在日常生活中的体现. 道理虽简单，但它是解决存在性问题的常用方法，用它可以解决一些相当复杂甚至无从下手的问题.

抽屉原理的常用形式有

原理一　把 $n+1$ 个元素放入 n 个集合内，则一定有一个集合里有二个或二个以上的元素.

原理二　把 m 个元素任意放入 $n(n<m)$ 个集合里，则一定有一个集合里至少有 k 个元素，其中：

$$k=\begin{cases}\dfrac{m}{n}, & (\text{当 } n \text{ 能整除 } m \text{ 时})\\ \left[\dfrac{m}{n}\right]+1. & (\text{当 } n \text{ 不能整除 } m \text{ 时})\end{cases}$$

$\left(\left[\dfrac{m}{n}\right]$ 表示不大于 $\dfrac{m}{n}$ 的最大整数，亦即 $\dfrac{m}{n}$ 的整数部分$\right)$.

原理三　把无穷多个元素放入有限个集合里，则一定有一个集合里含有无穷多个元素.

二、例题精讲

例1　班上共50名学生，将书分给大家，至少要拿多少本书，才

能保证至少有一个学生能得到两本或两本以上的书？

解 把50名学生看作50个“抽屉”，把书看作“苹果”.根据抽屉原理，书的数目应多于学生数，即书至少需要 $50+1=51$ 本，才能满足要求.

例2 11名学生到老师家借书，老师的书房中有 A、B、C、D 四类书.每名学生最多可借两本不同类的书，最少借一本，试证明：必有两个学生所借的书的类型相同.

证明 若学生只借一本书，则不同类型有 A、B、C、D 四种；若学生借两本不同类型的书，则不同的类型有 AB，AC，AD，BC，BD，CD 六种.共有十种情况.把这十种情况看作十个“抽屉”，把11名学生看作“苹果”，如果谁借哪种类型的书，就进入哪个抽屉.由抽屉原理，至少有两个学生，他们所借的书的类型相同.

说明 能否合理、正确地制造出“抽屉”，是解决这一类问题的关键，也是掌握和运用抽屉原理的关键.我们应该根据题目的条件和结论，结合有关的数学知识，抓住最基本的数量关系，设计出解决问题所需的抽屉及其个数，为使用抽屉原理解题铺平道路.

以上两个例题，都是学生借书.但有时要把学生当“抽屉”，把书当“苹果”；有时又把书当“抽屉”，学生当“苹果”.因此，要因题而异，灵活掌握，不能一概而论.下面给出一些常用的“抽屉”.

例3 能否将 5×5 的方格（如图26-1）的每个小方格中分别填上4、5、6这三个数之一，而使 5×5 的方格的每行，每列及两条对角线上的五个数字的和各不相同？为什么？

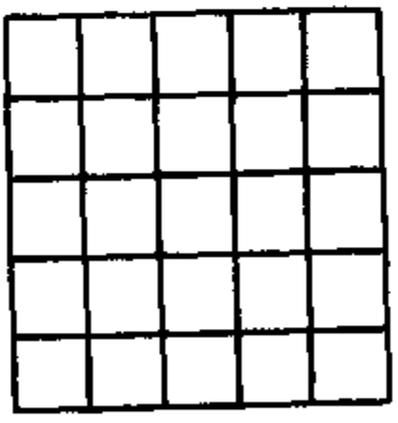


图 26-1

解 不能.

在 5×5 的方格中填入4、5、6这三个数.每行、每列或两条对角线上的五个数字的和最小为 $4\times5=20$（即这五个数恰好都是4），最大为 $6\times5=30$（即这五个数恰好都是6）.因为五个数的和为整数，所以共有11种互不相同的值（即20～30间的所有整数值）.把这11个互不相同的值作为11个“抽屉”，而 5×5 的方

格的 5 行、5 列及 2 条对角线上的和共有 12 个，根据抽屉原理，其中必有两个或两个以上的和是相同的.

说明 上例以一些数的和作为抽屉.

例 4 将 9 个点任意放在一个边长为 2 的正方形中，若任意三点不在同一直线上，那么至少存在一个以这些点为顶点的三角形，它的面积不超过$\frac{1}{2}$.

证明 将边长为 2 的正方形划分为 4 个相同的小正方形，如图 26-2. 把四个小正方形作为“抽屉”，将 9 个点作为“苹果”，由抽屉原理二知，至少有一个小正方形，其中至少包含了 9 个点中的$\left[\frac{9}{4}\right]+1=3$个点(如图中的 A，B，C 三点)，由于 A、B、C 三点在一个边长为 1 的正方形中，因此，三角形 ABC 的面积不超过$\frac{1}{2}$.(见前面面积这一讲)命题得证.

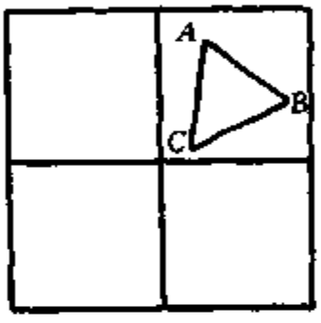


图 26-2

说明 上例利用几何分割的方法来制造抽屉.

例 5 平面上有 A、B、C、D、E、F 六个点，其中没有三点共线，每两点之间都用红线或蓝线连接，求证：不管怎样连接，至少存在一个三边同色的三角形.

证明 从六个点中任取一点，不妨设为 A，在连接其余五点的五条线段中，至少有$\left[\frac{5}{2}\right]+1=3$条同色(这是把红、蓝两色作为抽屉，把五条线段作为“苹果”，由抽屉原理二得到). 不妨设其中的 AB，AC，AD 为红色线段. 这时，在三条线段 BC，BD，CD 中，若有一条为红色(如 BC 为红色)，则得到一个三边为红色的三角形($\triangle ABC$). 否则，BC，BD，CD 都是蓝色，则$\triangle BCD$ 是三边同为蓝色的三角形.

说明 本题是著名的同色三角形问题. 本题也可以换一个说法：在任意 6 个人之间，必有 3 个人互相认识或有 3 个人互相都不认识.

例 6 从 1 到 100 这 100 个自然数中任取 51 个，求证：其中必有两个数，它们的差是 50.

证明 将 1 到 100 这 100 个自然数按下列方法分成 50 组：{100，50}，{99，49}，{98，48}，…，{51，1}. 每一组中有 2 个数，它们的差恰好是 50. 现在将这 50 个组作为 50 个抽屉，任取的 51 个数中至少有 2 个数来自同一抽屉，这两个数的差就是 50.

说明 上例是利用数组作为抽屉，它将符合条件的数放在一起，组成一个数组，然后将这些数组作为抽屉，这种构造抽屉的方法是很常用的，再举一例.

例 7 从 1，2，…，10 这 10 个自然数中，任取 6 个，则至少有二个数，其中一个是另一个数的倍数.

证明 将 1，2，…，10 这 10 个自然数按以下方法分成五个数组，即

$$A = \{1, 2, 4, 8\}, B = \{3, 6\},$$

$$C = \{5, 10\}, D = \{7\}, E = \{9\}.$$

将这五个数组作为五个“抽屉”，从 10 个数中任取 6 个就是从这五个“抽屉”中任取 6 个数. 根据抽屉原理，至少有两个数在同一个抽屉中，亦即在同一类数组中，由于 D 和 E 两组中只含有一个数，所以这两个数不可能出现在 D、E 组中. 因此，这两个数必在 A、B、C 三个数组的某一个中，而这三个数组的任一个中，所取的大数必是小数的倍数.

例 8 任取 n 个自然数（$n \geqslant 1$），证明：在这 n 个自然数中，或者有一个数是 n 的倍数，或者有两个数的差是 n 的倍数.

证明 若 n 个自然数中有一个是 n 的倍数，则结论成立. 设 n 个自然数中没有一个数是 n 的倍数，则这些自然数除以 n，所得的余数必为 1，2，…，$n-1$ 中的一个. 将所得余数相同的数归为一类，共有 $(n-1)$ 类. 将这 $(n-1)$ 类作为 $(n-1)$ 个“抽屉”，n 个自然数作为“苹果”. 根据抽屉原理，其中必有两个数在同一类中，即这两个数除以 n 所得的余数相同. 因此，这两个数的差是 n 的倍数.

说明 以正整数 n 为模（即为除数），可把全体整数按余数分成 n 类：凡余数相同的归为一类. 由于余数可以是 0，1，…，$n-1$. 所以可把全体整数分成 n 类，这 n 类称为关于模 n 的剩余类. 用模 n 的

剩余类制造抽屉也是解题的基本方法之一.

另外,例 8 的结论也很有用,用它可以使一些问题的解答显得很简单. 如:

例 9 求证:1 999 个数 1, 11, 111, … $\underbrace{111\cdots11}_{1\,999个1}$ 中必有一个是 1 999的倍数.

证明 若这 1 999 个数中没有一个是 1 999 的倍数,由例 8,其中必有两个数的差是 1 999 的倍数,不妨设这两个数是 $\underbrace{11\cdots11}_{i个}$ 与 $\underbrace{11\cdots11}_{i+j个}$($1 \leqslant i < i+j \leqslant 1\,999$). 则 $\underbrace{11\cdots11}_{i+j个} - \underbrace{11\cdots11}_{i个} = \underbrace{11\cdots11}_{j个}\underbrace{00\cdots00}_{i个} = \underbrace{11\cdots11}_{j个} \times 10^i$, 是 1 999 的倍数,而 1 999 与 10^i 是互质的,因此, $\underbrace{11\cdots11}_{j个}$ 是 1 999 的倍数,矛盾.

所以,命题得证.

从上面的例子看出,解决这类问题的关键是"制造抽屉". 抽屉原理本身不难理解,解题时也用不到高深的数学知识,但要运用自如,还必须进行大量的练习.

练　习　题

A　组

1. 在一个班级中，任意挑出 13 个人. 这 13 个人中，至少有两个人属相一样.

2. 一个乒乓球运动员一分钟击球 65 次，试证明总有某一秒钟内，他击球的次数超过一次.

3. 证明：一个边长为 1 的正三角形内的任意 5 点中，必有两个点，它们的距离不超过$\frac{1}{2}$.

4. 任意给定 11 个自然数，试证明其中至少有两个数，它们的差是 10 的倍数.

5. 从 1 到 100 这 100 个自然数中任取 51 个，证明在选取的这些整数中至少存在两个整数，一个是另一个的倍数.

6. 从 1，3，5，…，15 这 8 个数中，任选 5 个，试证明其中有两个数的和是 16.

7. 试证明：任意 6 个人之间，或者有 3 个人互相认识，或者有 3 个人互相都不认识.

8. 盒中装有红球 3 个，蓝球 5 个，白球 7 个，问至少取出多少个球，才能保证取出的球中有两个球的颜色相同？

B　组

9. 盒中装有红球 3 个，蓝球 5 个，白球 7 个，问至少要取出多少个球，才能保证取出的球中，各种颜色的球都有？

10. 有 17 人互相通信，讨论三个问题，每两个人之间的通信，只讨论某一问题，试证：至少有三个人，他们互相之间的通信所讨论的是同一个问题.

11. n 个自然数构成数列：a_1，a_2，…，a_n. 求证：这数列中一定有连续的若干个数的和能被 n 整除.

12. 试证明：在 17 个不同的正整数中，必定存在若干个正整数，仅用减号，乘号和括号可将它们组成一个算式，算式的结果是 21 879 的倍数.

13. 任意的 52 个自然数中，必有两个数的和或差为 100 的倍数.

14. 老同学聚会，互相握手. 试证明：至少有两个人握手的次数是相同的.

测 试 题

1. 街上共有 12 个邮筒，某一天共有 15 位市民每人各寄一封信，试证明不论他们如何投递，必有一个邮筒中有两封或两封以上的信件.

2. 体育室有足球，排球，篮球. 上体育课前，老师要求同学每人拿两个球到操场，问至少由多少个学生来拿球，才能保证有两个人所拿的球完全一样？

3. 任意给定 n 个自然数（$n \geqslant 2$），试证明至少有两个数，它们的差是（$n-1$）的倍数.

4. 从 1 到 20 这 20 个自然数中任取 11 个，试证明其中至少存在两个数，一个是另一个的倍数.

5. 从 1，3，5，…，15 这 8 个数中，任取 6 个，试证明其中有两个数的和是 18.

6. 试证明：在 11 个不同的正整数中，必定存在若干个整数，可以仅用减号、乘号和括号将它们组成一个适当的算式，使算式结果是 2 000 的倍数.

第二十七讲　应用题精选

一、知识要点和基本方法

我们在第七讲曾讨论过列方程或方程组解应用题，给出了列方程(组)解应用题的一般步骤.

在列方程(组)解应用题时，很关键的一步是设未知数.设未知数的方法有两种，一种是设直接未知数，即题中要求什么就设什么为未知数；另一种是设间接未知数，如果设直接未知数不易列出方程(组)，可以适当地选择另一个有关的量为未知数，从而列出易于理解的方程(组).此外，有时还需要设辅助未知数.

二、例题精讲

例 1　小华对妈妈说："妈妈，我到您现在这么大时，您就 70 岁啦！"妈妈对小华说："我像你这么大时，你只有 1 岁."问小华和他妈妈今年几岁？

解　设今年小华 x 岁，他的妈妈 y 岁，年龄差为 $(y-x)$. 由题意，当小华和他妈妈现在的年龄一样大，即小华 y 岁时，他妈妈 70 岁.此时，年龄差为 $(70-y)$. 由于不管何时，小华和他妈妈的年龄差不变.因此，有：$y-x=70-y$. 同理，当他妈妈像小华这么大，即 x 岁时，小华只有 1 岁，此时，年龄差为 $(x-1)$，因此，又有 $y-x=x-1$，即得方程组

$$\begin{cases} y-x=70-y, \\ y-x=x-1. \end{cases}$$

解之得 $\begin{cases} x=24, \\ y=47. \end{cases}$

答　今年小华 24 岁，他妈妈 47 岁.

说明　本题是一个年龄问题. 主要抓住年龄差不变的特点，找等量关系，列方程组.

例 2　一元钱能买 8 分邮票和 4 分邮票共 17 张，问这两种邮票各买多少张？

解　设买了 8 分邮票 x 张，则 4 分邮票买了 $(17-x)$ 张，由题意可得：

$$8x+4(17-x)=100.$$

解之得　$x=8.$

所以　$17-x=17-8=9$(张).

答　8 分邮票买了 8 张，4 分邮票买了 9 张.

说明　本题属于“鸡兔同笼”问题，在小学阶段我们用假设法来求解，现在我们用列方程的方法来求解，可以比较一下这两种方法的难易程度. 一般地，由于我们引进了未知数，使我们考虑问题的思路可以顺着题意发展，因此，用列方程来解应用题往往要比小学时用算术方法来解应用题显得更加简单.

例 3　汽车在平路上每小时行 30 千米，上坡路每小时行 28 千米，下坡路每小时行 35 千米，现在有 142 千米的路程，去的时候用时 4 小时 30 分钟，回来时用时 4 小时 42 分钟，这段路平路有多少千米？去的时候上坡路、下坡路各有多少千米？

解　设这段路平路有 x 千米，去的时候上坡路有 y 千米，下坡路有 z 千米. 显然，在回来时，它的上坡路即去时的下坡路，故有 z 千米，它的下坡路即为去时的上坡路，故有 y 千米，依题意，有：

$$\begin{cases} x+y+z=142, \\ \dfrac{x}{30}+\dfrac{y}{28}+\dfrac{z}{35}=4\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{x}{30}+\dfrac{z}{28}+\dfrac{y}{35}=4\dfrac{7}{10}. \end{cases}$$

解之得　$\begin{cases} x=30, \\ y=42, \\ z=70. \end{cases}$

答　这段路平路有 30 千米，去时的上坡路有 42 千米，下坡路有 70 千米.

说明　这是一个行程问题，行程问题是初中常见的应用题. 它用到的主要关系式是：速度 × 时间 = 距离；距离 ÷ 时间 = 速度；距离 ÷ 速度 = 时间. 当然，与行程问题有关的问题很多，如追及和相遇问题，圆周运动问题，流水问题等，大家应在解题过程中注意这些问题的特点，限于篇幅，本讲只举一个流水问题的例子.

例 4　甲船顺水航行 2 小时，行了 120 千米，返回原地用了 4 小时，乙船顺水航行同一段水路，用了 3 小时，问乙船返回原地要用多少小时？

解　设甲、乙两船在静水中的速度分别为每小时 x 千米与每小时 y 千米，水流速度为每小时 z 千米，由题意，得

$$\begin{cases} 120 \div 2 = x + z, \\ 120 \div 4 = x - z, \\ 120 \div 3 = y + z, \end{cases}$$

解之得：$x = 45$，$y = 25$，$z = 15$.

所以，乙船返回原地要用：$120 \div (25 - 15) = 12$（小时）.

答　乙船返回原地要用 12 小时.

说明　(1) 流水问题经常会涉及到几个速度，有水流速度，船的静水速度和顺水速度，逆水速度，应该知道这些速度之间的关系，即：顺水速度 = 静水速度 + 水速；逆水速度 = 静水速度 − 水速，然后根据行程问题的关系式列方程.

(2) 本题采用设间接未知数的方法. 一般地，设未知数的方法有两种，第一种是设直接未知数，即题目里求什么就设什么未知数. 如前面的例 1 到例 3 就是设直接未知数的；第二种方法，就像本例，称为设间接未知数，如果某些问题设直接未知数不易求解，可以设另一个有关的量为未知数. 这种方法有时能使解题更加简捷、方便.

设未知数是列方程解应用题的重要一步，设未知数的合理与否，有时会直接影响解题的难易程度.

例 5　一水池有甲、乙两个进水龙头和一个出水龙头丙. 如果同

时打开甲、丙两龙头，3 小时可注满水池；如果同时打开乙、丙两龙头，4 小时可注满水池；当池水满时，打开丙，8 小时后，再打开甲和乙（此时丙仍开着），2 小时后水池又可注满，那么单独打开甲，多少小时可注满水池？

解 设单独打开甲、乙，分别在 x 与 y 小时注满水池；单独打开丙，z 小时可将满池水放尽. 根据题意，有：

$$\begin{cases}\dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{z}=1\\[2ex]\dfrac{4}{y}-\dfrac{4}{z}=1\\[2ex]1-\dfrac{8}{z}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{2}{z}=1\end{cases}\quad(z>8)\quad\text{或}\quad\begin{cases}\dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{z}=1,\\[2ex]\dfrac{4}{y}-\dfrac{4}{z}=1,\\[2ex]\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{2}{z}=1\end{cases}\quad(z\leqslant 8).$$

$$\text{解之得}\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{13}{36}\\[2ex]\dfrac{1}{y}=\dfrac{10}{36}\\[2ex]\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{36}\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{4},\\[2ex]\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6},\\[2ex]\dfrac{1}{z}=-\dfrac{1}{12}.\end{cases}\quad(\text{舍去})$$

所以，$x=\dfrac{36}{13}$.

答 单独打开甲，$\dfrac{36}{13}$小时可注满水池.

说明 (1) 本题设了两个辅助未知数 y 与 z 来解决问题. 一般地，若题目给出的条件比较多，涉及的量也比较多，而要求的量很少时，可以设一些辅助未知数来帮助列出方程或方程组.

(2) 本题分 $z>8$ 及 $z\leqslant 8$ 两种情况，列出两个方程组. 因为当 $z>8$ 时，打开丙 8 小时，池水还未放完，而当 $z\leqslant 8$ 时，打开丙 8 小时，池水已经放完. 但本题当 $z\leqslant 8$ 时，解得 $\dfrac{1}{z}=-\dfrac{1}{12}<0$，即 $z=-12<0$，故不合题意，应舍去该组解. 因此，本题只有一个解.

(3) 本题是一个工程问题，它用到的主要关系式为：工作效率 × 工作时间 = 工作总量；工作总量 ÷ 工作时间 = 工作效率；工作总量 ÷ 工作效率 = 工作时间. 而且，若工作总量没有给出具体的值，

我们通常把工作总量看作 1.

(4) 本题所列的方程组，求解时应把$\frac{1}{x}$、$\frac{1}{y}$、$\frac{1}{z}$看作整体，切不可把它们通分后求解. 否则，它不是一个一次方程组，而且求解也比较麻烦. 即为了求得 x、y、z，应先求出$\frac{1}{x}$、$\frac{1}{y}$、$\frac{1}{z}$.

例 6 有大、小两个两位数，在大数的右边写上一个 0 之后再写上小数，得到一个五位数；在小数的右边写上大数后再写上一个 0，也得到一个五位数. 第一个五位数除以第二个五位数得到的商为 2，余数为 590. 另外，大数的两倍与小数的三倍的和是 72，求这两个两位数.

解 设大、小两个两位数分别为 x 与 y，则由题意得，第一个五位数为 $1\,000x + y$，第二个五位数为 $1\,000y + 10x$. 根据题意，得：

$$\begin{cases} 1\,000x + y = 2(1\,000y + 10x) + 590, \\ 2x + 3y = 72. \end{cases}$$

解之得：$\begin{cases} x = 21, \\ y = 10. \end{cases}$

答 这两个两位数分别为 21 和 10.

说明 这是一个关于数的应用题. 一般关于数的应用题都比较简单. 只要懂得倍数，除数，余数，偶数，奇数等的意义，就可以根据题意列方程了. 本题是一个与十进制有关的问题. 应当知道数的十进制表示. 如：k 位数 $\overline{a_1a_2\cdots a_k} = a_1 \times 10^{k-1} + a_2 \times 10^{k-2} + \cdots + a_k$. 又如：$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5} = \overline{a_1a_2} \times 10^3 + a_3 \times 10^2 + \overline{a_4a_5}$ 等. 希望大家熟悉这种表示法. 它在数学竞赛中经常出现.

数的问题，行程问题，工程问题在初中数学应用题中经常出现，所以应该特别加以注意. 另外，在数学竞赛中，经常出现一类问题，称为时钟问题. 如下例.

例 7 在八点到九点之间，时针与分针在什么时刻重合？

解 设从八点钟开始，x 分钟后两针重合，在八点整，时针指向 8，分针指向 12，所以下一次重合，分针要追过 240°(如图 27-1). 分针

每分钟转过 $6°\left(=\frac{360°}{60}\right)$，时针每分钟转过 $\left(\frac{1}{2}\right)°\left(=\frac{360°}{60}\times\frac{5}{60}\right)$，因此有

$$6x-\frac{1}{2}x=240,$$

解之得 $x=43\frac{7}{11}$.

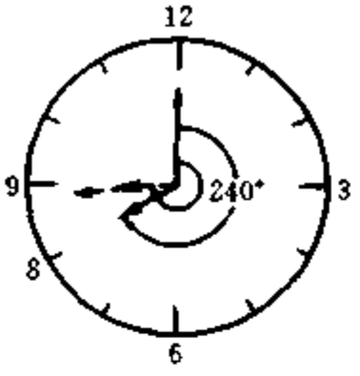


图 27-1

答 八点 $43\frac{7}{11}$分，两针重合.

说明 时钟问题往往与行程问题中的追及问题类似，因此，可用类似的方法来解决问题. 在时针问题中，要知道下列一些知识：旋转一圈即转过 360°，钟表面分为 12 格，每一格为 $\frac{360°}{12}=30°$，因此，时针一小时转过一格，即 30°，分针旋转 $\frac{1}{60}\times30°=\left(\frac{1}{2}\right)°$. 分针一小时转一圈，即 360°，因此，每分钟分针转 $\frac{360°}{60}=6°$.

总之，在全面理解题意的基础上，设出未知数，抓住数量关系，列出方程，是列方程解应用题的关键. 在列方程解应用题的过程中，一般需要用到许多其他的知识和一些生活常识，这些都需要大家在平时的学习中不断积累.

练　习　题

A　组

1. 有两桶水，甲桶的水是乙桶的水的 3 倍，如果把甲桶的水倒 6 升到乙桶，则甲桶的水是乙桶的水的 2 倍，问原来甲桶和乙桶各有多少升水？

2. 甲乙两地相距 500 千米. A、B 两列车分别从甲乙两地同时出发。若两车相向而行，则 2 小时后相遇；若两车同向而行，则 20 小时后 A 追上 B，问 A、B 两列车的速度各是多少？

3. 三辆汽车同时从同一地点出发，追赶前面一个骑自行车的人. A 车用 6 分钟，B 车用 10 分钟，C 车用 12 分钟分别追上骑车人. 已知 A 车每小时行 72 千米，B 车每小时行 60 千米，问 C 车每小时行多少千米？

4. 两地相距 280 千米，一艘轮船在两地间往返航行，顺流用 14 小时，逆流用 20 小时，求这艘轮船在静水时，要用去多少时间才能行驶这段距离？

5. 哥哥与弟弟两人 3 年后的年龄和为 27 岁. 弟弟今年的年龄正好等于两人的年龄差. 问他俩今年各几岁？

6. 松鼠妈妈采松子，晴天每天可采 20 个，雨天每天可采 12 个，它一连几天采了 112 个松子，平均每天采 14 个，问这几天中有几天下雨？

7. 甲、乙二人共同做一件工作需 10 小时完成，现在两人共同工作 4 小时后，甲因故离开，余下的工作由乙单独完成，乙又做了 18 小时才完工，问甲、乙二人单独做这件工作，各需多少小时？

8. 一个三位数，数字和为 17，个位数字比十位数字大 1，百位数字是十位数字的 2 倍，求这个三位数.

9. 今有四个数，取其中的每三个相加，和分别为 12，20，17，29. 求这四个数.

B 组

10. 某工程，若甲、乙两人同做，需 5 天完成；若甲、丙两人同做，需 8 天完成；若乙、丙两人同做，需 7 天完成，问甲、乙、丙三人单独做，各需多少天才能完成？

11. 设六位数$\overline{2abcde}$乘以 3 后，变为$\overline{abcde2}$，求这个六位数.

12. 有一个三位数，数字各不相同. 将这个三位数的数字重新排列，所得的最大数与最小数之差恰好是原来的三位数，试求这个三位数.

13. 在四点钟与五点钟之间，时针与分针成一直线(不重合). 问这时是几点几分？

14. 在八点与九点之间，什么时候时针与分针恰好成 15°角？

测 试 题

1. 今年哥哥和弟弟的年龄和是 55 岁. 当哥哥的岁数是现在弟弟的岁数时，哥哥的岁数恰好是弟弟的两倍. 问哥哥和弟弟今年的年龄分别是多大？

2. 一个两位数，除以它的数字和，商为 6，余数为 3；如果把这个两位数的十位数字与个位数字对调，得到一个新的两位数，除以它的数字和，商为 4，余数为 9. 求这个两位数.

3. 甲数是乙数的 6 倍，若甲数增加 18，乙数增加 30，则甲数是乙数的 3 倍. 求甲、乙两数.

4. 甲、乙两人做一件工作，甲的效率是乙的 2 倍. 现让甲先做完这件工作的$\frac{2}{3}$，然后，乙继续做完，则所需的时间比甲、乙两人同时做，做完这工作所需的时间多 4 天. 问甲、乙两人单独做这项工作，各需多少天完成？

5. 甲、乙两地相距 72 千米，某船顺流而下，需要 3 小时，返航时逆流而上，需要 4 小时，问该船的静水速度是多少？

6. 十点到十一点之间，时针与分针什么时间恰成一直线(不重合)？

第二十八讲　生活中的数学

一、知识要点和基本方法

“大自然是以数学的语言说话的.”生活中随处可以看到数学的踪影.因此,我们以“生活中的数学”结束这一分册.本讲的题目比较“杂”,但趣味性强,解题方法灵活,技巧性强.它对于开拓解题思路,增强数学应用的能力是很有益处的.

二、例题精讲

例1　有人带了一头羊,一条狗和一筐菜要过一条河.因为船太小,一次只能带一样东西,但是人不在时,狗要咬羊,羊要吃菜,请大家帮他想一想,应该怎样安排过河?

解　注意一下本题的条件,即人不在时,狗要咬羊,羊要吃菜.因此,羊是主要的,它和狗与菜都有联系(既可以被狗咬,又可以吃菜),而狗和菜却是可放在一起的,利用这一点,我们就找到了解决的办法:人第一次把羊带过河去,然后自己划回来;第二次把狗带过河去,把羊带回来;第三次把菜带过河去,自己划回来;最后一次把羊带过河去.这样,他就可以把狗、羊、菜安全地带过河去了.

例2　图28-1所示,是一个工厂区的平面图,一条公路(粗线)通过这个地区,七个工厂A_1,A_2,…,A_7分布在公路两侧,各由一些小路(细线)与公路相连,现要在公路上设一个汽车站,使各工厂到汽车站的距离之和最小.

(1) 这个车站应设在何处?为什么?

(2) 若在A_8处又建一工厂,并且沿图上虚线修一路,那么此时车站设在什么地方好?

解 (1) 车站应设在 D 点处. 设各工厂到 D 点的距离和为 w.

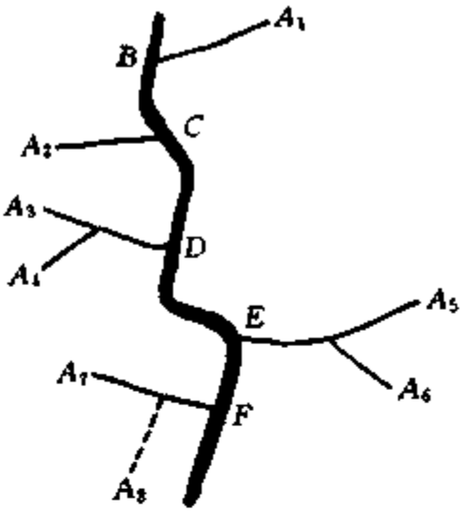


图 28-1

若车站由 D 点向 C 点的方向移动一段距离 d，位于 C，D 之间或 C 点时，则 A_1、A_2 到车站的距离都减少 d，而 A_3，A_4，A_5，A_6，A_7 到车站的距离都增加 d，所以这时各工厂到车站的距离和为：$w-2d+5d=w+3d>w$；同理，当车站自 C 再向 B 移动一段距离 d' 时，w 又增加了 $6d'-d'=5d'$；同理，当车站由 D 向 E 或 F 移动时，距离也会增加. 这就说明，把车站设在 D 点是最好的.

(2) 此时车站可设在 D 和 E 之间的任何一点. (包括 D 点和 E 点).

证明的方法和(1)类似，请大家自己给出.

说明 本题可以推广，即若有 n 个工厂，则车站应建在从中间的那一个工厂引出的小路与公路的相交处. 它符合各工厂到车站的距离之和最小这一要求. (如本例中，$n=7$，A_4 这一工厂在中间，它引出的小路与公路相交于 D 点，故只能选这一点；当 $n=8$ 时，由于 n 为偶数，所以 A_4，A_5 都可以看作为中间的工厂，因此，它们引出的小路与公路的相交处 D 和 E 及 DE 之间的任一点都符合题意.)

例 3 用一个平底锅烙饼，每次只能放两张饼，烙熟一张饼需要 2 分钟(正、反面各需 1 分钟)，问烙熟 3 张饼至少要几分钟？怎样烙？

解 因为平底锅每次只能放两张饼，如果这两张饼正、反面都烙熟了，拿出来，需要 2 分钟；再把第三张烙饼烙熟，又需要 2 分钟，照这样的烙法，需要 4 分钟，但这种烙法，没有充分利用平底锅，因此，我们给出下面的烙法：

第一次烙 2 张，1 分钟后，这两张饼都熟了一面，这时把第一张饼翻面，第二张饼取出，放入第三张饼，又过 1 分钟后，第一张饼就烙熟了，把它取出，把第三张饼翻面，同时把已经烙过一面的第二张饼翻面放入，再过一分钟，这三张饼就全烙熟了. 这样，共需 3 分钟.

想一想，为什么 3 分钟是最少的？另外，若烙 10 张饼，至少需多少时间？烙 11 张饼呢？一般地，n 张饼呢？(分两种情况，当 $n=1$ 时，至少 2 分钟；当 $n>1$ 时，只需 n 分钟即可).

例 4 一个楼梯共有 10 级台阶，规定每步可以上一级或二级台阶，最多可以上三级台阶. 从地面到最高一级，一共有多少种不同的上法？

解 设 n 级台阶有 a_n 种上法.

我们从最简单的情况入手.

若只有 1 级，则只有一种上法，即 $a_1=1$.

若有 2 级，则有两种上法：一步一级再一步一级，或一步二级. 即 $a_2=2$.

若有 3 级台阶，则有 4 种迈法：(1)一步一级地上；(2)第一步上一级而第二步上二级；(3)第一步上二级而第二步上一级；(4)一步上三级，即 $a_3=4$.

若有 4 级台阶，则我们按第一步上的级数分三类讨论：

(1) 第一步上一级，还剩 3 级有 a_3 种上法.

(2) 第一步上二级，还剩 2 级有 a_2 种上法.

(3) 第一步上三级，还剩 1 级有 a_1 种上法.

于是，4 级的上法有

$$a_4=a_3+a_2+a_1=4+2+1=7(\text{种}).$$

同理，若有 5 级，那么不同的上法有

$$a_5=a_4+a_3+a_2=7+4+2=13(\text{种}).$$

一般地，若有 n 级，则不同的上法有

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}(\text{种}).\ (n>3)$$

本题共有 10 级，可以用下面方法算出.

$a_1=1$，

$a_2=2$，

$a_3=4$，

$a_4 = 4 + 2 + 1 = 7$,

$a_5 = 7 + 4 + 2 = 13$,

$a_6 = 13 + 7 + 4 = 24$,

$a_7 = 24 + 13 + 7 = 44$,

$a_8 = 44 + 24 + 13 = 81$,

$a_9 = 81 + 44 + 24 = 149$,

$a_{10} = 149 + 81 + 44 = 274$.

答　这个楼梯一共有 274 种不同上法.

说明　本题从最简单的情况入手,从中归纳、发现一般的规律,求得解决一般问题的方法.这可以说是科学发现的必由之路.通过数学的学习,培养归纳思维能力,可以使我们终生受益.

例 5　小红、小强和小华三名学生中,有一人把教室打扫得干干净净.事后,老师问他们三人是谁做的好事?

小红说:"是小强做的."

小强说:"不是我做的."

小华说:"不是我做的."

如果他们三人中有两人说了假话,一人说了真话,那么老师能判定是谁干的吗?

解　由题意,这件事只由小红,小强,小华中的一人干的,因此,我们可以用假设法来解决.

(1) 如果是小红干的,那么小红说了假话,小强和小华说的都是真话,这与两人说假话,一人说真话的条件相矛盾,所以,不是小红干的.

(2) 如果是小强干的,那么小红与小华都说了真话,这又与其中两人说假话的条件矛盾,所以,也不是小强干的.

(3) 如果是小华干的,那么小华和小红说的是假话,而小强说的是真话,与条件相符.

所以,这件好事是小华干的.

说明　在解决这个问题时,我们先作出假设,然后根据已知条件作出正确的推理.若推出矛盾,则说明假设不合理,因此得到与假设

相反的结果. 如果没有推出矛盾，则说明假设有其合理性. 应当是问题的一个答案. 如果其他可能的假设都被推翻，只有这一个合理的假设，那么这个假设就是问题的唯一的答案. 这种方法在我们解决逻辑问题时经常用到.

例 6 今有棋子 100 颗，甲、乙两人做取棋子的游戏，甲先取，乙后取，两人轮流各取一次，规定每次取 p 颗，(其中 p 为 1 或者 20 以内的任一质数，)不能不取. 谁最后取完谁为胜者. 问甲、乙两人谁有必胜的策略？

解 乙有必胜的策略.

由于 p 为 1 或 20 以内的质数，因此，p 或者为 2，或者可以表示为 $4k+1$ 或 $4k+3$ 的形式(k 是零或正整数). 乙可以采取下面的策略：

若甲取 2 颗，则乙也取 2 颗；

若甲取 $4k+1$ 颗，则乙取 3 颗；

若甲取 $4k+3$ 颗，则乙取 1 颗.

这样，每次甲、乙两人取走的棋子之和都是 4 的倍数. 由于 100 是 4 的倍数，因此，余下的棋子数必定还是 4 的倍数. 从而经过若干个回合的取法后，剩下的棋子数必为不超过 20 的 4 的倍数. 这时甲总不能取完全部棋子(因为 p 不是 4 的倍数). 从而最终乙可以全部取完获得胜利.

说明 本题中，甲虽然先取，但他并没有必胜的策略. 乙后发制人，根据甲所采取的策略，应对有序，最终获胜. 所以，谁能取得最后的胜利，首先要看他们所面临的情形，其次要看他们采取的策略，两者缺一不可.

想一想，本题中，若开始时只有 50 颗棋子，则情形又将如何？

练　习　题

A　　组

1. 一个西瓜切四刀，切成九块小西瓜片，吃完西瓜后，发现有 10 块西瓜皮，你能做到吗？

2. 用一个平底锅烙饼，每次只能放两张饼，烙熟一张需要 2 分钟(正、反面各需 1 分钟)，问烙熟 21 张饼至少需要几分钟？怎样烙？

3. 蜗牛爬井，井高 10 米，蜗牛白天爬 3 米，晚上掉下 2 米，问蜗牛几天可以爬出井去？

4. 缸中有一只青蛙，想跳出缸去，现知缸深 2 米，青蛙每次只能跳起 0.5 米，问青蛙跳几次才能跳出缸去？

5. 池塘中有一朵莲花，它每天都长大一倍，30 天就把整个池塘给遮满了，试问，这朵莲花在什么时候遮住半个池塘？

6. 如图所示，A_1，A_2，…，A_{10}表示 10 个工厂，粗线表示公路，细线表示工厂与公路相连的小路. 现想在公路上建一汽车站，使这十个工厂到车站的距离和最小. 车站应建在什么地方？

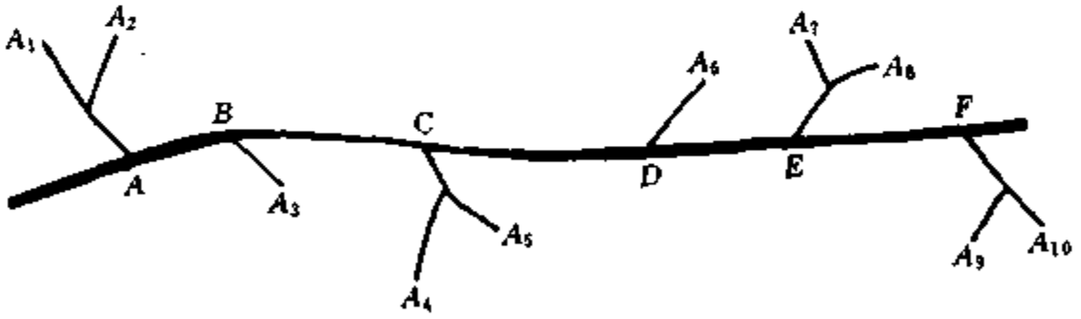


图 28-2

7. 27 颗珍珠，有一颗是假的，但外观和真的一样，只是比真的珍珠轻一点. 你能用天平称 3 次(不用砝码)就将假的珍珠找出来吗？

8. 某班有四个课外小组，第一组有 7 人，第二组有 10 人，第三组有 16 人，第四组有 18 人. 某天下午，学校有两个讲座，三个小组去听讲座，剩下一个小组打扫卫生. 如果听数学讲座的学生数是听语文讲座的学生数的 4 倍，问剩下的是哪一组？

B 组

9. 甲、乙两人轮流在黑板上写不超过 10 的自然数，甲先写，规定不许写黑板上已写过数的约数. 不能继续往下写的为失败者. 问甲乙谁有必胜的策略？

10. 现有 48 颗棋子，甲、乙两人轮流取，甲先取，规定最多只准取 4 颗，至少要取 1 颗，且谁取到最后的棋子，谁就获胜. 问甲、乙两人谁有必胜的策略？

11. 某学生在暑假里观察了 x 天的天气情况，其结果是

(1) 共有 7 个上午是晴天.

(2) 共有 5 个下午是晴天.

(3) 下午下雨的那天，上午是晴天.

(4) 共下了 8 次雨，在上午或下午.

问 x 的值为多少？

12. 某校有 A、B 两班，B 班中每个学生至少认识一位 A 班的学生，而 A 班每位学生不全认识所有 B 班学生. 试证明：可以从 A 班中找出两位学生 a_1 与 a_2，B 班中找出两位学生 b_1 和 b_2，使 a_1 与 b_1，a_2 与 b_2 互相认识，而 a_1 与 b_2，a_2 和 b_1 却互相不认识.

测 试 题

1. 用例 3 中的平底锅烙 1 999 个饼，至少需要多少分钟？

2. 现有 A、B、C、D、E、F 六名同学参加数学竞赛，其中两人得了满分. 关于谁得满分，有下面 5 种说法：

(1) A、C 得满分.

(2) B、F 得满分.

(3) B、E 得满分.

(4) A、F 得满分.

(5) D、A 得满分.

在上述五种说法中，有四种只说对了一半，有一种说得全不对，

请你推测一下，到底谁得了满分.

3. 一个楼梯共10级，规定每步可以上一级或二级，从地面到最高层，共有多少种不同的上法？

4. 现有棋子50颗.取的规则与例6完全一样，问甲、乙两人谁有必胜之策？

5. 9颗珍珠，其中有一颗是假的，但外观和真的一样，只是比真的珍珠轻一点，最少用天平称几次，(不用砝码)，就一定可以把假的珍珠找出来？

6. 现有棋子50颗，甲、乙两人轮流取，甲先取，规定最多只准取4颗棋子，至少要取一颗棋子，且谁取到最后的棋子，谁就获胜，问甲、乙两人谁有必胜的策略？

综合测试题(一)

一、填空

1. $(-1)^1-(-1)^2+(-1)^3-(-1)^4+\cdots+(-1)^{1999}-(-1)^{2000}=$_____.

2. $\frac{x}{|x|}-\frac{|x|}{x}=$_____.

3. 若 $(x+1)^2+|y-2|=-(2x-z)^2$，则 $x+y+z=$_____.

4. 不等式：$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{x}{16}+\frac{x}{32}>1$ 的解集为_____.

5. 关于 x 的方程

$$||x-2|-1|=a \quad (0<a<1)$$

的所有解的和是_____.

6. 若 $\frac{1}{a}+a=3$，则 $\frac{1}{a^2}+a^2=$_____.

7. 如图 1，$\triangle ABC$ 中，D 为 BC 边上一点，连结 AD，E 为 AD 上一点，连 BE，CE，若 $\triangle ABE$，$\triangle BDE$，$\triangle AEC$ 的面积分别为 7、3、5，则 $\triangle CDE$ 的面积为_____.

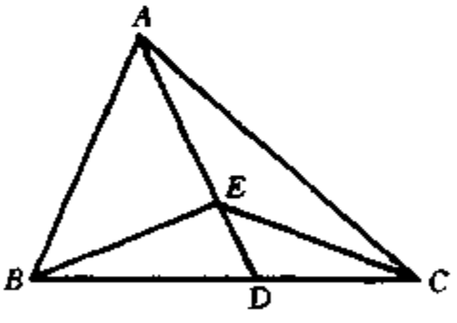


图 1

8. 能被 8 和 9 整除的最大的四位数是_____.

9. $100\times99\times98\times97\times\cdots\times3\times2\times1$ 的乘积中，末尾有_____个连续的零.

10. 四个杯子杯口全部朝上，每次同时翻转三个杯子，要使杯子杯口全部朝下，至少要翻_____次.

二、选择题

11. $\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\frac{1}{11\times14}+\frac{1}{14\times17}$ 的值为(　　).

(A) $\frac{15}{34}$　　(B) $\frac{5}{34}$　　(C) $\frac{3}{17}$　　(D) $\frac{5}{17}$

12. 若 $|x-3|+x-3=0$，则 x 的取值范围是(　　).

(A) $x=3$　　(B) $x=0$　　(C) $x\leqslant 3$　　(D) $x\geqslant 3$

13. 不定方程 $3x+7y=8$ 的正整数解的个数为(　　).

(A) 0 组　　(B) 1 组　　(C) 2 组　　(D) 3 组

14. 设 p 是任意三个相邻的正奇数的乘积. 整除所有这样的 p 的最大整数是(　　).

(A) 15　　(B) 6　　(C) 3　　(D) 5

15. 把 20 个球任意分成甲、乙两组，但每一组至少有一球. 共有(　　)种分法.

(A) 19　　(B) 38　　(C) $2^{20}-1$　　(D) $2^{20}-2$

三、解下列关于 x 的方程和不等式

16. $\frac{2x-9}{3}+\frac{x+5}{2}=\frac{2}{3}$

17. $m^2(1-x)=mx+1$

18. $||x-2|+1|=x$

19. $1-\frac{2x}{a^2}>\frac{x}{a}+\frac{4}{a^2}$

20. $|x-2|+|x+3|\leqslant 3$

四、解答题

21. 若 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，求 $\frac{y+2xy-x}{x+2xy-y}$ 的值.

22. 若多项式 $f(x)$ 除以 $(x-1)$、$(x-2)$，$(x-3)$ 所得的余数分别为 0、2、3. 试求 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 所得的余式.

23. 若两个正整数的和与它们的差相乘，积是 20，求这两个正整数.

24. 一水池用甲管注水，可以在 3 小时内使空池注满；用乙管放水，可以在 2 小时内使满池水放空；用丙管放水，可以在 4 小时内使满池水放空. 现先在空池内开甲管 1 小时，然后三管齐开，问什么时候水池放空？

25. 一个正整数，它的首位数字是 6，去掉这个 6 以后，得到一个新的整数，它恰好是原来整数的$\frac{1}{25}$. 求所有这样的正整数.

综合测试题(二)

一、填空

1. 已知 $x=2, y=-1$ 是二元一次方程 $2x+ky=5$ 的一组解. $k=$ _____.

2. 如果 $\frac{1}{x}=\frac{2}{y+z}=\frac{3}{z+x}$, 那么 $\frac{x}{z-y}=$ ____.

3. 已知 $x=5$ 时,代数式 ax^5-bx+3 的值是 8; $x=-5$ 时,这个代数式的值为_____.

4. 多项式 $x^{78}+x^{35}-x^{10}+x^7-x^3+x$ 除以 $x-1$ 所得的余数是_____.

5. 若 $x+y=1, x^2+y^2=2$, 则 $x^3+y^3=$ _____.

6. 除 1 999,所得的余数为 19 的自然数共____个.

7. 平面上 7 条直线,最多分平面为____部分.

8. 从 123456789101112…4950 中划掉 80 个数字,使剩下的数最大. 剩下的数字的和是_____.

9. 从 1 到 100 这 100 个正整数中,既不是 3 的倍数,又不是 5 的倍数的数有_____个.

10. 9 点____分时,时针与分针重合.

11. 如图 2, $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=$ _____.

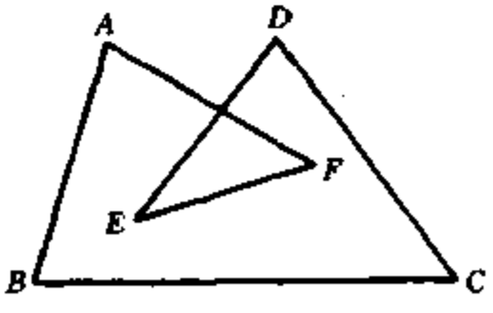


图 2

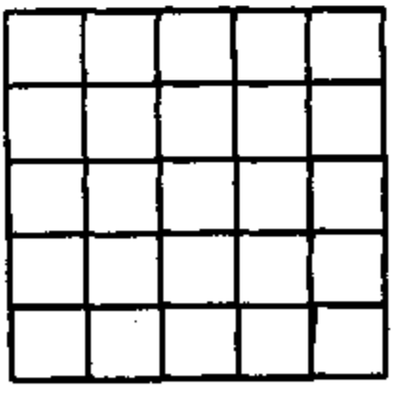


图 3

12. 图 3 是一个 5 × 5 的方格. 图中共有_____个长方形(包括

正方形),其中有_____个正方形.

13. 图3是一个5×5的方格,现在要把A、B、C、D、E五枚棋子放在方格里,每行和每列只能出现一枚棋子.共有_____种放法.

14. 如果方程$2(x+1)=mx+1$的解是负数,那么m的取值范围为_____.

15. 若自然数n分别加上5与7后,所得的数都是质数,则n被3除所得的余数是_____.

二、解答题

16. 已知方程组$\begin{cases}ax+by=-16,\\cx+20y=-224,\end{cases}$的正确解为$\begin{cases}x=8,\\y=-10,\end{cases}$小明粗心,把$c$抄错了,因此得到解为$\begin{cases}x=12,\\y=-13.\end{cases}$求$a$,$b$,$c$的值,并求小明把$c$抄错成什么数.

17. 已知$4x-3y-6z=0$,$x+2y-7z=0$$(xyz\neq0)$,求$\dfrac{2x^2+3y^2+6z^2}{x^2-5y^2+7z^2}$的值.

18. 若$(2x+1)^2+(x-3)^2=(3x-2)^2$,求$x$的值.

19. 若正整数$x<y<z$,且$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=a$,其中$a$为正整数,试求$x$、$y$、$z$.

20. 甲乙二人在一圆形跑道上跑步,甲用40秒就能跑完一圈,乙与甲反向跑,每隔15秒和甲相遇一次,求乙跑完一圈需要的时间.

三、证明题

21. 若$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$,求证$a=b=c$.

22. 如果有理数a、b满足$ab=1$,记$M=\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}$,$N=\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}$,求证$M=N$.

23. 已知p是大于3的质数,求证$24\mid(p^2-1)$.

24. 证明:在任何一群人中(人数至少为2人),至少有2人,他

们认识的人数相同.

25. 如果有理数 a、b、c，满足 $a+b+c=0$，$a^3+b^3+c^3=0$，试证明：$a^{1999}+b^{1999}+c^{1999}=0$.

习题解答

第一讲　有理数的巧算

练习题　1. 原式 $=(31-22+4+11)+\left(\frac{2}{7}+\frac{5}{7}\right)+\left(-\frac{6}{13}+\frac{6}{13}\right)$ $=25$　2. 原式 $=(5-3-7-3+8-3-2+6)+\left(\frac{6}{11}-\frac{4}{11}-\frac{2}{11}\right)+\left(-0.125+\frac{1}{8}\right)+\left(-\frac{4}{7}-\frac{6}{7}+\frac{3}{7}\right)=0$　3. 原式 $=\frac{7}{11}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}\times\frac{11}{3}\times\frac{8}{13}=\frac{4}{13}$　4. 原式 $=3.825\times\left(\frac{1}{4}+0.25+\frac{1}{2}\right)-1.825=2$　5. 原式 $=3.6\times\left(-0.25+\frac{1}{2}\right)+0.375\times(1.1-3.5)=0$　6. 原式 $=\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{3-\dfrac{5}{19}}}=\dfrac{1}{2-\dfrac{19}{52}}=\dfrac{52}{85}$　7. 原式 $=(1+3+5+7+9)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)=5\times5+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}\right)-\frac{1}{32}=25\frac{31}{32}$　8. 原式 $=\frac{1}{1\,999}\times(1+2+\cdots+1\,998)=\frac{1}{1\,999}\times\frac{1\,998\times(1\,998+1)}{2}=999$　9. 原式 $=(7+9+\cdots+99)+101-(7+9+\cdots+99)-5=101-5=96$　10. 原式 $=10+100+1\,000+10\,000+100\,000+1\,000\,000-6=1\,111\,110-6=1\,111\,104$　11. 原式 $=3^{1\,998}\times(9-5\times3+6)=0$　12. 原式 $=1-1+1-1=0$　13. 原式 $=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{101}-\frac{1}{105}\right)=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{105}\right)=\frac{1}{21}$　14. 原式 $=(1+2+\cdots+7)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)=\frac{(1+7)\times7}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)=28\frac{3}{8}$　15. 原式 $=\frac{2}{1\times2}+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\frac{2}{4\times5}+\cdots+\frac{2}{100\times101}=2\times\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)=2\times\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{200}{101}$（利用公

式：$1+2+\cdots+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$) **16.** 原式 $=9\,999\,999\,999\times1\,111\,111\,111=(10\,000\,000\,000-1)\times1\,111\,111\,111=11\,111\,111\,110\,000\,000\,000-1\,111\,111\,111=11\,111\,111\,108\,888\,888\,889$ **17.** 原式 $=1\,999\times1\,998\times100\,010\,001-1\,998\times1\,999\times100\,010\,001=0$ **18.** 本题可看作公差为$\frac{1}{3}$的等差数列，项数 $=(20-1)\div\frac{1}{3}+1=58$，原式 $=\frac{(20+1)\times58}{2}=609$ **19.** 原式 $=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{98\times99}-\frac{1}{99\times100}\right)\right]=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{99\times100}\right)=\frac{4\,949}{19\,800}$ **20.** 原式 $=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{1\times2\times3}-\frac{1}{2\times3\times4}\right)+\left(\frac{1}{2\times3\times4}-\frac{1}{3\times4\times5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{17\times18\times19}-\frac{1}{18\times19\times20}\right)\right]=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{1\times2\times3}-\frac{1}{18\times19\times20}\right)=\frac{1\,139}{20\,520}$ **21.** 原式 $=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\cdots\left(1-\frac{1}{50}\right)\times\left(1+\frac{1}{50}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{49}{50}\times\frac{51}{50}=\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{49}{50}\right)\times\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{51}{50}\right)=\frac{1}{50}\times\frac{51}{2}=\frac{51}{100}$ **22.** 原式 $=1-4\left(\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{99\times100\times101}\right)$，然后类似于 19 题求值.（本题利用公式：$\frac{n}{(1+2+\cdots+n-1)(1+2+\cdots+n)}=\frac{n}{\frac{(n-1)n}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{4}{(n-1)\times n\times(n+1)}$）

测试题 **1.** 原式 $=(3-4+5-6+7-8)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)+\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)=-3$ **2.** 原式 $=2.1\times(-2.2+2.42-0.22)=0$ **3.** 原式 $=(1+3+\cdots+17)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{512}\right)=\frac{(1+17)\times9}{2}+\left(1-\frac{1}{512}\right)=81\frac{511}{512}$ **4.** 原式 $=(1+2-3-4)+(5+6-7-8)+\cdots+(1\,997+1\,998-1\,999-2\,000)=\underbrace{(-4)+(-4)+\cdots+(-4)}_{\text{共500个}}=-2\,000$

5. 项数 $=(20-1)\div\frac{1}{4}+1=77$. 原式 $=\frac{(1+20)\times 77}{2}=\frac{1\,617}{2}$（本题可看作公差为$\frac{1}{4}$的等差数列求和） 6. 原式 $=\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{51}-\frac{1}{56}\right)=\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{1}{56}\right)=\frac{11}{56}$ 7. 原式 $=\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+100}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{200}{101}=\frac{100}{101}$（利用练习15题结果）. 8. 原式 $=-1+1-1+1+\cdots-1+1-1=-1$ 9. 原式 $=1+(3-2)(3+2)+(5-4)(5+4)+\cdots+(1999-1998)(1999+1998)$ $=1+5+9+\cdots+3997=\frac{(3997+1)\times 1000}{2}=1999000$ 10. 令原式 $=s$，则 $\frac{1}{3}s=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{3^{11}}$ 减去原式为：$\left(s-\frac{1}{3}s\right)=1-\frac{1}{3^{11}}$，所以，原式 $=\left(1-\frac{1}{3^{11}}\right)\div\frac{2}{3}=\frac{3^{11}-1}{2\times 3^{10}}$ 11. 以90为基准数. 则总成绩 $=20\times 90+(-4+1+3-3-2+4-3+3+5-1-2+2+6-5-7+3+7-9-1+4)=20\times 90+1$，所以平均成绩为 $\frac{20\times 90+1}{20}=90\frac{1}{20}$ 12. 最后剩下的数为：$1999\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{1999}\right)=1999\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{1998}{1999}=1$.

第二讲　代数式的化简与求值(1)

练习题 1. (1) $2^2-\frac{1^2}{2}=3\frac{1}{2}$ (2) $\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{9}\right)^2\Big/\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{23}{54}$ 2. $a=\frac{1}{3}$，$b=1$，$a+b=\frac{4}{3}$. 所求值 $=\left(\frac{4}{3}\right)^2-2\times\frac{4}{3}+3=\frac{19}{9}$ 3. $x=-1$，所求值 $=-1+1-1+1-\cdots+1=0$. 4. $a\times 3^3+b\times 3+8=12$，所求值 $=a\times 3^3+b\times 3-5=4-5=-1$ 5. 令 $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}=k$，则 $x=3k$，$y=4k$，$z=5k$，所以 $4\times 3k-5\times 4k+2\times 5k=10$，$k=5$，故 $x=15$，$y=20$，$z=25$，所求值 $=2\times 15-5\times 20+25=-45$ 6. $a=3b$，$c=\frac{2a}{3}=\frac{2}{3}\times 3b=2b$，原式 $=\frac{3b+b+2b}{3b+b-2b}=\frac{6b}{2b}=3$. 7. 原式 $=2\times\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\times 3=-3\frac{1}{3}$ 8. 原式 $=\frac{3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)-2}{5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+3}=\frac{3\times 2-2}{5\times 2+3}=\frac{4}{13}$（分子分母同除

以 xy)　**9.** $a\times(-5)^4+b\times(-5)^2+c=a\times5^4+b\times5^2+c=3$，即当 $x=5$ 时，y 的值仍为 3　**10.** $x=-1$，原式 $=-1+2-3+4-5+\cdots+1998-1999=(-1+2)+(-3+4)+\cdots+(-1997+1998)-1999=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{999个}-1999=-1000$　**11.** 由 $(2x-1)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，(1) 令 $x=1$ 得 $1=a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$ ①　(2) 令 $x=-1$ 得 $-3^5=-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1+a_0$ ②　(3) ①+②得 $1-3^5=2(a_4+a_2+a_0)$，所以，$a_0+a_2+a_4=\dfrac{1-3^5}{2}$　**12.** $a+\dfrac{1}{b}=1$ 得 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{b}{b-1}$，$b+\dfrac{1}{c}=1$　得　$c=\dfrac{1}{1-b}$ 故 $c+\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{1-b}+\dfrac{b}{b-1}=\dfrac{b-1}{b-1}=1$　**13.** 令 $\dfrac{x}{a-b}=\dfrac{y}{b-c}=\dfrac{z}{c-a}=k$，则 $x=(a-b)k$，$y=(b-c)k$，$z=(c-a)k$，故 $x+y+z=0$　**14.** 第二式分子分母同乘以 a，第三式分子分母同乘以 ab，第四式分子分母同乘以 abc，利用 $abcd=1$，立即可得原式 $=1$

测试题　**1.** 所求值 $=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-3\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{5}+5\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^2=\dfrac{11}{45}$　**2.** $x=3$，$y=2$，$x-y=1$，所求值 $=1+3+1-3=2$　**3.** $a\times7^5+b\times7-8=4$，所求值 $=\dfrac{1}{2}a\times7^5+\dfrac{1}{2}b\times7+3=\dfrac{1}{2}\times(a\times7^5+b\times7)+3=\dfrac{1}{2}\times12+3=9$　**4.** 由 $x=0$ 代数式的值为 1 得 $c=1$，当 $x=-3$ 时，有 $a\times(-3)^5+b\times(-3)+1=8$　得 $a\times3^5+b\times3=-7$，故当 $x=3$ 时，代数式的值 $=a\times3^5+b\times3+1=-7+1=-6$　**5.** 原式 $=\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{ab}{ab+a}=\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{1}{a+1}=1$　**6.** 分子分母同除以 xy 得：原式 $=\dfrac{2\left(\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{x}\right)+3}{-2\left(\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{x}\right)+8}=\dfrac{2\times2+3}{-2\times2+8}=\dfrac{7}{4}$　**7.** 令 $y=2x$，$z=3x$，$x+y+z=x+2x+3x=12$，故 $x=2$，$y=4$，$z=6$，所以 $2x+3y+4z=40$　**8.** 分别取 $x=0$ 和 1，由题设得：$\dfrac{3}{8}=\dfrac{a+3}{b+8}$ 故 $3b+24=8a+24$，$3b=8a$.

第三讲　绝　对　值

练习题　**1.** (1) √　(2) ×　(3) ×　(4) √　(5) ×　(6) ×　**2.** 原式 $=(x+1)-(1-x)=2x$　**3.** 原式 $=\dfrac{2a+3a}{|-3a-a|}=\dfrac{5a}{-4a}=-\dfrac{5}{4}$　**4.** 原

式 $=|3x-x-5|+(2x+8)=(5-2x)+2x+8=13$　**5.** 由 $a<0$，$ax\leqslant|2a|$　得 $x\geqslant\frac{|2a|}{a}=\frac{-2a}{a}=-2$.　原式 $=x+2-(2x+5)=-x-3$　**6.** 当 $x>0$ 时，原式 $=\frac{x}{x}-\frac{x}{x}=0$；当 $x<0$ 时，原式 $=\frac{x}{-x}-\frac{-x}{x}=0$，所以 原式 $=0$　**7.** $x>0$ 时，原式 $=\frac{|x+x|}{x}=\frac{2x}{x}=2$；当 $x<0$ 时，原式 $=\frac{|x-x|}{x}=0$　**8.** 零点为：$-\frac{5}{2}$，$\frac{7}{3}$. 当 $x\leqslant-\frac{5}{2}$ 时，原式 $=-2x-5+3x-7=x-12$；当 $-\frac{5}{2}<x\leqslant\frac{7}{3}$ 时，原式 $=2x+5+3x-7=5x-2$；当 $x>\frac{7}{3}$ 时，原式 $=2x+5-3x+7=-x+12$　**9.** 零点为：$-\frac{1}{5}$，$\frac{1}{5}$. 当 $x\leqslant-\frac{1}{5}$ 时，原式 $=-2x$；当 $-\frac{1}{5}<x\leqslant\frac{1}{5}$ 时，原式 $=\frac{2}{5}$；当 $x>\frac{1}{5}$ 时，原式 $=2x$　**10.** $a=\pm5\frac{2}{3}$，$b=\pm1\frac{1}{3}$，所以 $a-b=4\frac{1}{3}$，7，-7 或 $-4\frac{1}{3}$. 即 $a-b=\pm4\frac{1}{3}$ 或 ±7　**11.** $a=0$ 或 $b=0$ 或 $ab<0$　**12.** $\frac{a}{|a|}$，…，$\frac{d}{|d|}$ 的取值都只有 ±1 两种，因此原式的所有可能值有：4，2，0，-2，-4　**13.** $a+b=0$ 且 $a-b=0$，所以 $a=b=0$，原式 $=0$　**14.** 零点为：$-\frac{1}{5}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{5}{3}$. 当 $x\leqslant-\frac{1}{5}$ 时，原式 $=-2x+3-3x+5+5x+1=9$；当 $-\frac{1}{5}<x\leqslant\frac{3}{2}$ 时，原式 $=-2x+3-3x+5-5x-1=-10x+7$；当 $\frac{3}{2}<x\leqslant\frac{5}{3}$ 时，原式 $=2x-3-3x+5-5x-1=-6x+1$；当 $x>\frac{5}{3}$ 时，原式 $=2x-3+3x-5-5x-1=-9$　**15.** 零点：-1，2，5. 当 $x\leqslant-1$ 时，原式 $=|4-2x-6|+6-3x=-2-2x+6-3x=4-5x$；当 $-1<x\leqslant2$ 时，原式 $=|4-2x-6|+6-3x=2+2x+6-3x=8-x$；当 $2<x\leqslant5$ 时，原式 $=|2x-4-6|+3x-6=10-2x+3x-6=4+x$；当 $x>5$ 时，原式 $=|2x-4-6|+3x-6=2x-10+3x-6=5x-16$

测试题　**1.** (1) ✓　(2) ✓　(3) ✓　(4) ×　**2.** 当 $a\geqslant0$ 时，原式 $=a-a=0$；当 $a<0$ 时，原式 $=-a-a=-2a$　**3.** 原式 $=(x+2)+(2-x)=4$　**4.** 零点为：$-\frac{3}{2}$，$\frac{2}{3}$. 当 $x\leqslant-\frac{3}{2}$ 时，原式 $=-3x+2-2x-3=-5x-1$；当 $-\frac{3}{2}<x\leqslant\frac{2}{3}$ 时，原式 $=-3x+2+2x+3=-x+5$；

当 $x>\frac{2}{3}$ 时，原式 $=3x-2+2x+3=5x+1$　**5.** 零点：-2，$-\frac{1}{3}$，1，4. 当 $x\leqslant -2$ 时，原式 $=|-x+1-3|-3x-1=-x-2-3x-1=-4x-3$；当 $-2<x\leqslant -\frac{1}{3}$ 时，原式 $=|-x+1-3|-3x-1=2+x-3x-1=-2x+1$；当 $-\frac{1}{3}<x\leqslant 1$ 时，原式 $=|-x+1-3|+3x+1=2+x+3x+1=4x+3$；$1<x\leqslant 4$ 时，原式 $=|x-1-3|+3x+1=4-x+3x+1=2x+5$；当 $x>4$ 时，原式 $=|x-1-3|+3x+1=x-4+3x+1=4x-3$　**6.** 由 $\begin{cases}x+y-9=0\\2x-y+3=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2\\y=7\end{cases}$　**7.** $x=\pm 3$，$y=\pm 5$，所以 $x+y=\pm 2$，± 8　**8.** $\frac{a}{|a|}$ 与 $\frac{b}{|b|}$ 及 $\frac{c}{|c|}$ 的取值只有 ± 1，故原式的所有可能值为：（3个都取1，则 $\frac{abc}{|abc|}=1$）4；（2个取1，一个取 -1，则 $\frac{abc}{|abc|}=\frac{a}{|a|}\cdot\frac{b}{|b|}\cdot\frac{c}{|c|}=-1$）0；（1个取1，2个取 -1，则 $\frac{abc}{|abc|}=1$）0；（3个全取 -1，则 $\frac{abc}{|abc|}=-1$）-4. 即所有可能值只有 0，± 4

第四讲　一元一次方程

练习题　**1.** (1) $x=-7$　(2) $x=-\frac{15}{2}$　(3) $x=\frac{26}{21}$　(4) $x=-\frac{143}{322}$　**2.** (1) 当 $m\neq\frac{1}{2}$ 时，$x=\frac{9}{4m-2}$，当 $m=\frac{1}{2}$ 时，无解.　(2) 当 $a\neq 4$ 时，$x=\frac{b+8}{a-4}$；当 $a=4$ 时，若 $b\neq -8$，无解，若 $b=-8$，有无穷多个解. 即任意数都是原方程的解.　(3) 若 $a\neq\frac{2}{3}$ 时，$x=3a+2$；若 $a=\frac{2}{3}$ 时，任意数都是方程的解.　(4) 若 $m\neq\frac{2}{3}$ 时，$x=\frac{4-3mn}{3m-2}$；若 $m=\frac{2}{3}$ 时，若 $n\neq 2$，无解，若 $n=2$，任意数都是方程的解　**3.** 原方程可化为：$(3a-2b+1)x=5-6a$，要使它有无穷多解，必须：$3a-2b+1=0$，$5-6a=0$. 故 $a=\frac{5}{6}$，$b=\frac{7}{4}$　**4.** 原方程可化为：$(2a-3)x=-3-2a$. 要使它无解，必须：$2a-3=0$，$-3-2a\neq 0$. 解得 $a=\frac{3}{2}$　**5.** (1) 当 $m\neq 0$ 且 $m\neq -1$ 时，$x=\frac{m-1}{m}$；当 $m=0$ 时，无解；当 $m=-1$ 时，任意数都是原方程的解.　(2) $b\neq 0$ 时，$x=\frac{a^2(b-a)}{b(a+b)}$；当 $b=0$ 时，无解.　(3) 若 $m+n\neq 0$，原方程可化为 $mx=n$，当 $m\neq 0$ 时，$x=\frac{n}{m}$，当 $m=0$ 时，由 $m+n\neq 0$ 知 $n\neq 0$，故方程无解；若 $m+$

$n=0$，任意数都是原方程的解. (4) 原方程可化为：$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)x=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+3$. 而$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+3=\left(\frac{b+c}{a}+1\right)+\left(\frac{c+a}{b}+1\right)+\left(\frac{a+b}{c}+1\right)=\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}=(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$. 又$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\neq 0$，故$x=a+b+c$ **6.** $(a-2)x=-b-3$，由题意，$a-2=0$，$-b-3=0$即$a=2$，$b=-3$，故$(a+b)^{1999}=(-1)^{1999}=-1$ **7.** 设$\overline{a_1a_2\cdots a_n}=x$，则$\overline{2a_1a_2\cdots a_n1}=1+2\times 10^{n+1}+10x$，$\overline{1a_1a_2\cdots a_n2}=2+10^{n+1}+10x$，由题意，可得方程：$12\times(1+2\times 10^{n+1}+10x)=21\times(2+10^{n+1}+10x)$化简得：$3x=10^n-1$，即$3x=\underbrace{99\cdots9}_{n个9}$，故$x=\underbrace{33\cdots3}_{n个3}$

测试题 **1.** (1) $x=8$， (2) $x=-24$， (3) $x=-\frac{22}{5}$， (4) 无解 **2.** (1) 当$m\neq\frac{2}{3}$时，$x=\frac{-3}{3m-2}$；当$m=\frac{2}{3}$时，无解. (2) 当$a\neq\frac{5}{2}$时，$x=\frac{-b-3}{2a-5}$；当$a=\frac{5}{2}$时，若$b\neq-3$，无解，若$b=-3$，任意数都是方程的解. (3) 当$a\neq b$时，$x=\frac{a^2}{a-b}$；当$a=b$时，无解. (4) 当$a+b\neq 0$时，原方程可化为：$3ax=b$，当$a\neq 0$时，$x=\frac{b}{3a}$；当$a=0$时，由$a+b\neq 0$知$b\neq 0$，故方程无解；当$a+b=0$时，任意数都是方程的解 **3.** 原方程可化为：$(2n-6m+1)x=4m-1$，由题设，必须$2n-6m+1=0$，$4m-1=0$，故$m=\frac{1}{4}$，$n=\frac{1}{4}$ **4.** 原方程可化为：$(2a-4)x=3-4a$，由题设，必须：$2a-4=0$，$3-4a\neq 0$，解得$a=2$ **5.** $(m-3)x=-n-4$， (1) 当$m\neq 3$时，有唯一解. (2) 当$m-3=0$，且$-n-4=0$即$m=3$，$n=-4$时，有无数多解. (3) 当$m-3=0$且$-n-4\neq 0$即$m=3$，$n\neq-4$时，方程无解

第五讲　一次方程组

练习题 **1.** (1) $\begin{cases}x=\frac{25}{19}\\ y=\frac{42}{19}\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=\frac{17}{6}\\ y=\frac{2}{9}\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=-\frac{2}{7}\\ y=-\frac{23}{14}\end{cases}$ (4)

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=-\frac{96}{25} \\ z=-\frac{2}{25} \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x=\frac{117}{5} \\ y=\frac{6}{5} \\ z=-\frac{18}{5} \end{cases}$

2. (1) $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=-2 \\ w=4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=-c-\frac{b}{2}-\frac{a}{2} \\ y=-b-\frac{a}{2}-\frac{c}{2} \\ z=-a-\frac{b}{2}-\frac{c}{2} \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x=2 \\ y=6 \\ z=10 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \\ z=-5 \end{cases}$

测试题 (1) $\begin{cases} x=\frac{9}{5} \\ y=-\frac{1}{5} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=15 \\ y=-9 \\ z=6 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=2 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{7}{3} \\ z=\frac{4}{3} \end{cases}$

第六讲　一次方程组的应用

练习题 1. $\begin{cases} -b=3, \\ 3a-b=9. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} a+3-b=3, \\ a\times(-2)^2+3\times(-2)-b=4. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=\frac{10}{3}, \\ b=\frac{10}{3}. \end{cases}$ 故当 $x=3$ 时，代数式值 $=\frac{10}{3}\times 3^2+3\times 3-\frac{10}{3}=35\frac{2}{3}$

3. $\begin{cases} 3x+2y-4=0, \\ 3y-2x+5=0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{22}{13} \\ y=-\frac{7}{13} \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x-3y+6=0, \\ 4x-2y-3=0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{21}{10} \\ y=\frac{27}{10} \end{cases}$

5. 设这两个自然数分别为 x 与 y，则 $(x+y)(x-y)=71$，由 71 为质数知 $\begin{cases} x+y=71, \\ x-y=1. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=36 \\ y=35 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x+y=7, \\ x-2y=1. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 7.

$\begin{cases}2m-2=4-m,\\ m-n=2n-1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=2\\ n=1\end{cases}$ **8.** $\begin{cases}a\times 3+3b=8,\\ a\times 5+3\times b=8.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-2\\ b=\dfrac{14}{3}\end{cases}$ **9.** $(3a+2b-c)^2+|2a+b|+|2b+c|=0$，得 $\begin{cases}3a+2b-c=0,\\ 2a+b=0,\\ 2b+c=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0\\ b=0\\ c=0\end{cases}$ **10.** $\begin{cases}2x-y=5\\ x-2y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x-y=-5\\ x-2y=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x-y=1\\ x-2y=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x-y=-1,\\ x-2y=-5.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-3\\ y=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1\\ y=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\ y=3\end{cases}$ **11.** 由 $xy=x+y$ 得 $xy-x=y$ 即 $x(y-1)=y$. 由 y 与 $y-1$ 互质，得 $x|y$. 同理 $y|x$，故 $x=y$，代入原方程得 $x^2=2x$，因 x 为正整数故 $x>0$，得 $x=2$. 所以 $x=y=2$ 或：由 $xy=x+y$ 得 $xy-x-y+1=1$ 即 $(x-1)(y-1)=1$，所以 $\begin{cases}x-1=1,\\ y-1=1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$ **12.** $m^2-n^2=(m-n)(m+n)=60=2^2\times 3\times 5$，由 m，n 为正整数知 $m-n$ 与 $m+n$ 同奇或同偶且 $m+n>m-n$，故 $\begin{cases}m-n=2\\ m+n=2\times 3\times 5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m-n=2\times 3,\\ m+n=2\times 5.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=16\\ n=14\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=8\\ n=2\end{cases}$ **13.** $\begin{cases}2a+b=5,\\ 2c+d=-3,\\ 11a-6=5,\\ 11c-d=-3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1\\ b=3\\ c=-\dfrac{6}{13}\\ d=-\dfrac{27}{13}\end{cases}$ **14.** 原方程可化为：$(n-m+1)x=n-4m+7$，由题意，$\begin{cases}n-m+1=0,\\ n-4m+7=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=2\\ n=1\end{cases}$

测试题 **1.** $\begin{cases}2m-3n=9-2m+4n,\\ 2m-7=n.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=4\\ n=1\end{cases}$ **2.** $\begin{cases}a+2b-12=0,\\ 2a-b+1=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2\\ b=5\end{cases}$ **3.** $\begin{cases}3x-2y+4=0,\\ x+3y+2=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-\dfrac{16}{11}\\ y=-\dfrac{2}{11}\end{cases}$

4. 设这个正整数为 x，减去 4 后为 m^2，加上 9 后为 n^2，则由题意，有 $\begin{cases}x-4=m^2, & (1)\\ x+9=n^2, & (2)\end{cases}$ 由(2)−(1)得 $n^2-m^2=13$. 即 $(n+m)(n-m)$

$=13$，由于13是质数，得 $\begin{cases}n-m=1,\\n+m=13,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=6,\\n=7.\end{cases}$ 从而 $x=m^2+4=40$ **5.** $\begin{cases}2x-y=11\\x-2y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x-y=1\\x-2y=11\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x-y=-11\\x-2y=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x-y=-1,\\x-2y=-11.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=7\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-3\\y=-7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-7\\y=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3\\y=7\end{cases}$ **6.** $\begin{cases}b=-4,\\2a+b=2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\b=-4,\end{cases}$ 所以 $(a+b)^{1999}=(-1)^{1999}=-1$

第七讲　列方程(组)解应用题

练习题　**1.** 设十位数字为 x，则个位数字为 $(x+5)$. 由题意 $10x+(x+5)=3[x+(x+5)]$，解得 $x=2$，所以 $x+5=7$，这个两位数为27　**2.** 设 A 与 B 相距 x 千米，则 $\frac{x}{10}-\frac{x}{15}=\frac{10}{60}$，解得 $x=5$(千米)　**3.** 设丙需做 x 天，则 $5\times\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{20}\right)+x\times\frac{1}{24}=1$，解得 $x=10$(天)　**4.** 设原有盐水 x 千克，则 $x\times40\%=(x+10)\times10\%$，解得 $x=\frac{10}{3}$(千克)　**5.** 设这个队输 x 场，则赢 $(11-x)$ 场，则 $x+2\times(11-x)=17$　解得　$x=5$，所以 $11-x=6$. 这个队输5场，赢6场　**6.** 设船的静水速度为 x 千米/时，水流速度为 y 千米/时，则 $\begin{cases}(x+y)\times4=60,\\(x-y)\times5=60.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=13.5(\text{千米/时})\\y=1.5(\text{千米/时})\end{cases}$　**7.** 设十位数字为 x，个位数字为 y，则 $\begin{cases}10x+y=9y+6,\\10x+y=5(x+y)+3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=7,\\y=8.\end{cases}$ 所以，这个两位数为78　**8.** 设1人用机器每天可制造 x 件，1人靠手工每天可制造 y 件，则 $\begin{cases}x+3y=60,\\2x+2y=80.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=30,\\y=10.\end{cases}$ 所以 $3x+y=30\times3+10=100$(件)　**9.** 设25%的取 x 克，20%的取 y 克，则 $\begin{cases}x+y=100,\\25\%x+20\%y=22\%\times100.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=40(\text{克})\\y=60(\text{克})\end{cases}$　**10.** 设甲今年 x 岁，乙今年 y 岁，则 $\begin{cases}\frac{1}{2}x=y-(x-y),\\x+(x-y)+x=63,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=28(\text{岁})\\y=21(\text{岁})\end{cases}$　**11.** 设用15千米/时走过的路程为 x 千米，则用10千米/时走过的路程为 $(x-20)$ 千米，全程为 $[x+(x-20)]=(2x-20)$ 千米，则 $\frac{x}{15}+\frac{x-20}{10}=\frac{2x-20}{12.5}$，解得 $x=60$.　所以 $2x-20=100$(千米)　**12.** 设客车的速度为 $5k$ 米/秒，则货

车的速度为 $3k$ 米/秒，由题意，得 $(5k-3k)\times 60=280+200$ 解得 $k=4$. 所以 $5k=20$(米/秒)，$3k=12$(米/秒) 两车相向而行，交叉时间为：$\frac{200+280}{20+12}=15$(秒) **13.** 设原数除去最高位数字 1 后所得的五位数为 x，则原数为 $1\times 10^5+x$，新数为 $10x+1$，由题意 $10x+1=3(10^5+x)$ 解得 $x=42\,857$. 即原数为 142 857 **14.** 设第一天的速度为 x 千米/天，每一天都比前一天多走 y 千米，则最后一天的速度为 $(x+9y)$ 千米/天. 由题意得 $15x=x+(x+y)+(x+2y)+\cdots+(x+9y)$. 解得 $x=9y$. 所以以最后一天的速度行走所需的天数为 $\frac{15x}{x+9y}=\frac{15x}{2x}=7.5$(天)

测试题 **1.** 设十位数字为 x，则个位数字为 $3x$，百位数字为 $(x+7)$，由题意，有 $(x+7)+x+3x=17$，解得 $x=2$，所以，$3x=6$，$x+7=9$，这个三位数为 926. **2.** 设 AB 两村的距离为 x，则 $\frac{x}{60+40}-\frac{x}{80+40}=10$，解得 $x=6\,000$(米). **3.** 设这三个数之和为 x，则这三个数分别为 $(x-25)$，$(x-20)$，$(x-29)$，由题意，得 $(x-25)+(x-20)+(x-29)=x$，解得 $x=37$ 所以，$x-25=12$，$x-20=17$，$x-29=8$. **4.** 设甲今年 x 岁，乙今年 y 岁，则 $\begin{cases}x-y=y-5,\\[x+(x-y)]+x=70.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=29\\y=17\end{cases}$ **5.** 设蜘蛛 x 只，蜻蜓 y 只，蝉 z 只，则 $\begin{cases}x+y+z=18,\\8x+6y+6z=118,\\2y+z=20.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=5(只)\\y=7(只)\\z=6(只)\end{cases}$ **6.** 设甲桶中有水 x 千克，乙桶中有水 y 千克，则 $\begin{cases}(x-2)=3(y+2),\\(x+1)=(8+1)(y-1).\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=17(千克)\\y=3(千克)\end{cases}$

第八讲 “设而不求”

练习题 **1.** 设小红上山时路程为 s，则上山时间为 $\frac{s}{4}$，下山路程为 s，下山时间为 $\frac{s}{6}$，则平均速度 $=\frac{2s}{\frac{s}{4}+\frac{s}{6}}=\frac{2s}{\frac{5}{12}s}=\frac{24}{5}=4.8$(千米/时) **2.** 设该船顺水航行 s 千米，则平均速度 $=\frac{2s}{\frac{s}{10}+\frac{s}{6}}=\frac{15}{2}=7.5$(千米/时) **3.** 该船的静水速度为 x，水流速度为 y，则船的顺水速度为 $(x+y)$，逆水速度为 $(x-$

y)，由题意，追上木桶所需时间为：$\frac{5[(x-y)+y]}{[(x+y)-y]}=5$(分)　**4.** 一样多，设原来两杯中各有水和酒精 V 升，最后甲杯中有酒 x 升，乙杯中有水 y 升，但甲乙两杯中的混合物仍为 V 升，因此，乙杯中的酒为 $V-y$ 升，于是：$x+(V-y)=V$，从而 $x=y$　**5.** 类似于例 6，计算得(1)若有 8 头牛，36 天可以将草吃完；(2)要使牧草永远吃不完，最多放牧 6 头牛.　**6.** 由题意 $a\times 3^5+b\times 3^3+c\times 3+3=48$，所以，当 $x=-3$ 时，其值为：$a\times(-3)^5+b\times(-3)^3+c\times(-3)+3=-(a\times 3^5+b\times 3^3+c\times 3)+3=-45+3=-42$.　**7.** 设 A，B，C，D 每人每天完成的工作量分别为 a，b，c，d，则

$$\begin{cases} a+b+c=\frac{1}{10}, & (1)\\ a+c+d=\frac{1}{8}, & (2)\\ b+d=\frac{1}{20}. & (3)\end{cases}$$

由(1)－(2)得，$b-d=-\frac{1}{40}$. 即 $b=d-\frac{1}{40}$，代入(3)得，$d=\frac{3}{80}$，即若 d 一人独干，需 $\frac{80}{3}$ 天　**8.** 设购甲一件需 x 元，乙一件需 y 元，丙一件需 z 元，则 $\begin{cases}3x+7y+z=300,\\ 4x+10y+z=400,\end{cases}$ 现欲求 $x+y+z$ 的值. 令 $a(3x+7y+z)+b(4x+10y+z)=x+y+z$，即 $(3a+4b)x+(7a+10b)y+(a+b)z=x+y+z$. 令 $\begin{cases}3a+4b=1,\\ 7a+10b=1,\\ a+b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\ b=-2.\end{cases}$ $x+y+z=3(3x+7y+z)-2(4x+10y+z)=3\times 300-2\times 400=100$(元)　**9.** 设原来甲、乙两杯中酒精浓度分别为 a 与 b，从甲杯中倒出的那部分混合液重 x 克，则由题意，可得 $\frac{(16-x)a+xb}{16}=\frac{(24-x)b+xa}{24}$，化简得 $48(a-b)=5x\cdot(a-b)$，所以由 $a\neq b$ 知 $x=\frac{48}{5}=9.6$(克)　**10.** 设此人八点 x 分吃饭，八点 y 分吃完，由题意，得 $\begin{cases}6x-\frac{x}{2}=240-25, & (1)\\ 6y-\frac{y}{2}=240+25, & (2)\end{cases}$ 由(2)－(1)得 $\frac{11}{2}(y-x)=30$，即 $y-x=\frac{100}{11}$. 所以，此人吃饭用了 $\frac{100}{11}$ 分钟.　**11.** 设原来水库中的水量为 a，每日流进的水量为 b，每日放出的水量为 c，又按原来的放水量放可使用 x 天，则有 $\begin{cases}a+40b=40c, & (1)\\ a+40(1+0.2)b=40(1+0.1)c, & (2)\\ a+(1+0.2)bx=cx, & (3)\end{cases}$ (2)－

(1)得 $c=2b$，代入(1)得 $a=40b$，将 $c=2b$，$a=40b$ 代入(3)得 $40b+1.2bx=2bx$，即 $0.8bx=40b$，$x=50$(天)　12. 设取第一、二、三种混合物各 x 克，y 克，z 克，得到 $(x+y+z)$ 克新的混合物. 由题意，它含 $A\left(\frac{3}{8}x+\frac{2}{5}z\right)$ 克，含 $B\left(\frac{5}{8}x+\frac{1}{3}y\right)$ 克，含 $C\left(\frac{2}{3}y+\frac{3}{5}z\right)$ 克，所以，由成分 A 所占的比例，有 $\frac{\frac{3}{8}x+\frac{2}{5}z}{x+y+z}=\frac{3}{3+5+2}$　即 $\frac{3}{8}x+\frac{2}{5}z=\frac{3}{10}(x+y+z)$，同理，由成分 B、C 所占比例可得另两式，即有 $\begin{cases}\frac{3}{8}x+\frac{2}{5}z=\frac{3}{10}(x+y+z), & (1)\\ \frac{5}{8}x+\frac{1}{3}y=\frac{5}{10}(x+y+z), & (2)\\ \frac{2}{3}y+\frac{3}{5}z=\frac{2}{10}(x+y+z). & (3)\end{cases}$ 上述三个方程互相不独立，即从它不能解出 x，y，z，但我们只要求 $x:y:z$ 即可. 因此，由(1)，(2)消去 x 可得 $y=2z$，将它代入(1)，可得 $x=\frac{20}{3}z$，因而，$x:y:z=20:6:3$

测试题　1. 设小明家离学校 x 千米，则平均速度为 $\frac{3x}{\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+\frac{x}{5}}=\frac{30}{7}$(千米/时)　2. 由哥哥走三分之一路程，弟弟走 9 千米，知当哥哥走完全程时，弟弟走了 27 千米. 所以只要求出全程即可. 设全程为 s 千米，哥哥速度为 x 千米/时，弟弟速度为 y 千米/时，则 $\begin{cases}\frac{\frac{1}{3}s}{x}=\frac{9}{y}, & (1)\\ \frac{16}{x}=\frac{\frac{1}{3}s}{y}. & (2)\end{cases}$ 由(1)÷(2)得 $\frac{\frac{1}{3}s}{16}=\frac{9}{\frac{1}{3}s}$，即 $\left(\frac{1}{3}s\right)^2=12^2$. 所以 $\frac{1}{3}s=12$，$s=36$(千米). 所以弟弟还有(36－27)9 千米要走　3. 设 A、B、C 三种货物的单价分别为 x 元，y 元和 z 元，则 $\begin{cases}2x+y+z=5, & (1)\\ x+2y+z=6. & (2)\end{cases}$ 现欲求 $3y+z$. 由(2)×2－(1)得：$3y+z=6\times2-5=7$(元). 即只购买 B 3 件，C 1 件应花 7 元钱　4. 设这个四位数为 $\overline{x00y}$，由题意得 $\begin{cases}1\,000x+y=778(x+y), & (1)\\ 1\,000y+x=m(x+y). & (2)\end{cases}$ (1)＋(2)得　$1\,001(x+y)=$

$(778+m)(x+y)$，由 $x+y>0$ 知 $778+m=1001$，$m=223$　5. 设 A，B，C，D 每天完成的工作量分别为 a，b，c，d，则 $\begin{cases} a+b=\frac{1}{8}, & (1) \\ c+d=\frac{1}{12}, & (2) \\ a+b+d=\frac{1}{5}. & (3) \end{cases}$ 由 (1)+(2)−(3)得　$c=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{5}=\frac{1}{120}$，即 C 一人单独干，需要 120 天才能完工　6. 类似于例 6，可得 20 天可以吃完

第九讲　一次不等式(组)

练习题　1. (1) $x<-\frac{11}{5}$　(2) $x<-19$　(3) $x<\frac{27}{23}$　(4) $x>1$ 且 $x\neq 2$.　2. (1) $-\frac{1}{3}<x<\frac{10}{7}$　(2) 无解　(3) $4<x\leqslant 5\frac{5}{6}$　(4) $\frac{5}{2}<x<6$.　3. 原方程可化为 $2x=2-19k$，所以 $x=1-\frac{19}{2}k$　(1) 要使方程有正数解，$1-\frac{19}{2}k>0$，$k<\frac{2}{19}$.　(2) 要使方程有负数解，$1-\frac{19}{2}k<0$，$k>\frac{2}{19}$　4. 原不等式可化为 $\frac{1}{a}\left(1+\frac{2}{a}\right)x<\left(1+\frac{2}{a}\right)\left(1-\frac{2}{a}\right)$. 若 $\frac{1}{a}\left(1+\frac{2}{a}\right)>0$，即 $a>0$ 或 $-2<a<0$ 时，解为 $x<a\cdot\left(1-\frac{2}{a}\right)$；若 $\frac{1}{a}\left(1+\frac{2}{a}\right)<0$　即 $a<-2$ 时，解为 $x>a\left(1-\frac{2}{a}\right)$；若 $\frac{1}{a}\left(1+\frac{2}{a}\right)=0$，即当 $a=-2$ 时，把 $a=-2$ 代入不等式，得 $0x<0$，无解　5. 原不等式组化为 $\begin{cases} (a-1)x>2a-3, & (1) \\ 9x>8. & (2) \end{cases}$ 由 (1)，当 $a-1>0$，即 $a>1$ 时，解为 $x>\frac{2a-3}{a-1}$；当 $a-1<0$，即 $a<1$ 时，解为 $x<\frac{2a-3}{a-1}$；当 $a-1=0$，即 $a=1$ 时，则 $0x>-1$，解为一切数. 故当 $a>1$ 时，不等式组为 $\begin{cases} x>\frac{2a-3}{a-1}, \\ x>\frac{8}{9}. \end{cases}$ 若 $\frac{8}{9}>\frac{2a-3}{a-1}$，即 $1<a<\frac{19}{10}$ 时，$x>\frac{8}{9}$. 若 $\frac{8}{9}<\frac{2a-3}{a-1}$，即 $a>\frac{19}{10}$ 时，$x>\frac{2a-3}{a-1}$. 同理，当 $a<1$ 时，不等式组化为 $\begin{cases} x<\frac{2a-3}{a-1}, \\ x>\frac{8}{9}. \end{cases}$ 要使它有解，必须

$\frac{8}{9}<\frac{2a-3}{a-1}$，即 $a<\frac{19}{10}$. 此时，原不等式组的解为 $\frac{8}{9}<x<\frac{2a-3}{a-1}$. 当 $a=1$ 时，原不等式组的解即为 $x>\frac{8}{9}$　6. 原方程化为 $(3k-5)x=6-6k$，当 $3k-5\neq 0$ 即 $k\neq\frac{5}{3}$ 时，$x=\frac{6-6k}{3k-5}$. 由题意，$\frac{6-6k}{3k-5}\leqslant 3$，即 $\frac{6-6k}{3k-5}-3\leqslant 0$，$\frac{21-15k}{3k-5}\leqslant 0$，得 $k>\frac{5}{3}$ 或 $k\leqslant\frac{7}{5}$. 当 $k=\frac{5}{3}$ 时，$6-6k\neq 0$，此时方程无解

测试题　1. (1) $x\geqslant -2$.　(2) $x>42$.　(3) $x<2$ 且 $x\neq 1$　(4) $x\leqslant -6$ 或 $x>\frac{4}{3}$　2. (1) $4<x<6$　(2) $\frac{25}{17}<x<\frac{7}{2}$　3. (1) $k<3$，　(2) $k>3$　(3) $0\leqslant k<3$　4. 原不等式组可化为 $\begin{cases}4mx<11 & (1)\\ 3mx>8 & (2)\end{cases}$　(1) 当 $m>0$ 时，由(1)式得 $x<\frac{11}{4m}$，由(2)式得 $x>\frac{8}{3m}$. 由于 $\frac{11}{4m}-\frac{8}{3m}=\frac{1}{12m}>0$，故 $\frac{11}{4m}>\frac{8}{3m}$. 所以此时不等式组的解为 $\frac{8}{3m}<x<\frac{11}{4m}$.　(2) 当 $m<0$ 时，由(1)式得 $x>\frac{11}{4m}$，由(2)式得 $x<\frac{8}{3m}$，由于 $\frac{11}{4m}-\frac{8}{3m}=\frac{1}{12m}<0$，故 $\frac{11}{4m}<\frac{8}{3m}$　所以此时不等式组的解为 $\frac{11}{4m}<x<\frac{8}{3m}$.　(3) 当 $m=0$ 时，由(2)式　$0x>8$，故无解

第十讲　含有绝对值的方程和不等式

练习题　1. (1) $x=\frac{13}{4}$ 或 $x=-\frac{3}{4}$；　(2) $x=\frac{5}{2}$ 或 $x=\frac{1}{8}$；　(3) $x=\pm 9$；　(4) $x=-6$ 或 $x=10$；　(5) 无解；　(6) $x=-\frac{13}{3}$　2. (1) $-5\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}$；　(2) $x<-\frac{2}{3}$；　(3) $x<-1$ 或 $x>9$；　(4) $x\leqslant -5$ 或 $x\geqslant\frac{5}{2}$　3. $x=1$　4. $x=\frac{1}{2}, x=1$　5. $-1\leqslant x\leqslant 1$　6. $a\cdot b>0$ (即 $a>0$ 且 $b>0$ 或 $a<0$ 且 $b<0$)

测试题　1. (1) $x=2$ 或 $x=-6$；　(2) $x=3$ 或 $x=\frac{1}{3}$；　(3) $x=9$ 或 $x=-\frac{3}{7}$；　(4) $x=10$ 或 $x=-\frac{6}{5}$；　(5) 无解；　(6) 无解　2. (1) $-a<x<a$.　(2) $x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a$.　(3) $x<-2$　(4) $x>\frac{17}{13}$.　(5) $x>0$.　(6) 不等式的解集为任意数

第十一讲　不等式的应用

练习题　1. 当长方形的各边长都相等时，面积最大，最大面积为 $\left(\frac{16}{4}\right)^2=16$　2. $\frac{b}{a}-\frac{b+c}{a+c}=\frac{(b-a)\cdot c}{a(a+c)}<0$，所以 $\frac{b}{a}<\frac{b+c}{a+c}$　3. $a<ab$　4. 当 $x\leqslant -2$ 时，有最大值 5，当 $x=2$ 时，有最小值 -3　5. $\overline{abcd}=\overline{ab}\times 100+\overline{cd}>\overline{ab}\times 100>\overline{ab}\times\overline{cd}$　6. 原方程化为 $(k+3)x=2$. 当 $k=-3$ 时，无解；当 $k\neq -3$ 时，$x=\frac{2}{k+3}$，由题意 $\frac{2}{k+3}\leqslant 2$，解得 $k\geqslant -2$ 或 $k<-3$　7. $a+\frac{1}{a}=\frac{a^2+1}{a}\geqslant\frac{2a}{a}=2$　8. $4a^2+4a+2=(2a+1)^2+1>0$　9. 当 $x=b$ 时，有最小值，最小值为 $c-a$　10. 类似于例 7，可得所有这样的正整数为：108　11. 由已知条件，可得：$b=40-2a$，$c=a-10$. 又由 a，b，c 为非负数，得 $40-2a\geqslant 0$，$a-10\geqslant 0$，从而得到 a 的取值范围为 $10\leqslant a\leqslant 20$. 故 $N=5a+4b+2c=140-a$. 当 $a=10$ 时，N 有最大值，最大值为 130. 当 $a=20$ 时，N 有最小值，最小值为 120　12. 设这个四位数为 $\overline{abcd}$，则 $\overline{abcd}=(a+b+c+d)^4$，而 $1\,000\leqslant\overline{abcd}\leqslant 9\,999$，从而 $1\,000\leqslant(a+b+c+d)^4\leqslant 9\,999$. 而 $5^4<1\,000\leqslant(a+b+c+d)^4\leqslant 9\,999<10^4$. 即 $a+b+c+d$ 的所有可能值为 6，7，8，9，经验算：$6^4=1\,296$（因为 $1+2+9+6\neq 6$，不合题意），$7^4=2\,401$　（$2+4+0+1=7$，所以 2 401 是一个解），$8^4=4\,096$（不合题意），$9^4=6\,561$（不合题意），所求的四位数是 2 401　13. 4 997　14. 由条件等式的对称性及题意，不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant x_5$，则　$1=\frac{1}{x_2x_3x_4x_5}+\frac{1}{x_1x_3x_4x_5}+\frac{1}{x_1x_2x_4x_5}+\frac{1}{x_1x_2x_3x_5}+\frac{1}{x_1x_2x_3x_4}\leqslant\frac{1}{x_4x_5}+\frac{1}{x_4x_5}+\frac{1}{x_4x_5}+\frac{1}{x_5}+\frac{1}{x_4}=\frac{3+x_4+x_5}{x_4x_5}$，即 $x_4x_5\leqslant 3+x_4+x_5$，$x_4x_5-x_4-x_5-1\leqslant 4$，$(x_4-1)(x_5-1)\leqslant 4$. 若 $x_4=1$，则 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$，则条件的等式化为 $1+1+1+1+x_5=1\cdot 1\cdot 1\cdot 1x_5$ 即 $4+x_5=x_5$，矛盾. 所以 $x_4\geqslant 2$，从而 $x_5-1\leqslant 4$. 即 $x_5\leqslant 5$. 当 $x_5=5$ 时，容易验证：$x_1=x_2=x_3=1$，$x_4=2$，$x_5=5$ 是满足条件的一组解，即 $x_5=5$ 能够达到. 所以，x_5 的最大值为 5　15. 由本书“质数和合数”这一讲的例 6，知不小于 40 的偶数，总可以表示成为两个奇合数之和；而且容易验证 38 不能表示成为两个奇合数之和. 因此，不能写成两个奇合数之和的最大偶数为 38

测试题　1. $\frac{b}{a}-\frac{b+c}{a+c}=\frac{c(b-a)}{a(a+c)}>0$，所以 $\frac{b}{a}>\frac{b+c}{a+c}$　2. $x<xy^2$

$< xy$　3. 最大值为 9　4. 当 $x \leqslant -2$ 时，有最大值 4；当 $x \geqslant 2$ 时，有最小值 -4　5. $a=3, b=4, c=5, a+b+c=12$　6. 由练习题 7，有 $a+\frac{1}{a} \geqslant 2$，$b+\frac{1}{b} \geqslant 2$，从而 $a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b} \geqslant 4$，即 $a+b+\frac{a+b}{ab} \geqslant 4$，又 $a+b>0$，从而 $1+\frac{1}{ab} \geqslant \frac{4}{a+b}$

第十二讲　整式的乘法和除法

练习题　1. (1) $6x^3+x^2-8x+3$　(2) $20x^7-8x^6-26x^5+8x^4+4x^3+2x^2+2x-2$　(3) $4ab$　(4) a^3+b^3　(5) $a^3+b^3+c^3-3abc$　(6) 商式 $=3x-13$，余式 $=47x-14$　(7) 商式 $=\frac{5}{2}x^2-\frac{5}{4}x-\frac{23}{8}$，余式 $=\frac{31}{8}$　(8) 商式 $=x^2-x+1$，余式 $=0$　(9) $a^3-b^3-2a^2b+2ab^2$　(10) $3x$　2. (1) 原式 $=2\,000^2-(2\,000-1)(2\,000+1)=2\,000^2-2\,000^2+1=1$　(2) 原式 $=(2-1)\cdot(2+1)(2^2+1)\cdots(2^{2^n}+1)=(2^2-1)(2^2+1)\cdots(2^{2^n}+1)=(2^4-1)\cdots(2^{2^n}+1)=\cdots=(2^{2^n}-1)\cdot(2^{2^n}+1)=2^{2^{n+1}}-1$　3. 余数为 2　4. 原式 $=(x^{111}+1)-(x^{31}+1)+(x^{13}+1)+(x^9+1)-(x^3+1)-1$ 而 $x+1 \mid x^n+1$ (n 为奇数)，故所求余数为 -1　5. 由公式：$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 知：$(x+y-2z)^3+(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3-3(x+y-2z)(y+z-2x)(z+x-2y)=0$. 从而得证

测试题　1. (1) $3x^3-7x^2-12x-4$　(2) $3x^5-2x^4-10x^3+13x^2+12x-6$　(3) $6a^2b+2b^3$　(4) a^3-b^3　(5) $-2x^2+3x$　(6) 商式 $=2x+2$，余式 $=7x+1$　(7) 商式 $=2x^2+x-\frac{1}{2}$，余式 $=7\frac{1}{2}$　(8) $a-b$　(9) -1　(10) $2^{64}-1$　2. 余数为 8

第十三讲　待定系数法

练习题　1. $p=-3, q=-10$　2. 可得 $a=7, b=4$，所以当 $x=3$ 时，$ax+b=7\times3+4=25$　3. $\begin{cases} q=2, \\ 1+p+q=9, \end{cases}$ 解之得 $\begin{cases} p=6, \\ q=2. \end{cases}$ 所以，所求二次三项式为 x^2+6x+2　4. 设这个二次三项式为 ax^2+bx+c，则 $\begin{cases} c=1, \\ a+b+c=4, \\ a-b+c=2. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=1, \\ c=1. \end{cases}$ 所以，所求的二次三项式为 $2x^2+x+$

1　5. $a=-1, b=-1, c=1$　6. $m=-3, n=2, k=4$　7. $m=-10$, $k=-5, l=2$　8. $3(x+1)^2-10(x+1)+14$　9. $A=2, B=-1$　10. $A=0, B=\frac{1}{2}, C=\frac{1}{2}$　11. $A=-\frac{2}{5}, B=1, C=\frac{2}{5}, D=\frac{4}{5}$　12. $(x^2+ax+b)^{10}+(cx+d)^{20}\equiv(x+5)^{20}$ 令 $x=-5$，得 $(25-a+b)^{10}+(-5c+d)^{20}=0$ 从而 $25-a+b=0$，$-5c+d=0$，得 $d=5c$，代入原式得 $(x^2+ax+b)^{10}\equiv(x+5)^{20}-(cx+5c)^{20}\equiv(1-c^{20})(x+5)^{20}$. 比较最高次项得：$1-c^{20}=1$，从而 $c=0$，$d=5c=0$，原式化为 $(x^2+ax+b)^{10}\equiv(x+5)^{20}\equiv[(x+5)^2]^{10}\equiv(x^2+10x+25)^{10}$ 从而 $a=10$，$b=25$，所以 $a=10$，$b=25$，$c=d=0$　13. 由题意，并注意最高次项系数和常数项相同，可设 $ax^3+bx+cx+d\equiv(x^2+p)\cdot\left(ax+\frac{d}{p}\right)\equiv ax^3+\frac{d}{p}x^2+apx+d$　故　$b=\frac{d}{p}$，$c=ap$，所以 $bc=\frac{d}{p}\cdot ap=ad$　14. 反证法. 设 $x^3+bx^2+cx+d=(x+p)(x^2+qx+r)$（其中 p, q, r 为整数）则　$x^3+bx^2+cx+d\equiv x^3+(p+q)x^2+(pq+r)x+pr$. 比较系数得：$\begin{cases}p+q=b, & (1)\\ pq+r=c, & (2)\\ pr=d, & (3)\end{cases}$ 由 $bd+cd=d(b+c)$ 为奇数，知 d 和 $b+c$ 都是奇数，由(3)知，p 与 r 也都是奇数，再由(1)知，q 与 b 的奇偶性相反. 由(2)知，q 与 c 的奇偶性相反. 故 b 与 c 的奇偶性相同，则 $b+c$ 必为偶数，矛盾！所以命题得证.

测试题　1. $b=5, d=-5$，因此，$b+d=0$　2. $k=-7$　3. $3(x-2)^2+17(x-2)+15$　4. $A=\frac{8}{7}, B=\frac{6}{7}$　5. $\begin{cases}b=3,\\ -a+b=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-5,\\ b=3,\end{cases}$ 所以多项式为 $-5x+3$　6. $\begin{cases}1+p+q=-3,\\ 1-p+q=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=-3,\\ q=-1,\end{cases}$ 所以，当 $x=2$ 时，值为：$2^2-3\times2-1=-3$

第十四讲　综合除法和余数定理

练习题　1. 商式 $=3x^2+6x+7$，余数 $=20$　2. 商式 $=-4x^3+14x^2-37x+111$，余数 $=-325$　3. 商式 $=-3x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{17}{4}x+\frac{15}{8}$，余数 $=\frac{87}{8}$　4. 商式 $=9x^2+3x+\frac{11}{3}$，余数 $=\frac{16}{3}$　5. 余数 $=f(-1)=6\times(-1)^5-4\times(-1)^3+5\times(-1)^2+3\times(-1)+8=8$　6. $f(-3)=(-3)^4+3\times(-3)^3+8\times(-3)^2-k\cdot(-3)+11=3k+83=0$ 所以，$k=-\frac{83}{3}$　7.

可用综合除法，计算 $f(x)$. 除以 $\left(x+\frac{1}{3}\right)$ 的余数，得 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=5$ **8.** $\begin{cases}f(-1)=(-1)^4-a\times(-1)^2-b\times(-1)+2=-a+b+3=0\\ f(-2)=(-2)^4-a\times(-2)^2-b\times(-2)+2=-4a+2b+18=0\end{cases}$ 解得 $a=6, b=3$ **9.** 所求余数与 $f(x)$除以 $x-2$ 的余数相同，可得为：$f(+2)=3\times 2^4-8\times 2^3+5\times 2^5-2+8=150$ **10.** 设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdot q(x)+(ax^2+bx+c)$，则 $\begin{cases}f(1)=a+b+c=1,\\ f(2)=4a+2b+c=2,\\ f(3)=9a+3b+c=3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0,\\ b=1,\\ c=0.\end{cases}$ 所以所求的余式为 x **11.** $\begin{cases}f(2)=8a+4b-16-12=0,\\ f(3)=27a+9b-24-12=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\ b=13.\end{cases}$ $f(x)$除以 $(x-2)(x-3)$ 的商式 $=-3x-2$（可通过 $f(x)$先除以 $x-2$，再用所得商式除以 $x-3$ 来获得）

12.

2	1	0	0	0	$-5q$	$4r$
		2	4	8	16	$32-10q$
2	1	2	4	8	$16-5q$	$32-10q+4r$
		2	8	24	64	
	1	4	12	32	$80-5q$	

由题意 $\begin{cases}80-5q=0,\\ 32-10q+4r=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}q=16\\ r=32\end{cases}$ **13.** 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$，又由题意，可得 $\begin{cases}f(x)=(x^2-1)(ax+n)+2x-5, & (1)\\ f(x)=(x^2-4)(ax+m)-3x+4. & (2)\end{cases}$ 在(1)式中，令 $x=\pm 1$，可得 $\begin{cases}a+b+c+d=-3, & (3)\\ -a+b-c+d=-7. & (4)\end{cases}$ 在(2)式中，令 $x=\pm 2$，可得 $\begin{cases}8a+4b+2c+d=-2, & (5)\\ -8a+4b-2c+d=10. & (6)\end{cases}$ 由(3)，(4)，(5)，(6)可解得 $a=-\frac{5}{3}, b=3, c=\frac{11}{3}, d=-8$. 所以所求三次多项式为：$-\frac{5}{3}x^3+3x^2+\frac{11}{3}x-8$ **14.** 由题意，可知 $f(x)=a(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)+1$. ($a$ 为整数，且 $a\neq 0$)，则 $f(b)=a(b-a_1)(b-a_2)(b-a_3)+1\neq 1$.（因为 b 不同于 a_1, a_2, a_3）

测试题 **1.** (1)商式 $=2x^3+x^2+14x+43$，余数 $=114$ (2)商式 $=x^4+2x^3+x^2-4x+2$，余数 $=10$ (3)商式 $=27x^2+8x+\frac{31}{3}$，余数 $=\frac{44}{9}$ (4)商

式 $=9x^2+\frac{8}{3}x+\frac{31}{9}$，余数 $=\frac{44}{9}$　2. $\begin{cases}f(1)=1-4+a+b-8=0,\\ f(2)=2^5-4\times2^4+2^3a+2b-8=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=3\\ b=8\end{cases}$　3. 设这个二次三项式为 ax^2+bx+c，则

$\begin{cases}f(1)=a+b+c=2,\\ f(2)=4a+2b+c=8,\\ f(-1)=a-b+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{5}{3},\\ b=1,\\ c=-\frac{2}{3},\end{cases}$ 所以所求的二次三项式为

$\frac{5}{3}x^2+x-\frac{2}{3}$

第十五讲　代数式的化简与求值(二)

练习题　1. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\times2=5$　2. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2-2ab+b^2+4ab=(a-b)^2+4ab=6^2+4\times3=48$　3. $(a-2b)^2=(a+2b)^2-4a\times(2b)=(a+2b)^2-8ab=7^2-8\times2=33$

4. $x^3+y^3+3xy=(x+y)(x^2-xy+y^2)+3xy\xrightarrow{x+y=1}(x^2-xy+y^2)+3xy=x^2+2xy+y^2=(x+y)^2=1$　5. 由 $a(a-1)+(b-a^2)=4$ 知 $b-a=4$. 所以 $\frac{a^2+b^2}{2}-ab=\frac{(b-a)^2+2ab}{2}-ab=\frac{(b-a)^2}{2}=\frac{4^2}{2}=8$

6. $6x^3+7x^2-5x+1999=2x(3x^2-x)+9x^2-5x+1999=2x+9x^2-5x+1999=9x^2-3x+1999=3(3x^2-x)+1999=3+1999=2002$　7. (1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$　(2) $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)=3\times(7-1)=18$　8. (1) $x^2-x+3=x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+3=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$　(2) $4x^2+5x-9=(2x)^2+2\cdot2x\cdot\frac{5}{4}+\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2-9=\left(2x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{169}{16}$　9. $n=a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)=m(a^2+b^2-ab)$ 所以 $a^2+b^2-ab=\frac{n}{m}$. 又 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=m^2$，两式相减，得 $3ab=m^2-\frac{n}{m}$，$ab=\frac{m^2}{3}-\frac{n}{3m}$. 所以，$a^2+b^2=\frac{n}{m}+ab=\frac{m^2}{3}+\frac{2n}{3m}$　10. $x^2-3x+1=0$，知 $x\neq0$，因此，两边同除以 x 得：$x-3+\frac{1}{x}=0$，即 $x+\frac{1}{x}=3$. 由练习题 7，知 $x^2+\frac{1}{x^2}=7$，

$x^3+\frac{1}{x^3}=18$. 而 $x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=7^2-2=47$ **11.** 由题设，知 $a\neq 0$，故可得 $\frac{2a^2+a+2}{2a}=3$，即 $a+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}=3$，$a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2}$. 故 $\frac{2a^4+a^2+2}{2a^2}=a^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2+\frac{1}{2}=\left(\frac{5}{2}\right)^2-2+\frac{1}{2}=\frac{19}{4}$，所求的代数式的值为 $\frac{4}{19}$ **12.** 令 $A=\frac{y}{x}$，则 $B=\frac{y+1}{x+2}$，故 $A-B=\frac{y}{x}-\frac{y+1}{x+2}=\frac{2y-x}{x(x+2)}$，由 $2y-x>0$，知 $A-B>0$，故 $A>B$ **13.** 由 $a+b+c=3$ 知 $(a-1)+(b-1)+(c-1)=0$，又 $(a-1)^3+(b-1)^3+(c-1)^3=0$，类似于例 3，我们知道，$(a-1)$，$(b-1)$，$(c-1)$ 中至少有一个为 0，其余两个互为相反数，由于 $a=2$，故 $a-1\neq 0$，所以 $(b-1)$ 和 $(c-1)$ 中有一个为 0，不妨设 $b-1=0$，即 $b=1$，则 $(c-1)=-(a-1)=-(2-1)=-1$，故 $c=0$. 所以，$a^2+b^2+c^2=2^2+1^2+0^2=5$ **14.** $14(a^2+b^2+c^2)=(a+2b+3c)^2=a^2+4b^2+9c^2+4ab+6ac+12bc$，整理可得 $13a^2+10b^2+5c^2-4ab-6ac-12bc=0$，即 $(4a^2-4ab+b^2)+(9a^2-6ac+c^2)+(9b^2-12bc+4c^2)=0$，亦即 $(2a-b)^2+(3a-c)^2+(3b-2c)^2=0$. 故 $\begin{cases}2a-b=0,\\3a-c=0,\\3b-2c=0.\end{cases}$ 又因为 $a=1$，可得 $\begin{cases}a=1\\b=2\\c=3\end{cases}$

测试题 **1.** $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=7^2-4\times 3=37$ **2.** $(a+3b)^2=(a-3b)^2+4a\cdot(3b)=(a-3b)^2+12ab=6^2+12\times 2=60$ **3.** 由 $b(b+1)-a(a+1)+(a+b)(a-b)=2$ 化简可得 $b-a=2$. 所以 $\frac{a^2+b^2}{4}-\frac{ab}{2}=\frac{a^2+b^2-2ab}{4}=\frac{(a-b)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{4}=\frac{2^2}{4}=1$ **4.** $x^3-\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x}-2x=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x-\frac{1}{x}\right)=2\cdot\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2+1\right]-2\times 2=2\cdot(2^2+3)-4=10$ **5.** 令 $A=\frac{y}{x}$，则 $B=\frac{y+1}{x+1}$，故 $A-B=\frac{y}{x}-\frac{y+1}{x+1}=\frac{y-x}{x(x+1)}$，由于 $y-x<0$，故 $A-B<0$，即 $A<B$ **6.** 同例 6，由 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，知 $2(a^2+b^2+c^2)=2ab+2bc+2ca$，移项，整理得 $(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$. 即 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ 因此，$a-b=0$，$b-c=0$，$c-a=0$，得：$a=b=c$

第十六讲　线　　段

练习题　1. (1) 有 15 条线段　(2) 有 2 001 000 条线段　2. AB 边上的线段数为 $\frac{5\times4}{2}=10$ 条，AD 边上的线段数为 $\frac{7\times6}{2}=21$，因此，图中有 $10\times21=210$ 个长方形　3. AF 边上的线段数为 $\frac{6\times5}{2}=15$ 条，故图中有 15 个三角形.(一条线段恰好对应一个三角形)　4. 从任一点出发，有 4 条射线，共 5 个点，所以共有 $4\times5=20$ 条射线　5. (1) AK，AM，AN，AH，AB，KM，KN，KH，KB，MN，MH，MB，NH，NB，HB 是图中所有的线段.　(2) 点 M 为 KN，AH 这两条线段的中点.　(3) 点 N 是线段 KH，MB 的一个三等分点　6. $CF=AF-AC=\frac{1}{3}AB-\frac{1}{4}AB=\frac{AB}{12}$.　$DF=AD-AF=\frac{1}{2}AB-\frac{1}{3}AB=\frac{1}{6}AB$.　$EF=AE-AF=\frac{3}{4}AB-\frac{1}{3}AB=\frac{5}{12}AB$. 所以，$CF+DF+EF=\frac{1}{12}AB+\frac{1}{6}AB+\frac{5}{12}AB=\frac{2}{3}AB=\frac{2}{3}\times12=8\text{cm}$　7. 令 $AC=k$，则 $CD=2k$，$DB=4k$，所以 $AB=AC+CD+DB=7k=14$，从而 $k=2$.　$MN=MC+CD+DN=\frac{1}{2}AC+CD+\frac{1}{4}DB=\frac{1}{2}k+2k+\frac{1}{4}\cdot4k=\frac{7}{2}k=\frac{7}{2}\times2=7$　8. 长方形个数 $=\frac{4\times3}{2}\times\frac{5\times4}{2}=6\times10=60$ 个. 正方形个数 $=4\times3+3\times2+2\times1=20$ 个　9. $AD+BE+CF>AP+BP+CP$. 由例 4 知，$AP+BP+CP>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$，因此，$AD+BE+CF>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$　10. 如图 16-18′所示，在 X 与 Y 点处架桥即可　11. 如图 16-19′，在 Z 与 Y 点处架桥即可　12. 如图 16-20′，放牧路线为 $A\to B\to C\to A$

测试题　1. (1) 有 $\frac{7\times6}{2}=21$ 条线段　(2) 有 $\frac{1\,999\times1\,998}{2}=1\,997\,001$ 条线段　2. 长方形个数为 $\frac{7\times6}{2}\times\frac{5\times4}{2}=21\times10=210$ 个　3. $PM=AP-AM=\frac{3}{5}AB-\frac{1}{2}AB=\frac{1}{10}AB=2$，所以，$AB=20\text{cm}$　4. 令 $BD=k$，则 $AB=3k$，$CD=4k$，所以，$AC=AB+CD-BD=3k+4k-k=6k$　而 $MN=MD+DN=AD-AM+DN=\frac{2}{3}AB-\frac{1}{2}AB+\frac{CD}{2}=\frac{2}{3}\times3k-\frac{1}{2}\times3k+\frac{1}{2}\cdot4k=\frac{5}{2}k=20$. 所以，$k=8\text{cm}$　从而 $AC=6k=48\text{cm}$　5. 如

图 16-24′所示，最短路线为 $A\to X\to Y\to B$

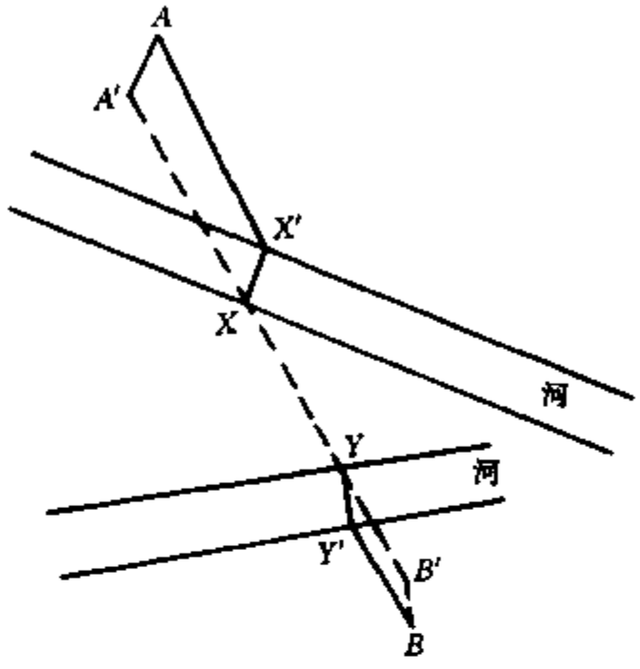


图 16-18′

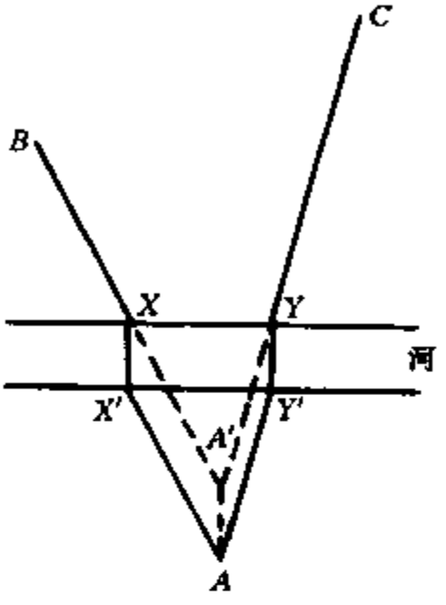


图 16-19′

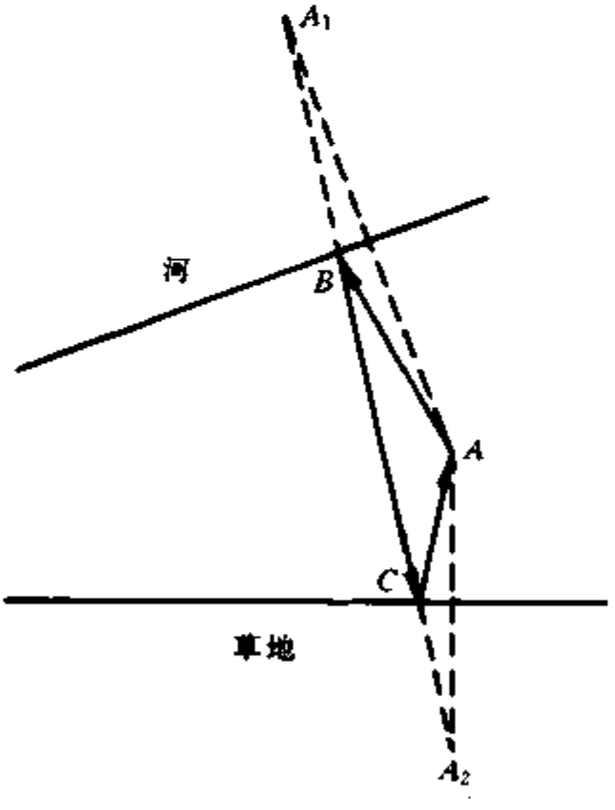


图 16-20′

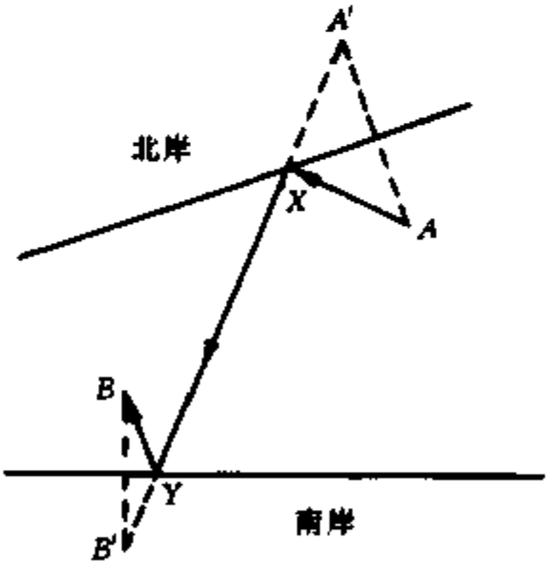


图 16-24′

第十七讲　角

练习题　1. (1) ×　(2) √　(3) ×　(4) ×　(5) ×　2. 设这个角为

$x°$，则它的余角为 $90° - x°$，则 $x - (90 - x) = 20$，解得 $x = 55$，$90° - x° = 35°$. 所以，这个角的余角的补角为：$180° - 35° = 145°$ **3.** 设这个角为 x，则它的补角和余角分别为 $180° - x$ 和 $90° - x$，$(180° - x) + (90° - x) - [(180° - x) - (90° - x)] = 60°$，所以 $x = 60°$，所以这个角的余角的度数为 $30°$ **4.** $\angle MON = \angle COM - \angle CON = \frac{1}{2}\angle BOC - \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}(\angle BOC - \angle AOC) = \frac{1}{2} \times 90° = 45°$ **5.** $\angle AOE = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}(90° - \angle BOC) = \frac{1}{2}(90° - 50°) = 20°$. $\angle AOD = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD = 40° + 50° + 40° = 130°$，$\angle EOF = \angle AOD - \angle AOE - \angle DOF = 130° - 20° - 20° = 90°$ **6.** (1) 共有 $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ 个角 (2) 共有 $\frac{2\,000 \times 1\,999}{2} = 1\,999\,000$ 个角 **7.** $\angle COD = \frac{1}{2}\angle AOC$，$\angle COE = \frac{1}{2}\angle BOC$ 所以 $\angle DOE = \angle COD + \angle COE = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOC) = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$ **8.** 设这个锐角为 α，则它的一半的余角的 2 倍为 $2 \times \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 180° - \alpha$；它的 2 倍角的补角为 $180° - 2\alpha$，而 $(180° - \alpha) - (180° - 2\alpha) = \alpha$，从而命题得证 **9.** 由于 $\triangle AOB$ 和 $\triangle OCD$ 都是 3×1 方格按对角线折成一半的图形，因此，显然如果把这两个图形剪下来，那么可以完全叠在一起，因此，$\angle 1$ 与 $\angle 9$ 互余；同理，$\angle 2$ 与 $\angle 6$，$\angle 4$ 与 $\angle 8$ 都互余，而 $\angle 3$，$\angle 5$，$\angle 7$ 都等于 $45°$，因此，$\angle 1 + \angle 2 + \cdots + \angle 9 = (\angle 1 + \angle 9) + (\angle 2 + \angle 6) + (\angle 4 + \angle 8) + \angle 3 + \angle 5 + \angle 7 = 90° + 90° + 90° + 45° + 45° + 45° = 405°$ **10.** 令 $\angle A_2OA_1 = x°$，则 $\angle A_3OA_2$，$\angle A_4OA_3$，$\cdots$，$\angle A_8OA_7$，$\angle A_1OA_8$ 的度数分别为 $x + 4$，$x + 2 \times 4$，$\cdots$ $x + 6 \times 4$，$x + 7 \times 4$，所以它们的和为：$x + (x + 4) + (x + 2 \times 4) + \cdots + (x + 7 \times 4) = 8x + 4 \times (1 + 2 + \cdots + 7) = 8x + 4 \times \frac{7 \times 8}{2} = 8x + 112$ 而这些角的和为一个周角，因此，$8x + 112 = 360$ 所以 $x = 31$，从而 $\angle A_2OA_3 = \angle A_2OA_1 + 4° = 31° + 4° = 35°$ **11.** $120° + \left(\frac{1}{2}\right)° \times 20 = 120° + 10° = 130°$ **12.** (1) 3 点正时，时针与分针显然成 $90°$. (2) 设 3 点 x 分时，时针与分针也成 $90°$，则 $6x - \frac{x}{2} = 90° + 90°$，解得 $x = 32\frac{8}{11}$. 即在 3 点 $32\frac{8}{11}$ 分时，两针也成 $90°$ 角

测试题 **1.** (1) $\surd$ (2) $\surd$ (3) $\times$ (4) $\surd$ **2.** 共有 $\frac{8 \times 7}{2} = 28$ 个角

3. 令 $\angle AOB = x°$，则 $\angle AOD = 7x°$，从而 $\angle BOD = \angle AOD - \angle AOB = 7x° - x° = 6x° = 90°$，所以 $x = 15$. 即 $\angle AOB = 15°$. $\angle BOC = \angle AOC - \angle AOB = 90° - 15° = 75°$，$\angle COD = \angle BOD - \angle BOC = 90° - 75° = 15°$ 4. 设这个角为 $x°$，则 $2(180° - x°) - (90° - x°) = 4x°$，解得 $x = 54$. 即这个角的度数为 54° 5. 设 3 点 x 分时，分针与时针在一直线上，它有两种情形 (1) 重合：则 $6x - \frac{x}{2} = 90°$，解得 $x = 16\frac{4}{11}$. (2) 成 180°角，则 $6x - \frac{x}{2} = 90 + 180$，解得 $x = 49\frac{1}{11}$，即当 3 点 $16\frac{4}{11}$ 分时，两针重合；当 3 点 $49\frac{1}{11}$ 分时，两针成 180°

第十八讲　从三角形内角和谈起

练习题 1. 内角和 $= (10 - 2) \times 180° = 1440°$，外角和 $= 360°$ 2. 第一个内角为 56°，第二个内角为 $56° \times 2 = 112°$. 第三个内角为 102°，所以，第四个内角为 $360° - 56° - 112° - 102° = 90°$ 3. 由例 4，$\angle D = \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2} \times 80° = 40°$ 4. 180° 5. 180° 6. 360°(连 AD，则 $\angle E + \angle F = \angle DAF + \angle ADE$) 7. $\angle DBC + \angle C = 90°$，即 $\angle DBC = 90° - \angle C$ $\angle A = 180° - \angle C - \angle ABC = 180° - 2\angle C = 2 \times (90° - \angle C)$ 从而 $\angle DBC = \frac{1}{2}\angle A$ 8. 过 C 点作 $CF \perp AD$ 于 F，则由条件易得 $\angle ABE = \angle ACF$，而 $\angle ACB > \angle ACF$，从而 $\angle ABE < \angle ACB$ 9. $\angle BAC = \angle D + \angle ACD$，$\angle DCE = \angle D + \angle B$，而 $\angle ACD = \angle DCE$，从而 $\angle BAC = 2\angle D + \angle B > \angle B$ 10. 连 BC，则 $\angle F + \angle FCB + \angle FBC = 180°$，$\angle A + \angle ACB + \angle ABC = 180°$，$\angle D + \angle DCB + \angle DBC = 180°$，从而 $\angle F = 180° - \angle FCB - \angle FBC = 180° - \angle FCD - \angle DCB - \angle FBA - \angle ABC = 180° - \frac{1}{2}\angle ACD - \frac{1}{2}\angle DBA - \angle DCB - \angle ABC$，$\angle A + \angle D = 360° - \angle ACB - \angle ABC - \angle DCB - \angle DBC = 360° - \angle ACD - \angle DCB - \angle ABC - \angle DCB - \angle DBA - \angle ABC = 2(180° - \frac{1}{2}\angle ACD - \frac{1}{2}\angle DBA - \angle DCB - \angle ABC)$，因此，$\angle F = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$ 11. 五边形内角和为 $(5 - 2) \times 180°$，由于它的五个内角成等差数列，因此，第三个内角(中间一个)的度数为其平均值，即 $\frac{(5 - 2) \times 180°}{5} = 108°$ 12. (1) 如 $\angle A = 120°$，$\angle B = 50°$，$\angle C = 10°$ 和 $\angle A = 110°$，$\angle B = 50°$，$\angle C = 20°$ (2) 由 $3\angle A > 5\angle B$ 得 $\angle A > \frac{5}{3}\angle B$，又 $3\angle C \leqslant 2\angle B$，有 $\angle B \geqslant \frac{3}{2}\angle C$，从而 $\angle A > \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \angle C = \frac{5}{2}\angle C$，即有 $\angle B < \frac{3}{5}\angle A$，$\angle C <$

$\frac{2}{5}\angle A$，从而得 $\angle A+\angle B+\angle C<2\angle A$. 又 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$，从而 $2\angle A>180°$，即 $\angle A>90°$. 所以$\triangle ABC$是钝角三角形

测试题 1. 内角和 $=(1999-2)\times 180°$，外角和 $=360°$ 2. 内角和 $=(5-2)\times 180°$，由于各个内角都相等，所以其中一个内角 $=\frac{(5-2)\times 180°}{5}=108°$. 3. 180° 4. 360° 5. 类似于例 6，得 $\angle A=40°$ 6. $\angle ADC=\angle DBC+\angle BCD$，$\angle DBC=\angle BDE+\angle E$，从而 $\angle ADC=\angle BDE+\angle E+\angle BCD>\angle BDE$

第十九讲 相交线和平行线

练习题 1. 延长 AB 交 DE 于 F，则 $\angle D=\angle BFE$，$\angle ABE=\angle E+\angle BFE=\angle D+\angle E$ 2. 分别过 E、F、G 三点作 AB 的平行线 3. 连 BD，由题设，易得 $\angle ABD+\angle EDB=180°$，从而 $AB\parallel ED$ 4. (1) 由 $AB\parallel CD$，得 $\angle A+\angle D=180°$，从而 $\angle C+\angle D=180°$，所以 $AD\parallel BC$，(2) $AB\parallel CD$ 得 $\angle A+\angle D=180°$，$\angle C+\angle B=180°$，由 $\angle A=\angle C$ 知 $\angle B=\angle D$ 5. 由 $AB\parallel CD$，知 $\angle EFD+\angle FEB=180°$，所以 $\angle FEB=180°-70°=110°$，从而 $\angle 1=\frac{1}{2}\times 110°=55°$ $\angle D=180°-\angle EFD-\angle 1=180°-70°-55°=55°$ 6. $CD\parallel EF$，知 $\angle DQG=\angle FRG=110°$，从而 $\angle PSQ=\angle DQG-\angle SPQ=110°-90°=20°$ 7. 由 $\angle ABE+\angle DEB=180°$ 知 $AC\parallel DE$，从而 $\angle CBE=\angle DEB$，又 $\angle 1=\angle 2$，故 $\angle FBO=\angle GEO$，又 $\angle BOF=\angle EOG$，从而得 $\angle F=\angle G$ 8. 由题设，易得 $\angle ADC+\angle BCD=180°$，从而 $AD\parallel BC$. 又 $DA\perp AB$，因此，$BC\perp AB$ 9. $\frac{10\times(10-1)}{2}=45$ 个交点 10. $1+\frac{10\times(10+1)}{2}=56$ 个部分 11. 类似于例 7

测试题 1. 由题意，有 $\begin{cases}\angle BOC-\angle AOD=40°,\\ \angle BOC+\angle AOD=360°-90°-90°=180°,\end{cases}$ 解得 $\angle BOC=110°$，$\angle AOD=70°$ 2. (1) × (2) × (3) √ (4) × (5) √ 3. 分别过 E、F 点作 AB 的平行线 4. $\angle ACB=180°-70°-56°=54°$，$\angle DCB=\frac{1}{2}\angle ACB=27°$. 所以，$\angle BDC=180°-\angle B-\angle DCB=180°-70°-27°=83°$. 5. 类似于例 7

第二十讲　面　　积

练习题　1. $\triangle ABC$ 的面积和 $\triangle DBC$ 的面积相等，它们分别减去 $\triangle BOC$，即得到 $\triangle AOB$ 和 $\triangle DOC$，因此，这两个三角形面积也相等　2. $\triangle CDE$ 的面积 $=\frac{1}{2}\triangle CBD$ 面积 $=\frac{1}{4}\triangle ABC$ 面积 $=\frac{1}{4}$　3. 略　4. 类似于例 3，把一边按 2∶3∶4 分成两段，连结顶点和各个分点即可　5. $\triangle ACE$ 的面积 ∶ $\triangle ACD$ 面积 $=AE:AD=\triangle ABE$ 面积 ∶ $\triangle ABD$ 面积 $=6:(9+6)$ 所以，$\triangle ACE$ 面积 $=\frac{6}{15}\times 10=4$　6. 有 $\triangle BDE$，$\triangle CDF$，$\triangle ACF$　7. $\triangle ABE$ 面积 $=\frac{1}{3}$ 长方形面积 $=\frac{1}{3}\times 9\times 6=18=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BE=\frac{1}{2}\times 6\times BE$，所以 $BE=6$，故 $CE=3$. 同理，$CF=2$. 从而 $\triangle CEF$ 的面积 $=\frac{1}{2}\times CE\times CF=\frac{1}{2}\times 3\times 2=3$，所以，$\triangle AEF$ 面积 $=\frac{1}{3}$ 长方形面积 $-\triangle CEF$ 面积 $=18-3=15$　8. 连结 CD，则 $\triangle BCD$ 的面积 $=3\triangle ABC$ 的面积 $=3$，$\triangle CDE$ 的面积 $=2\triangle BCD$ 的面积 $=6$. 故 $\triangle BDE$ 的面积 $=3+6=9$　9. 连结 AE，BF，CD，类似于练习题 8 的方法，可得 $\triangle DEF$ 的面积 $=7$　10. 连结 AC，由练习题 1，知 $\triangle BEF$ 面积 $=\triangle ACE$ 的面积，而由 $AE\parallel CD$，知 $\triangle ACE$ 的面积与 $\triangle ADE$ 的面积相等，从而得证　11. 如右图，过 A 点作 $PQ\parallel DE$，交 DG，EF 于 P、Q 两点，交 BC 于 O，则易证 $\triangle ABO$ 的面积 $\leqslant$ 长方形 $DEQP$ 的面积的一半，同理，$\triangle ACO$ 的面积 $\leqslant$ 长方形 $PQFG$ 面积的一半，从而，$\triangle ABC$ 的面积不超过正方形 $DEFG$ 面积的一半，即不超过 $\frac{1}{2}$　12. 由图(1)知，正方形边长为 21，从而直角等腰三角形的直角边长为 $21\times 2=42$，设它的斜边长为 a，则由勾股定理，$a^2=42^2+42^2=3\,528$. 由图(2)知，正方形的边长为 $\frac{1}{3}a$，从而图(2)中小正方形的面积为 $\left(\frac{1}{3}a\right)^2=\frac{1}{9}a^2=\frac{1}{9}\times 3\,528=392$

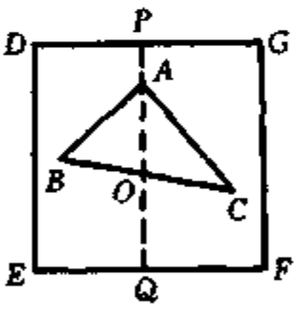


图 20-1'

测试题　1. 见例 2 的方法　2. $\triangle COD$ 面积 $=\triangle AOB$ 面积 $=\triangle ABC$ 面积 $-\triangle BOC$ 面积 $=8-5=3$　3. 连结 CE，则 $\triangle BCE$ 面积 $=2\triangle ABC$ 面积 $=2$，$\triangle DCE$ 面积 $=\triangle BCE$ 面积 $=2$，$\triangle ACD$ 面积 $=\triangle ABC$ 面积 $=1$，所以，$\triangle ADE$ 面积 $=1+1+2+2=6$　4. 类似于例 8，得截去的小长方形面积为

8　5. 由题意，$AM=BM=\frac{1}{2}$，$BN=\frac{1}{3}$，$NC=\frac{2}{3}$，$DP=\frac{1}{4}$，$PC=\frac{3}{4}$，从而 梯形 $PDAM$ 的面积 $=\frac{1}{2}(PD+AM)\cdot AD=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot 1=\frac{3}{8}$；$\triangle BNM$ 的面积 $=\frac{1}{2}\times BM\times BN=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$；$\triangle PCN$ 的面积 $=\frac{1}{2}\cdot PC\cdot NC=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$，所以，$\triangle PMN=1-\frac{3}{8}-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}=\frac{7}{24}$　6. 6　（大长方形面积 − 空白部分的面积）　7. $\triangle PAE$ 面积 + $\triangle PFC$ 面积 $=\frac{1}{2}\times 12\times 6=36$. $\triangle PHG$ 面积 + $\triangle PDI$ 面积 $=\frac{1}{2}\times 12\times 4=24$. 所以，阴影部分的面积为 $36+24=60$

第二十一讲　整　　除

练习题　1. 3，4，5 的最小公倍数为 60，因此所求的正整数个数为 200 ÷ 60 的商，即 3　2. 个数为 1 000 ÷ 24 的商，即 41　3. 奇数位数字和 − 偶数位数字和 = 0，而 11|0，故 $11\mid\overline{abcabc}$　4. 被 88 整除的数被 8 与 11 整除. 从而 $8\mid\overline{23b}$，易知 $b=2$. 由 $11\mid\overline{3a1\,232}$ 知 $11\mid[(3+1+3)-(a+2+2)]$，即 $11\mid(3-a)$，由 $0\leqslant a\leqslant 9$ 知 $a=3$　5. 11 与 13 互质，所以被 11 与 13 同时整除的数必被 $11\times 13=143$ 整除. 而 9 999 ÷ 143 的商为 69，所以所求的最大的四位数为 $143\times 69=9\,867$　6. 由 $\overline{72xy}$ 被 2 和 5 整除，得 $10\mid\overline{72xy}$，从而 $y=0$；又 $9\mid\overline{72x0}$，得 $x=9$ 或 0，当 $x=9$ 时 $4\nmid 7\,290$，从而 $x=0$. 易验证 2，3，4，5，6，9 都整除 7 200　7. $360=2^3\times 3^2\times 5$，所以它的正约数个数为：$(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=24$(个)　8. 类似于例 8，本题可化为求 $732-12=720$ 的正约数(>12)的个数　$720=2^4\times 3^2\times 5$，它的正约数个数为，$(4+1)\times(2+1)\times(1+1)=30$(个)，但应去掉 1，2，3，4，5，6，8，9，10，12，共 10 个，所以所求的个数为 $30-10=20$(个)　9. 算错了. 若我们以角为单位计价，则由题意，4 应该整除总价格，而 $4\nmid 210$，故售货员必定算错了　10. 由题意，这个数被 7，8，9 整除，从而也被它们的最小公倍数即 $7\times 8\times 9=504$ 整除. 在 100～999 之间被 504 整除的数只有一个，即 504. 所以所求的三位数就是 504　11. 由题意，所求的二位数减去 1 后，必同时被 3，4，5 整除，从而也被 60 整除. 而被 60 整除的二位数只有 60，故所求的二位数为 $60+1=61$　12. 在 100 以内去掉 3 的倍数和 4 的倍数，留下的数就是所求的正整数. 但注意，每个 12 的倍数被去掉 2 次，故还要加还一次，即 100 − 3 的倍数的个数 − 4 的倍数的个数 + 12 的倍数的个数 $=100-33-25+8=50$　13. 由于所组成的四位数被 5 整除，所以 5 一定要选作个位数字，又由于四位数被 3 整除，所以在

选择 5 的情况下，去掉的必须为 8，(5 + 6 + 7 + 9 为 3 整除，而将其中一数换成 8，必不为 3 整除)，所以所选的数字为 5，6，7，9. 由这 4 个数字组成的最大四位数为9 765，易验证，7|9 765，故所求的四位数即为9 765　**14.** $120 = 2^3 \times 3 \times 5$. 因此，正约数个数为：$(3+1) \times (1+1) \times (1+1) = 16$. 这些正约数的和为：$(1+2+4+8) \times (1+3) \times (1+5) = 360$. (也可以把 8 个正约数全写出，后求和. 上面的计算可作为一个公式记忆，即若 $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$，则 N 的正约数的和为：$(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{a_1}) \times (1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{a_2}) \times \cdots \times (1 + p_K + p_K^2 + \cdots + p_K^{a_K})$. 在约数个数很多的情况下，用这公式比较简单)　**15.** 由题意，$n|(118 - 92)$ 即 $n|26$，且 $n|(157 - 118)$ 即 $n|39$，从而 n 必整除 26 与 39 的最大公约数，即 $n|13$，而 13 是质数，$n \neq 1$，所以 $n = 13$

测试题　**1.** 9　**2.** 62　**3.** 100 000 ÷ (9 × 11 × 17) 的商为 59，从而所求的六位数为 $(59 + 1) \times (9 \times 11 \times 17) = 100\,980$　**4.** $100 - 33 - 20 + 6 = 53$　**5.** $a = 1, b = 6$　**6.** 数字和为 $1\,999 \times (1 + 9 + 9 + 9)$，它除以 9 所得的余数为 1，从而所求的余数也为 1　**7.** $72 = 2^3 \times 3^2$，正约数个数 $= (3+1) \times (2+1) = 12$　**8.** $n|(88 - 67)$ 且 $n|(116 - 88)$，即 $n|21$ 且 $n|28$，从而 n 整除 21 与 28 的最大公约数，即 $n|7$，而 $n \neq 1$，7 为质数，从而 $n = 7$，所以，它们除以 7 所得的余数为 4

第二十二讲　奇数和偶数

练习题　**1.** 奇数　**2.** 100；n^2　**3.** 水中　**4.** 51，53，55，57，59，61，63　**5.** 由于个位数字为 2，所以这三个相邻偶数的个位数字必为 4，6，8，而 $100^3 > 8***2 > 90^3$，故这三个相邻偶数必为 94，96，98　**6.** 偶数　**7.** $189 = 5 \times 37 + 4$，故 A，B，C，D 被拉 38 次，而 E 被拉 37 次，所以，最后 A，B，C，D 仍是灭的，而 E 是亮的　**8.** 能. 如下所示(↑表示杯口朝上，↓表示杯口朝下)，即为一种翻法

↑ ↑ ↑ ↑
↓ ↓ ↓ ↑
↓ ↑ ↑ ↓
↑ ↑ ↓ ↑
↓ ↓ ↓ ↓

9. 不能. 类似于例 7　**10.** 不能. 若能，必为从奇→偶→奇→…→偶→奇的走法，由此，去掉最后一个奇数(为 1)，前面 n 个奇数个数必和偶数个数相同. 但从 1～9 有 4 个偶数，5 个奇数，所以不能做到　**11.** 不能. 若能，则 3×9 为偶数，但 3×9 为奇数，因此不能. (一条直线连结两点，每一点都计一次，所以一条直

线记了 2 次） 12. 偶数

测试题 1. 97，99，101，103，105，107 2. 52，54，56 3. 奇数 4. 不能（类似于例 7） 5. 偶数（类似于例 5） 6. 若这个数是奇数，则它的平方也为奇数（奇数 × 奇数 = 奇数），矛盾！因此，这个数必为偶数 7. 10 道题，每一题的得分数为奇数，因此，对某一个人而言，它的得分数为 10 个奇数的和，是一个偶数，从而，不论有多少人，他们的得分和仍为偶数

第二十三讲 质数和合数

练习题 1. $3\times 9\times 1=27$ 2. $2+53+97=152$ 3. p_1 与 p_2 为奇质数，故 p_1+p_2 为偶数，即 $2\mid p_1+p_2$，又 $p_1+p_2>2$，所以 p_1+p_2 为合数 4. 由题意，$p=2$，故 $p^3+3=11$ 仍为质数 5. 2. 6. $n_1^2-n_2^2-2n_1-2n_2=(n_1+n_2)(n_1-n_2)-2(n_1+n_2)=(n_1+n_2)(n_1-n_2-2)=19$，由 19 为质数，知 $\begin{cases}n_1+n_2=19\\ n_1-n_2-2=1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n_1=11\\ n_2=8\end{cases}$ 7. $2\times 3\times 5\times 7=210$ 8. $2000=2^4\times 5^3$. 所以它的所有正约数的个数为 $(4+1)\times(3+1)=20$. 它的质因数有 2 和 5，它们的和为 $2+5=7$ 9. $3\mid 111\,111$，$3\mid 9\times 10^k$，从而 $3\mid(111\,111+9\times 10^k)$，所以 $111\,111+9\times 10^k$ 必为合数 10. 4. 因为当 $n=6k$ 时，$n+3=6k+3=3(2k+1)$；当 $n=6k+1$ 时，$n+3=2(3k+2)$；当 $n=6k+2$ 时，$n+7=3(2k+3)$；当 $n=6k+3$ 时，$n+3=6(k+1)$；当 $n=6k+5$ 时，$n+7=3(2k+4)$；故只有 $n=6k+4$，即余数为 4 11. n 与 n^5 同奇偶，故 $2\mid n^5-n$；又 $n^5-n=n(n^4-1)=n(n^2-1)(n^2+1)=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$. 当 $n=5k$ 时，$5\mid n$，从而 $5\mid n^5-n$. 同理，当 $n=5k+1$ 时，$5\mid n-1$；$n=5k+2$ 时，$5\mid n^2+1$；当 $n=5k+3$ 时，$5\mid n^2+1$；当 $n=5k+4$ 时，$5\mid n+1$. 从而不论 n 是任何自然数，都有 $5\mid n^5-n$，从而 $10\mid n^5-n$ 12. (1) 当 $n=41k$ $(k=1,2,\cdots)$ 时，$41\mid n^2+n+41$，(2) 当 $n=1+43k$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 时，$43\mid n^2+n+41$ 13. 假设只有 p_1，p_2，…，p_k 为质数，令 $N=p_1p_2\cdots p_k+1$，则 $p_i\nmid N(i=1,2,\cdots,k)$，从而 N 的质因数必不与 p_i 相同. 矛盾！因此自然数中必有无穷多个质数

测试题 1. $2+4+47+71=124$ 2. 由题意，$p+q=333$，又 p，q 都是质数，则其中一个必为偶质数，即 2，又 $p<q$，所以 $p=2$，$q=333-2=331$ 3. 这个质数必为偶数，故为 2，所以另一个数为 $125-2^2=121$，所以它们的积为 $2\times 121=242$ 4. 2 5. $(n_1+n_2)(n_1-n_2)=61$，61 为质数，且 n_1+n_2

$>n_1-n_2$，故 $\begin{cases}n_1+n_2=61,\\ n_1-n_2=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n_1=31\\ n_2=30\end{cases}$ 6. $1000=2^3\times5^3$，它只有两个质因数；$1001=7\times11\times13$，它有三个质因数，故有三个质因数的最小四位数为1001 7. 由$11|1234321$，$11|111111$，故$11|(12344321+111111\times10^k)$ $(k\geqslant0)$，即它必为合数 8. 当$n=3k+1$ $(k>1)$时，$3|(n^2+n+1)$，从而有无穷多个n，使n^2+n+1为合数

第二十四讲 二元一次不定方程

练习题 1. (1) 没有，由于2与6的最大公约数$d=2$不整除5 (2) 有，$d=2|8$ (3) $3x-6y=6$，$d=3|6$，故有整数解 (4) $3x+2y=11$，$d=1|11$，故有整数解 2. (1) $\begin{cases}x=\dfrac{7-6k}{2}\\ y=k\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=-\dfrac{4}{3}k-3\\ y=k\end{cases}$ 其中k都是任意数 3. 下面的k都是任意整数 (1) $\begin{cases}x=2+2k\\ y=1-k\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=1-4k\\ y=-1-3k\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=2+7k\\ y=-4k\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=-2+30k\\ y=1-13k\end{cases}$ 4. (1) 无正整数解，因为$11x+15y\geqslant11+15=26>20$ (2) $\begin{cases}x=3\\ y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=8\\ y=1\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=-1-2k\\ y=-1-5k\end{cases}$ 其中$k=-1,-2,-3,\cdots$ (4) 无正整数解，因为该方程的通解为 $\begin{cases}x=8k,\\ y=4-5k,\end{cases}$ 令 $\begin{cases}8k>0,\\ 4-5k>0,\end{cases}$ 得 $0<k<\dfrac{4}{5}$，而在0和$\dfrac{4}{5}$之间没有任何整数，即此方程无正整数解 5. 由题意得：$11x+17y=100$，且$x>0$，$y>0$，解上述方程的正整数解，为$x=6$，$y=2$. 所以，100可分成66与34之和，其中一个为11的倍数，另一个为17的倍数

测试题 1. (1) $\begin{cases}x=2-\dfrac{5}{3}k\\ y=k\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=\dfrac{11-7k}{3}\\ y=k\end{cases}$ 其中k为任意数 2. (1) 有 $d=1|1\,118$ (2) 无 $d=2|10\,101$ (3) 无 $d=7|1$ (4) 有 $d=1|999$ 3. (1) 整数解为(其中k为任意整数) $\begin{cases}x=1+5k,\\ y=5-3k,\end{cases}$ 令 $\begin{cases}1+5k>0\\ 5-3k>0\end{cases}$ 得 $-\dfrac{1}{5}<k<\dfrac{5}{3}$，所以$k=0$，1，即原方程的正整数解为 $\begin{cases}x=1\\ y=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=6\\ y=2\end{cases}$ (2) 整数解为 $\begin{cases}x=1-3k\\ y=3-7k\end{cases}$ (k为整数)，

正整数解为 $\begin{cases}x=1-3k\\y=3-7k\end{cases}$ $k=0,-1,-2,\cdots$ (3) 整数解为 $\begin{cases}x=1+2k\\y=2-k\end{cases}$ (k 为整数)，正整数解为 $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$ (4) 整数解为 $\begin{cases}x=3+7k\\y=-1-3k\end{cases}$ (k 为整数)，没有正整数解 **4.** $118=11x+13y$，$x>0, y>0$. 解得 $\begin{cases}x=6,\\y=4,\end{cases}$ 即 $118=66+52$

第二十五讲 加法原理和乘法原理

练习题 **1.** $12+20+15=47$(种) **2.** $18+15=33$(种) **3.** (1) $2+4+5=11$(种) (2) $2\times4\times5=40$(种) **4.** $2\times3+4=10$(种) **5.** $3\times4\times2=24$(项) **6.** $2\,000=2^4\times5^3$，所以它的正约数个数为 $(4+1)\times(3+1)=20$(个) **7.** $4\times4\times4=64$(个) **8.** $\frac{2^6-2}{2}=31$(种) **9.** 共有 $3\times2\times1=6$ 个三位数 (1) 每个三位数的数字和都为 $2+3+4=9$，故总和为 $6\times9=54$ (2) 因为以 2，3，4 为首位的三位数各有 2 个，同理，以 2，3，4 为十位、个位的也各有 2 个，所以，所有这些三位数的和为：$2\times(2+3+4)\times(10^2+10+1)=1\,998$ **10.** $2\,000=2^4\times5^3$，故正约数个数为 $(4+1)\times(3+1)=20$ 个，而若所求的是偶约数，则 2 至少取一个，因此，其个数为 $4\times(3+1)=16$(个) **11.** (1) $4\times5\times5\times5=500$(个) (2) $4\times5\times5\times3=300$ 个 (3) $4\times4\times3\times2=96$(个) (4) $96-2\times3\times3\times2=60$(个) (5) 一位数：4 个；二位数：$4\times4=16$(个)；三位数：$4\times4\times3=48$(个)；四位数：$4\times4\times3\times2=96$(个)；五位数：$4\times4\times3\times2\times1=96$(个)．共 $4+16+48+96+96=260$ 个 **12.** $4\times4\times4=64$ 种 **13.** $4\times3\times2\times1=24$ 种 **14.** 从 100～999 共有 900 个三位数，其中有 $900\div3=300$ 个被 3 整除．下面计算被 3 整除但不含数字 9 的三位数．这种数的百位，不能为 0 和 9，有 8 种选法．十位不能为 9，有 9 种选法，个位根据前两位数字和除以 3 所得的余数而定：当余数为 0 时，个位数字只能取 0，3，6；当余数为 1 时，个位数字只能取 2，5，8；当余数为 2 时，个位数字只能取 1，4，7；总之，无论前面两位数字怎样取，个位数都只有 3 种取法，故被 3 整除而不含数字 9 的数有：$8\times9\times3=216$ 个，从而被 3 整除又含有数字 9 的三位数有：$300-216=84$ 个

测试题 **1.** $2+3+4=9$ 种 **2.** $3\times5=15$ 种 **3.** $10\times8\times11=880$ 种 **4.** $720=2^4\times3^2\times5$，故共有 $(4+1)\times(2+1)\times(1+1)=30$ 个正约数，其和为：$(1+2+2^2+2^3+2^4)\times(1+3+3^2)\times(1+5)=2418$ **5.** $2^5-2=30$ 种 **6.** (1) $5^4=625$ 个四位数，$5^3\times3=375$ 个奇数 (2) $5\times4\times$

$3\times2=120$ 个没有重复数字的四位数，由于 $1+2+3+4+5=15$，所以要使这个四位数被 3 整除，不选的数字必须为 3，从而这样的四位数有：$4\times3\times2\times1=24$ 个

第二十六讲　抽屉原理

练习题　1. 人的属相共 12 种，把它们作为 12 个抽屉、把 13 个人作苹果，由抽屉原理，易得　2. 把一分钟分成 60 秒，让它们作为 60 个抽屉则一分钟击球 65 次，由抽屉原理，必有某一秒钟击球次数超过一次

3. 如图，把边长为 1 的正三角形分成四个边长为 $\frac{1}{2}$ 的小正三角形，则 5 个点中必有 2 个点落在一个小正三角形中，它们之间的距离必不超过其边长 $\frac{1}{2}$　4. 按照一个整数除以 10 的余数，可以分为 10 类，把这 10 类作为 10 个抽屉，则任意 n 个数必有两个数除以 10 的余数相同，从而它们的差必为 10 的倍数　5. 将 1～100 按下列方法分组　$(1,1\times2,1\times2^2,\cdots,1\times2^5)$，　$(3,3\times2,3\times2^2,\cdots,3\times2^5)$，　$(5,5\times2,5\times2^2,\cdots,5\times2^4)$，　…　$(49,49\times2)$，　(51)，　(53)，　…　(99). 共分成 50 组，把它们看作 50 个抽屉，则从中抽 51 个数，必有两个数从同一抽屉中抽出，这两个数中较大的一个为较小的一个的倍数　6. 把这 8 个数分成下面四个抽屉：(1, 15)，(3, 13)，(5, 11)，(7, 9)，则从中选五个数，必有两个从同一抽屉中选出，这两个数的和必为 16　7. 见例 5，把两个人认识看作两点用红线连接，两个人不认识看作两点用蓝线连接　8. 4 个　9. 13 个（从最“坏”的情况考虑，即取出 7 个白球，5 个蓝球，1 个红球的情况）　10. 先讨论其中一人 A 与其他 16 人通信的情况，将所讨论的 3 个问题看作三个抽屉，记作红、蓝、黄，则其中至少有 $\left[\frac{16}{3}\right]+1=6$ 个人与它同放入一个抽屉中，不妨设为黄色抽屉，即 A 与其中 6 个人所讨论的问题都是“黄”. 如果这 6 人中还有两人讨论问题黄，则问题已经解决；如果这 6 人中没有两人讨论问题黄，则他们只讨论问题红或蓝，由例 5 知，也必有三个人讨论同一问题　11. 令 $A_1=a_1$，$A_2=a_1+a_2$，$A_3=a_1+a_2+a_3$，…，$A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，若 A_1，A_2…，A_n 这 n 个数中有一个是 n 的倍数，则结论已成立. 否则，A_1，A_2，…，A_n 这 n 个数除以 n 所得的余数必为 1，2，…，$n-1$ 中的一个，把余数相同的归为一类，则有 $n-1$ 类，这 n 个数必有两个在同一类中，不妨设为 A_i 和 $A_j(j>i)$，则 $n\mid A_j-A_i$，而 $A_j-A_i=a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_j$，从而本题得证　12. $21\,879=3^2\times11\times13\times17$. 在 17 个自然数中，必有一个数为 17 的倍数或有两个数，差为 17 的倍数，从而最多选 2 个数，作它们的差，它为 17 的倍数，设

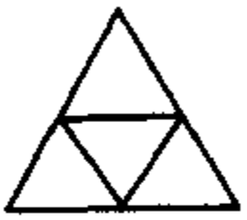


图 26-3′

为 (a_1-a_2)，(或一个数，即为 a_1 是 17 的倍数)；所以至少剩下 15 个数，同理，在这 15 个数中，必存在两个数，差为 13 的倍数，设为 (a_3-a_4)；在余下的 13 个数中，必存在两个数，差为 11 的倍数，设为 (a_5-a_6)；在剩下的 11 个数中，必存在两个数，差为 9 的倍数，设为 (a_7-a_8)，则 $17\times13\times11\times9\mid(a_1-a_2)\cdot(a_3-a_4)\cdot(a_5-a_6)\cdot(a_7-a_8)$，即 $21\,879\mid(a_1-a_2)\cdot(a_3-a_4)\cdot(a_5-a_6)\cdot(a_7-a_8)$ (或 $21\,879\mid a_1\cdot(a_3-a_4)\cdot(a_5-a_6)\cdot(a_7-a_8)$) **13.** (1) 若在 52 个自然数中，有两个自然数除以 100 所得的余数相同，则它们的差必为 100 的倍数，从而命题得证，故下设这 52 个自然数除以 100 所得的余数互不相同. 将自然数除以 100 所得的余数按下面的方法分组：(0)，(1，99)，(2，98)，…，(49，51)，(50)，共分为 51 组. 现有 52 个自然数，故它们除以 100 所得的余数必有两个落入同一组中，这两个数的和必为 100 的倍数 **14.** 设 n 个人互相握手，每一个人最多握 $n-1$ 下，最少握 0 下，但若有人握 0 下，则没有一个人握 $n-1$ 下. 即握手的情况为 1，2，…，$n-1$ 下或 0，1，2，…，$n-2$ 下. 不管是哪一种情况，都只有 $n-1$ 种可能，把它当作 $n-1$ 个抽屉. 现共有 n 个人，所以必有两人落入同一个抽屉中，即他们俩握手的次数相同

测试题 **1.** 把 12 个邮筒作抽屉，15 个人作苹果，由抽屉原理即得 **2.** 情况有：(足，足)，(足，排)，(足，篮)，(排，排)，(排，篮)，(篮，篮)，共 6 种. 故若有 7 个学生来拿球，必有两人所拿的球完全一样 **3.** 以除以 $n-1$ 所得的余数 0，1，…，$n-2$ 为抽屉共 $n-1$ 个. 所以 n 个数必有两个数落在同一抽屉中，这两个数的差为 $(n-1)$ 的倍数 **4.** 把 1～20 分成(1，2，4，8，16)，(3，6，12)，(5，10，20)，(7，14)，(9，18)，(11)，(13)，(15)，(17)，(19)，共 10 组. 作为抽屉. 11 个数中必有两个从同一抽屉中抽取，较大一个是较小一个的倍数 **5.** 以(1)，(3，15)，(5，13)，(7，11)，(9)为抽屉 **6.** 类似于练习题 12 的做法

第二十七讲　应用题精选

练习题 **1.** 设甲桶 x 升，乙桶 y 升，由题意，有 $\begin{cases}x=3y,\\(x-6)=2(y+6),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=54(\text{升})\\y=18(\text{升})\end{cases}$ **2.** 设 A，B 两列车的速度分别为 x 千米/时和 y 千米/时，则 $\begin{cases}2(x+y)=500,\\20(x-y)=500,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=137.5(\text{千米/时})\\y=112.5(\text{千米/时})\end{cases}$ **3.** 设C车的速度为x千米/时，自行车的速度为 y 千米/时，则 $\begin{cases}(72-y)\times\dfrac{6}{60}=(60-y)\times\dfrac{10}{60},\\(72-y)\times\dfrac{6}{60}=(x-y)\times\dfrac{12}{60},\end{cases}$ 解得 $x=57$ 千米/时 **4.** 设静止速度为 x，水流速度为 y，则

$\begin{cases}(x+y)\times 14=280,\\(x-y)\times 20=280,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=17\\y=3\end{cases}$ 所以，静水时航行用时为：$280\div 17=\frac{280}{17}$(小时) 5. 设哥哥与弟弟今年年龄分别为 x 岁与 y 岁，则 $\begin{cases}(x+3)+(y+3)=27,\\y=x-y,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=14(岁)\\y=7(岁)\end{cases}$ 6. 设有 x 天下雨，则晴天有：$(112\div 14-x)$天，则：$(112\div 14-x)\times 20+12\times x=112$，解得 $x=6$ 天 7. 设甲、乙单独做该工作，分别需 x 与 y 小时，则 $\begin{cases}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\times 10=1,\\\frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{18}{y}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{15}\\\frac{1}{y}=\frac{1}{30}\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=15(小时)\\y=30(小时)\end{cases}$ 8. 设这个三位数为$\overline{xyz}$，则 $\begin{cases}x+y+z=17,\\z-y=1,\\x=2y,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=8,\\y=4,\\z=5.\end{cases}$ 所以所求的三位数为 845 9. 设这四个数的和为 x，则这四个数分别为：$x-12$，$x-20$，$x-17$，$x-29$，由题意得 $(x-12)+(x-20)+(x-17)+(x-29)=x$，解得 $x=26$，所以所求的四个数分别为：14，6，9，-3 10. 设甲、乙、丙三人单独做，各需 x 天、y 天和 z 天，则 $\begin{cases}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\times 5=1,\\\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\times 8=1,\\\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\times 7=1,\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{51}{560},\\\frac{1}{y}=\frac{61}{560},\\\frac{1}{z}=\frac{19}{560},\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x=\frac{560}{51}(天)\\y=\frac{560}{61}(天)\\z=\frac{560}{19}(天)\end{cases}$ 11. 设 $\overline{abcde}=x$，则 $\overline{2abcde}=2\times 10^5+x$，$\overline{abcde2}=10x+2$，所以 $(200\,000+x)\times 3=10x+2$，解得 $x=85\,714$. 所以原来的六位数为285714 12. 设所求的三位数为$\overline{xyz}$，经过排列所得的最大数为$\overline{ABC}$$(9\geqslant A>B>C>0)$，则最小数必为$\overline{CBA}$，由题意：$\overline{ABC}-\overline{CBA}=\overline{xyz}$，即 $(100A+10B+C)-(100C+10B+A)=\overline{xyz}$. 即 $99(A-C)=\overline{xyz}$，由题意，$2\leqslant A-C\leqslant 8$，所以所有可能值只有：$99\times 2=198$，$99\times 3=297$，$99\times 4=396$，$99\times 5=495$，$99\times 6=594$，$99\times 7=693$，$99\times 8=792$，容易验证，只有 $495=99\times(9-4)$ 符合条件，所以所求的

三位数为 495　13. 设为 4 点 x 分成一直线，则分针来追过 $120°+180°=300°$，由题意，有 $6x-\frac{1}{2}x=300$，解得 $x=54\frac{6}{11}$　14. 设 8 点 x 分时，两针成 15°角，则有两种情况①分针没有追上时针时；②分针已经超过时针. 对情况①，有：$6x-\frac{1}{2}x=240-15$，解得 $x=40\frac{10}{11}$. 对情况②，有：$6x-\frac{1}{2}x=240+15$，解得 $x=46\frac{4}{11}$. 所以，在 8 点 $40\frac{10}{11}$分或 8 点 $46\frac{4}{11}$分时，两针恰成 15°

测试题　1. 设哥哥今年 x 岁，则弟弟为 $(55-x)$ 岁，利用年龄差相等，可得：$(55-x)-\frac{1}{2}(55-x)=x-(55-x)$，解得 $x=33$，$55-x=22$　2. 设这个两位数为 $\overline{xy}$，则 $\overline{xy}=10x+y$，$\overline{yx}=10y+x$，由题意，得 $\begin{cases}10x+y=6\times(x+y)+3,\\10y+x=4\times(x+y)+9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=7\\y=5\end{cases}$，所以所求的两位数为 75　3. 设乙数为 x，则甲数为 $6x$，由题意，有 $(6x+18)=3\times(x+30)$，解得 $x=24$，$6x=144$　4. 设甲、乙两人单独做各需 x 天与 y 天，则 $\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{2}{y},\\\frac{2}{\frac{1}{x}}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{y}}=4+\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{6},\\\frac{1}{y}=\frac{1}{12},\end{cases}$ 故 $\begin{cases}x=6\\y=12\end{cases}$　5. 设静水速度为 x 千米/时，水流速度为 y 千米/时，则 $\begin{cases}(x+y)\times3=72,\\(x-y)\times4=72,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=21(\text{千米}/\text{时})\\y=3(\text{千米}/\text{时})\end{cases}$　6. 设 10 点 x 分时，两针成一直线(不重合)，则 $6x-\frac{1}{2}x=120$，解之得 $x=21\frac{9}{11}$，所以，10 点 $21\frac{9}{11}$分时，两针成一直线

第二十八讲　生活中的数学

练习题　1. 能. 只要切成"#"字形即可　2. 至少需要 21 分钟. 先两张两张烙，共烙 18 张需 18 分钟(每两张两分钟)，剩下 3 张饼，按例 3 的方法烙，需 3 分钟，共 21 分钟　3. 8 天，前面 7 天，白天上 3 米，晚上下 2 米，每天向上爬 1 米，最后一天，一下子爬了出去，晚上不会再往下掉了　4. 永远也跳不出去，因为青蛙每次跳起后又落到缸底　5. 在 29 天的时候. 因为过一天，长大一倍，到 30 天长满整个池塘　6. 可建在 C、D 之间的任一点(包括 C、D)　7. 可以. 先

9 颗 9 颗地称. 若相等，则余下的 9 颗必有一颗是假的；若不相等，则轻的一面必有一颗是假的. 然后对存疑的 9 颗珍珠，3 颗 3 颗地称，同样的道理，能判定假珍珠在某 3 颗中. 最后 1 颗 1 颗称，若相等，余下的一颗为假的；若不相等，则轻的一颗是假的 **8.** 第三组 **9.** 先写者. 策略：先写 6，则后写者只能写 4，5，7，8，9，10 中的一个，将它们分成数对(4，5)，(8，10)，(7，9). 若后写者写某个数，则先写者就写同一数对中的另一个，先写者必胜 **10.** 甲有必胜的策略如下：先取 3 颗，剩 45 颗棋子。然后若乙取 k 颗($1 \leqslant k \leqslant 4$)，则甲取($5-k$)颗，(显然 $1 \leqslant 5-k \leqslant 4$). 于是，到后来必会剩 5 颗棋子让乙取，此时不论乙取多少颗，甲都可以把余下的全取走 **11.** 如表中所示，由题意，得：

天数 上午 / 下午	雨	晴
雨	a	b
晴	c	d

$$\begin{cases} b+d=7, & (1) \\ c+d=5 & (2) \\ a=0 & (3) \\ b+c=8 & (4) \end{cases}$$

解得：$a=0, b=5, c=3, d=2$. 所以，$x=a+b+c+d=10$(天) **12.** A 班中必有某一学生认识 B 班中学生人数最多，设他为 a_1. 由已知，必存在 B 班中一学生(设为 b_2)与 a_1 不认识. 对 b_2，又必存在 A 班中一学生(设为 a_2)与 b_2 认识. 显然 a_2 不是 a_1，且 a_2 不会认识 a_1 所认识的所有 B 班学生(否则，a_2 认识的 B 班人数比 a_1 多，因为他还认识 a_1 不认识的 b_2). 从中找出一位 a_2 不认识的 B 班学生，设为 b_1. a_1，a_2，b_1，b_2 满足题意

测试题 **1.** 1 999 分钟 **2.** A 和 E **3.** 类似于例 4，可得 $a_1=1, a_2=2$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n>2)$，即得到一列数：1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，…. 当有 10 个台阶时，共有 89 种迈法 **4.** 甲有必胜的策略：先取 2 颗棋子，则剩下 48 颗棋. 于是问题就化为有 48 颗棋子，乙先取，甲后取，谁胜？类似于例 6，可知此时甲必胜 **5.** 2 次. 方法类似于练习题 7 **6.** 乙有必胜的策略：若甲取 k 颗棋子($1 \leqslant k \leqslant 4$)，则乙取($5-k$)颗棋子($1 \leqslant 5-k \leqslant 4$). 由于 50 是 5 的倍数，而甲、乙两人每个回合取的棋子数是 5 颗，因此，最后必剩下 5 颗棋子让甲先取. 此时不论甲取几颗(大于等于 1，小于等于 4)，乙总可以将它们全取完

综合测试题(一)

1. $-2\,000$ **2.** 0 **3.** -1 **4.** $x>\frac{32}{31}$ **5.** 8 **6.** 7 **7.** $\frac{15}{7}$ **8.** 9 936 **9.** 24 **10.** 4 **11.** B **12.** C **13.** A **14.** C **15.** D **16.** $x=1$ **17.**

当 $m \neq 0$ 且 $m \neq -1$ 时，$x = \frac{m-1}{m}$；当 $m = 0$ 时，原方程无解；当 $m = -1$ 时，原方程的解为一切数　**18.** $x = \frac{3}{2}$　**19.** 当 $a > -2$ 时，$x < a - 2$；当 $a < -2$ 时，$x > a - 2$；当 $a = -2$ 时，原不等式无解　**20.** 无解　**21.** $\frac{y+2\times y-x}{x+2\times y-y} = \frac{\frac{1}{x}+2-\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}+2-\frac{1}{x}} = \frac{3+2}{-3+2} = -5$　**22.** 令 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\cdot q(x) + (ax^2+bx+c)$，则由题意，得　$f(1) = 0$，$f(2) = 2$，$f(3) = 3$，从而 $\begin{cases} f(1) = a+b+c = 0, \\ f(2) = 4a+2b+c = 2, \\ f(3) = 9a+3b+c = 3. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = \frac{7}{2}, \\ c = -3. \end{cases}$ 所以，所求余式为 $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 3$　**23.** 设这两个正整数为 x、y，则　$(x+y)(x-y) = 20$，$20 = 2^2 \times 5$，而 $x+y$ 与 $x-y$ 同奇偶，故它们必同偶，注意到 $x+y > x-y$，从而有 $\begin{cases} x+y = 2\times 5, \\ x-y = 2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$　**24.** 设过 x 小时，水池放空，则 $\frac{x+1}{3} = \frac{x}{2} + \frac{x}{4}$，解得 $x = 0.8$ 小时　**25.** 首位数字为 6 的正整数具有形式　$6\times 10^n + m$　$(0 \leqslant m < 10^n)$，故有 $m = \frac{1}{25}(6\times 10^n + m)$，得 $m = 2^{n-2}\cdot 5^n (n \geqslant 2)$，所以所求的数具有形式为：$6\times 10^n + 2^{n-2}\cdot 5^n = 600\times 10^{n-2} + 25\times 10^{n-2} = 625\times 10^{n-2}$，即为：　625，6 250，62 500，625 000，…

综合测试题(二)

1. $k = -1$　**2.** $\frac{1}{2}$　**3.** -2　**4.** 2　**5.** $\frac{5}{2}$　**6.** 24　**7.** 29　**8.** 73　**9.** 53　**10.** $49\frac{1}{11}$　**11.** 360°　**12.** 225，55　**13.** 14 400　**14.** $m < 2$　**15.** 0　**16.** 由题意 $\begin{cases} 8a - 10b = -16, \\ 8c - 200 = -224, \\ 12a - 13b = -16, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 3, \\ b = 4, \\ c = -3, \end{cases}$ 设把 c 错看成 m，则　$12m - 13\times 20 = -224$，解得 $m = 3$　**17.** 由条件，可得 $x = 3z$，$y = 2z$，代入得 $\frac{2x^2+3y^2+6z^2}{x^2-5y^2+7z^2} = \frac{2\times(3z)^2+3\times(2z)^2+6z^2}{(3z)^2-5\times(2z)^2+7z^2} = -9$　**18.** 因为 $(2x+1)+(x-3) = 3x-2$，从而　$(3x-2)^2 = (2x+1)^2 + (x-3)^2 + 2(2x+1)(x-3)$，　又 $(3x-2)^2 = (2x+1)^2 + (x-3)^2$，所以 $(2x+1)(x$

目　录

代数篇

第一讲　因式分解的方法(一)……（1）
第二讲　因式分解的方法(二)……（9）
第三讲　因式分解的应用……（19）
第四讲　对称式和轮换对称式……（28）
第五讲　分式的运算……（35）
第六讲　部分分式……（44）
第七讲　含有字母系数的方程和分式方程……（52）
第八讲　实数的性质……（62）
第九讲　二次根式的运算……（73）
第十讲　复合二次根式……（86）
第十一讲　代数式的求值……（94）
第十二讲　恒等式的证明……（103）

几何篇

第十三讲　三角形的边和角……（111）
第十四讲　全等三角形……（118）
第十五讲　等腰三角形……（127）
第十六讲　直角三角形……（138）
第十七讲　多边形的角与对角线……（148）
第十八讲　平行四边形……（155）
第十九讲　梯形……（166）
第二十讲　中位线的应用……（176）
第二十一讲　比例线段……（186）

第二十二讲　相似三角形 …… (198)
第二十三讲　平移、对称和旋转 …… (210)

综合篇

第二十四讲　同余 …… (217)
第二十五讲　梅涅劳斯定理与塞瓦定理 …… (225)
第二十六讲　面积方法 …… (235)
第二十七讲　分类与讨论 …… (245)
第二十八讲　逻辑推理 …… (254)
第二十九讲　染色问题 …… (265)
第三十讲　实际问题的数学解法 …… (273)

综合测试题一 …… (287)
综合测试题二 …… (291)

练习题、测试题参考解答 …… (295)

代数篇

第一讲　因式分解的方法(一)

知识要点和基本方法

因式分解的基本方法有提公因式法、运用公式法、分组分解法和十字相乘法.

把一个多项式因式分解,如果多项式的各项有公因式,就先提取公因式,公因式可以是数、单项式,也可以是多项式;如果各项没有公因式,再看能否直接运用公式或用十字相乘法分解,如果还不能分解,就试用分组分解法或其他方法.分解因式时,必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止,结果一定是乘积的形式,每个因式都是整式,相同的因式的积要写成幂的形式.

考虑到与教科书同步,本书中的因式分解(第一讲至第四讲)在有理数范围内进行.凡在实数范围内可再分解的因式,在说明中作了补充.练习题和测试题只要求在有理数范围内求解.

例题精讲

例1　把 $(x-y)^{2n+1}-(x-z)(x-y)^{2n}+2(y-x)^{2n}(y-z)$ 分解因式,其中 n 是正整数.

解　$(x-y)^{2n+1}-(x-z)(x-y)^{2n}+2(y-x)^{2n}(y-z)$

$=(x-y)^{2n}[(x-y)-(x-z)+2(y-z)]$

$=(x-y)^{2n}(y-z)$.

说明　n 是正整数时,$2n$ 是偶数,$(x-y)^{2n}=(y-x)^{2n}$;$2n+1$ 是奇数,$(x-y)^{2n+1}=-(y-x)^{2n+1}$.

例2 把下列各式分解因式：

(1) $(a^2+9b^2-1)^2-36a^2b^2$；

(2) $(ax-by)^3+(by-cz)^3-(ax-cz)^3$.

分析 观察两个多项式的特点，第(1)题容易使人想到用平方差公式分解，第(2)题不妨用立方和 $[a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)]$ 或立方差 $[a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)]$ 公式试一试.

解 (1) $(a^2+9b^2-1)^2-36a^2b^2$

$=(a^2+9b^2-1)^2-(6ab)^2$

$=(a^2+9b^2-1+6ab)(a^2+9b^2-1-6ab)$

$=[(a+3b)^2-1][(a-3b)^2-1]$

$=(a+3b+1)(a+3b-1)(a-3b+1)(a-3b-1)$.

(2) $(ax-by)^3+(by-cz)^3-(ax-cz)^3$

$=[(ax-by)+(by-cz)][(ax-by)^2-(ax-by)(by-cz)+(by-cz)^2]-(ax-cz)^3$

$=(ax-cz)[(ax-by)^2-(ax-by)(by-cz)+(by-cz)^2-(ax-cz)^2]$

$=(ax-cz)[(ax-by)^2-(ax-by)(by-cz)+(by+ax-2cz)(by-ax)]$

$=(ax-cz)(ax-by)(3cz-3by)$

$=3(ax-cz)(ax-by)(cz-by)$.

说明 第(2)题如果先由 $(m+n)^3=m^3+n^3+3mn(m+n)$ 推得 $m^3+n^3=(m+n)^3-3mn(m+n)$，把 $ax-by$ 视为 m，$by-cz$ 视为 n，则 $m+n=ax-cz$，从而能较简捷地将原式分解因式. 另外，由立方和公式可推得 $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$，变形得 $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)$，由这个公式也可将第(2)题分解因式.

例3 把下列各式分解因式：

(1) $x^3+2x^2y+y^3+2xy^2$；

(2) $(x+y-2xy)(x+y-2)+(1-xy)^2$.

分析 (1)、(2)两题的多项式均无公因式可提取，也不能直接用

公式法分解. 第(1)题从四项的特点看出应分组分解，第(2)题宜把 $x+y$、xy 各看成一个整体，去括号后再分组分解.

解 (1) $x^3+2x^2y+y^3+2xy^2$

$=(x^3+y^3)+(2x^2y+2xy^2)$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)+2xy(x+y)$

$=(x+y)(x^2+xy+y^2)$.

(2) $(x+y-2xy)(x+y-2)+(1-xy)^2$

$=(x+y)^2-2xy(x+y)-2(x+y)+4xy+1-2xy+x^2y^2$

$=[(x+y)^2-2(x+y)+1]-2xy(x+y-1)+x^2y^2$

$=(x+y-1)^2-2\cdot(x+y-1)\cdot xy+(xy)^2$

$=(x+y-1-xy)^2$

$=(x-1)^2(y-1)^2$.

说明 将多项式分组的目的在于经过适当的分组后，原多项式能转化为可提公因式，或可运用公式，或可用十字相乘等方法将其分解.

例 4 分解因式：

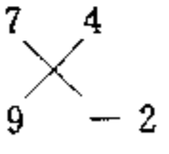
(1) $63x^2+22x-8$;

(2) $x^2+\left(a+\frac{1}{a}\right)xy+y^2$ (其中 a 是非零常数).

分析 第(1)题是二次三项式，且不能用完全平方公式分解，应试一试十字相乘法. 第(2)题中 xy 的系数是 $a+\frac{1}{a}$，而 $a\cdot\frac{1}{a}=1$，所以可将 y^2 化为 $(ay)\cdot\left(\frac{1}{a}y\right)$，再用十字相乘法分解.

解 (1) $63x^2+22x-8$

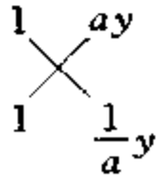
$=(7x+4)(9x-2)$.



(2) $x^2+\left(a+\frac{1}{a}\right)xy+y^2$

$=(x+ay)\left(x+\frac{1}{a}y\right)$

$=\frac{1}{a}(x+ay)(ax+y)$.



例 5 分解因式：

(1) $x^2 + x + 6y^2 + 3y + 5xy$；

(2) $3x^2 - 7xy - 6y^2 + 7x + 12y - 6$.

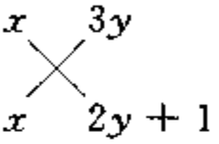
分析 本题两个多项式是二元二次多项式，可看作关于某个字母的二次三项式(另一个字母看作常数)，运用十字相乘法分解；也可把二次项作为一组先分解，再用十字相乘法分解.

解 (1) $x^2 + x + 6y^2 + 3y + 5xy$

$= x^2 + (5y + 1)x + (6y^2 + 3y)$

$= x^2 + (5y + 1)x + 3y(2y + 1)$

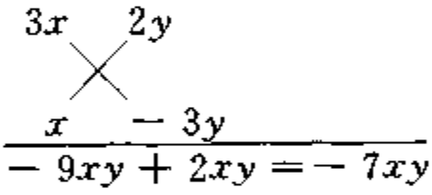
$= (x + 3y)(x + 2y + 1)$.

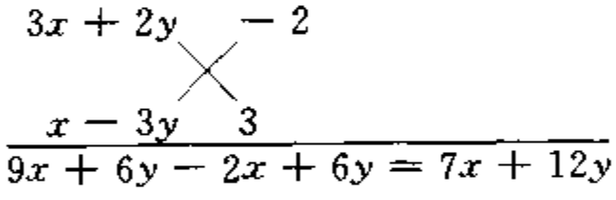


(2) $3x^2 - 7xy - 6y^2 + 7x + 12y - 6$

$= (3x + 2y)(x - 3y) + (7x + 12y) - 6$

$= (3x + 2y - 2)(x - 3y + 3)$.





例 6 已知二次三项式 $x^2 - mx - 8$ (m 是整数)在整数范围内可以分解为两个一次因式的积，求 m 的可能取值.

解 根据条件，如果将 -8 分解为两个整数的积，那么这两个整数的和即为 $-m$.

因为 -8 分解为两个整数积的可能情形有

$(-1) \times 8$，$(-2) \times 4$，$(-4) \times 2$，$(-8) \times 1$.

所以 $-m$ 的可能值为

$(-1) + 8$，$(-2) + 4$，$(-4) + 2$，$(-8) + 1$.

故 m 的可能取值有 -7，-2，2，7 四个.

说明 如果题目的条件不是限定在整数范围内可以分解，那么 m 的取值不能用本题的解法. 如果题目改为 $x^2 - 8x - m$ 在整数范围内可以分解因式，那么只要将 -8 拆成两个整数的和(如 $-50 + 42$，$-9 + 1$)，这两个整数的积就等于 $-m$，因此，符合条件的 m 有无数个.

例 7 在黑板上写有一个缺系数和常数项的多项式：

$$x^3+\square x^2+\square x+\square$$

现有两个人做填数字游戏：第一个人在任一个空位内填上一个非零整数(可正可负)，接着，第二个人在剩下的二个空位置中任选一个填上一个整数，最后，第一个人在余下的空位上填一个整数.

求证：不管第二个人怎样填数，第一个人总能使所得到的多项式可分解为三个一次因式的积，并且每个因式的 x 系数为 1，常数项为整数.

证明 因为第一个人有选择任一个空位的主动权，所以他可以在 x 前的框内填上 -1，这样，原多项式变为

$$x^3+\square x^2-x+\square$$

第二个人不管在哪一个框内填数 a，第一个人只需在最后一个空框内填上第二个人所填数的相反数 $-a$；这样，原多项式就变成了

$$x^3+ax^2-x-a,\text{或}\quad x^3-ax^2-x+a.$$

而 $$\begin{aligned}&x^3+ax^2-x-a\\&=x(x^2-1)+a(x^2-1)\\&=(x+a)(x+1)(x-1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&x^3-ax^2-x+a\\&=x(x^2-1)-a(x^2-1)\\&=(x-a)(x+1)(x-1).\end{aligned}$$

这就表明了第一个人总能使所填数符合要求.

练 习 题

A 组

一、选择题

1. 如果多项式 $x^2+kx+\frac{1}{9}$ 是一个完全平方式，那么 k 的值

是(　　).

(A) -3　　(B) 3

(C) $\frac{1}{3}$或$-\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{2}{3}$或$-\frac{2}{3}$

2. 多项式 $2a(a^2+a+1)+a^4+a^2+1$ 分解因式的结果为(　　).

(A) $(a^2+a-1)^2$　　(B) $(a^2-a+1)^2$

(C) $(a^2+a+1)^2$　　(D) $(a^2-a-1)^2$

3. 已知 x^2+ax-6 可分解为两个一次因式的积，且 $a<0$，则 a 的值为(　　).

(A) -2 和 -3　　(B) -7 和 -4

(C) -1 或 -5　　(D) 任意负有理数

二、把下列各式分解因式

4. $(a+m)^6(n-b)^4-(b-n)^5(a+m)^5$.

5. $x^3(x-2y)+y^3(2x-y)$.

6. $(x+y)(x-y)+4(y-1)$.

7. $x^2y-y^2z+z^2x-x^2z+y^2x+z^2y-2xyz$.

8. $x^2-(m^2+n^2)x+mn(m^2-n^2)$.

三、解答题

9. 求出在 1 到 100 之间的整数 n，使 x^2+x-n 能分解为两个整系数一次因式的乘积.

B　组

四、把下列各式分解因式

10. $(c-a)^2-4(b-c)(a-b)$.

11. $(1+x+x^2+x^3)^2-x^3$.

12. $(c^2+d^2-b^2-a^2)-4(ab-cd)^2$.

13. $x^2-6y^2-12z^2+xy-xz+17yz$.

14. $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2$

五、解答题

15. 已知乘法公式：

$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4),$$

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4).$$

利用上述公式，把 $x^8+x^6+x^4+x^2+1$ 分解因式.

测　试　题

一、选择题

1. 如果 $100x^2-kxy+49y^2$ 是一个完全平方式，那么 k 等于(　　).

(A) 4 900　　(B) 700　　(C) ±140　　(D) ±70

2. 多项式 x^3-8，x^3-7x^2+10x，x^4-16 的公因式是(　　).

(A) $x-8$　　(B) $x-4$　　(C) $x-2$　　(D) $x+2$

3. 在多项式 x^3+x^2-x-1，$x^3-6x^2+11x-6$，x^3-2x^2+3x-2，$x^6-x^4+2x^3-2x^2$ 中，有因式 $x-1$ 的多项式的个数是(　　).

(A) 4 个　　(B) 3 个　　(C) 2 个　　(D) 1 个

4. 已知二次三项式 $21x^2+ax-10$ 可分解为两个整系数的一次因式的积，那么 a 一定是(　　).

(A) 奇数　　(B) 偶数　　(C) 正数　　(D) 负数

二、把下列各式分解因式

5. $x^3+2x^2-16x-32$.

6. $(a-b)a^6+(b-a)b^6$.

7. $x(x+1)(x-1)+xy(x-y)-y(y+1)(y-1)$.

8. $(x+y)(x+y+2xy)+(xy+1)(xy-1)$.

9. $2a^2-5ab-3b^2+a+11b-6$.

三、解答题

10. 已知 $21x^2+ax+21$ 在正整数范围内可以分解为两个一次因式的积，求出满足条件的整数 a.

第二讲　因式分解的方法(二)

知识要点和基本方法

在这一讲里,我们再学习几种因式分解的方法.

一、添项、拆项法

在分解因式时,常要对多项式进行适当的变形,使其能分组分解.添项和拆项是两种重要的变形技巧.所谓添项,就是在要分解的多项式中加上仅仅符号相反的两项的和(实际上是加上0,并不改变原多项式的值),如把 a^4+4 添上 $4a^2+(-4a^2)$,得 $a^4+4=(a^4+4a^2+4)-4a^2=(a^2+2)^2-(2a)^2$,从而可将原多项式分解因式.拆项是把多项式中某一项拆成两项或多项的代数和(相当于整式加法中合并同类项的逆运算),再通过适当分组,达到分解因式的目的.

二、换元法

有些复杂的多项式,如果把其中某些部分看作一个整体,用一个新的字母代替(即换元),不仅可使原式得到简化,而且能使式子的特点更加明显.这样先进行换元,再将含"新字母"的多项式分解因式,最后将"新字母"用原换的式子代回去,得到原多项式的因式分解结果,这种方法就是因式分解中的换元法,或者说是换元法在因式分解中的应用.

三、待定系数法

有的多项式虽不能直接分解因式,但可由式子的最高次数与系数的特点断定其分解结果的因式形式.如只含一个字母的三次多项式分解的结果可能是一个一次二项式乘以一个二次三项式,也可能是三个一次因式的积.于是,我们可以先假设要分解因式的多项式等

于几个因式的积，再根据恒等式的性质列出方程(组)，进而确定其中的系数，得到分解结果，这种方法就称为待定系数法.

用待定系数法分解因式时需利用恒等式的如下重要性质：

如果 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \equiv b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0$，那么 $a_n = b_n$，$a_{n-1} = b_{n-1}$，$\cdots$，$a_1 = b_1$，$a_0 = b_0$. 即恒等式同次项的对应系数一定相等.

这里，“$\equiv$”表示“恒等于”，即对任何 x 值，等式左边的值都等于右边的值.

四、利用因式定理分解

因式定理：如果 $x = a$ 时，多项式 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 的值为 0，那么 $x - a$ 是该多项式的一个因式.

对于系数全部是整数的多项式 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$，如果 $x = \frac{q}{p}$ (p、q 是互质的整数)时，该多项式的值为 0，也就是 $x - \frac{q}{p}$ 是该多项式的一个因式时，一定有 p 是 a_n 的约数，q 是 a_0 的约数.

对于 $a_n = 1$ 的特殊整系数多项式(即系数全部是整数的多项式)，如果 $x - q$ 是它的因式，那么 q 一定是常数项的约数.

有了以上定理，我们可以通过分解整系数多项式的最高次项系数和最低次项系数的因数，组成一些分数，并逐个试验，找出整系数多项式的一个或几个因式，然后再用多项式除以多项式的办法逐步分解.

例题精讲

例 1 把下列各式分解因式：

(1) $x^4 + x^2y^2 + y^4$；

(2) $(1 + y)^2 - 2x^2(1 + y^2) + x^4(1 - y)^2$.

解 (1) $x^4 + x^2y^2 + y^4$

$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2$

$= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2$

$$= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy).$$

(2) $(1 + y)^2 - 2x^2(1 + y^2) + x^4(1 - y)^2$

$= (1 + y)^2 + 2(1 + y) \cdot x^2(1 - y) + x^4(1 - y)^2$

$\quad - 2(1 + y) \cdot x^2(1 - y) - 2x^2(1 + y^2)$

$= [(1 + y) + x^2(1 - y)]^2 - 4x^2$

$= (1 + y + x^2 - x^2y + 2x)(1 + y + x^2 - x^2y - 2x)$

$= [(x + 1)^2 - y(x^2 - 1)][(x - 1)^2 - y(x^2 - 1)]$

$= (x + 1)(x + 1 - xy + y)(x - 1)(x - 1 - xy - y).$

说明 通过拆项、添项配成完全平方式是一个有用的技巧. 第(1)题是将 x^2y^2 拆成 $2x^2y^2 - x^2y^2$, 第(2)题是添加了 $2(1 + y) \cdot x^2(1 - y) - 2(1 + y) \cdot x^2(1 - y)$, 这种拆项、添项依赖于多项式的特点, 因而首先要仔细观察, 分析出多项式与完全平方式的关系.

例 2 把下列各式分解因式:

(1) $x^3 + 9x^2 + 26x + 24$;

(2) $a^3b - ab^3 + a^2 + b^2 + 1$;

(3) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

解 (1) $x^3 + 9x^2 + 26x + 24$

$= (x^3 + 7x^2 + 12x) + (2x^2 + 14x + 24)$

$= x(x^2 + 7x + 12) + 2(x^2 + 7x + 12)$

$= (x + 2)(x^2 + 7x + 12)$

$= (x + 2)(x + 3)(x + 4).$

(2) $a^3b - ab^3 + a^2 + b^2 + 1$

$= a^3b - a^2b^2 + ab + a^2b^2 - ab^3 + b^2 - ab + a^2 + 1$

$= ab(a^2 - ab + 1) + b^2(a^2 - ab + 1) + (a^2 - ab + 1)$

$= (a^2 - ab + 1)(ab + b^2 + 1).$

(3) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc$

$= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c)$

$= (a + b + c)[(a + b)^2 - (a + b)c + c^2 - 3ab]$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$

说明 添项、拆项常要根据原式的特点进行试凑. 第(1)题是按系数比例拆项分组,还可按 $(x^3+2x^2)+(7x^2+14x)+(12x+24)$ 分组,或按 $(x^3+3x^2)+(6x^2+18x)+(8x+24)$ 分组,也可按 $(x^3+4x^2)+(5x^2+20x)+(6x+24)$ 分组. 第(3)题的添项,目的在于配成 $(a+b)^3$. 通过添项或拆项重新分组后,要能利用公式或可提取公因式.

例3 分解因式:

(1) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$;

(2) $(y+1)^4+(y+3)^4-272$.

分析 (1)中两个括号内的二次项和一次项完全相同,如用 $y=x^2+x+1$ 换元,可使原式简明而易于分解. (2)中有两个四次式相加,直接去掉括号,运算繁琐. 为了使去括号后可以消项,常取平均值换元,即设 $u=(y+1+y+3)\div 2=y+2$,从而使 $y+1=u-1$, $y+3=u+1$,代入后即可简化运算.

解 (1) 设 $x^2+x+1=y$,则

$$\begin{aligned}&(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12\\=\ &y(y+1)-12\\=\ &y^2+y-12\\=\ &(y-3)(y+4)\\=\ &(x^2+x-2)(x^2+x+5)\\=\ &(x-1)(x+2)(x^2+x+5).\end{aligned}$$

(2) 设 $y+2=u$,则

$$\begin{aligned}&(y+1)^4+(y+3)^4-272\\=\ &(u-1)^4+(u+1)^4-272\\=\ &(u^2-2u+1)^2+(u^2+2u+1)^2-272\\=\ &[(u^2+1)-2u]^2+[(u^2+1)+2u]^2-272\\=\ &2(u^2+1)^2+8u^2-272\\=\ &2u^4+12u^2-270\\=\ &2(u^2-9)(u^2+15)\\=\ &2(u-3)(u+3)(u^2+15)\end{aligned}$$

$$= 2(y-1)(y+5)(y^2+4y+19).$$

例 4 分解因式：

(1) $(a-b)^4+(a+b)^4+(a^2-b^2)^2$；

(2) $x^4-1\,998x^2+1\,999x-1\,998$.

解 (1) 设 $a-b=x$，$a+b=y$，则

$$\begin{aligned}&(a-b)^4+(a+b)^4+(a^2-b^2)^2\\=&x^4+y^4+x^2y^2\\=&(x^2+y^2)^2-x^2y^2\\=&(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)\\=&(2a^2+2b^2-a^2+b^2)(2a^2+2b^2+a^2-b^2)\\=&(a^2+3b^2)(3a^2+b^2).\end{aligned}$$

(2) 设 $1\,998=n$，则 $1\,999=n+1$，

$$\begin{aligned}&x^4-1\,998x^2+1\,999x-1\,998\\=&x^4-nx^2+(n+1)x-n\\=&(x^4+x)-n(x^2-x+1)\\=&x(x+1)(x^2-x+1)-n(x^2-x+1)\\=&(x^2-x+1)(x^2+x-n)\\=&(x^2-x+1)(x^2+x-1\,998).\end{aligned}$$

说明 换元是为解题搭桥梁，“过河”之后就“拆桥”. 有时可搭多座桥(如第(1)题)；有时可把常数换成字母，把特殊化为一般去考虑(如第(2)题).

例 5 把 $6x^2+xy-2y^2+2x-8y-8$ 分解因式.

分析 要分解的式子是二元二次多项式，且二次项 $6x^2+xy-2y^2=(3x+2y)(2x-y)$，从而可断定原式分解的结果形式为 $(3x+2y+a)(2x-y+b)$，于是可用待定系数法分解.

解 设 原式 $=(3x+2y+a)(2x-y+b)$，将右边展开得

$$\begin{aligned}&6x^2+xy-2y^2+2x-8y-8\\=&6x^2+xy-2y^2+(2a+3b)x+(-a+2b)y+ab.\end{aligned}$$

由恒等式的性质，比较两边的系数，得

$$\begin{cases} 2a + 3b = 2, & ① \\ -a + 2b = -8, & ② \\ ab = -8. & ③ \end{cases}$$

由①、②可解得 $a = 4$，$b = -2$.

将 $a = 4$，$b = -2$ 代入③，③也成立. 所以原式 $= (3x + 2y + 4)(2x - y - 2)$.

说明 在比较两边系数后得到三个方程，但只有两个未知数，此时应选两个简单的方程联立求解，再把求得的值代入第三个方程检验. 如果不能使第三个方程成立，则求得的值应舍去，原式不能分解为所设的形式.

本题在设定分解结果后，还可通过取几组具体的 x、y 值，代入假设式，列出方程组，求得待定系数 a、b.

例 6 已知多项式 $x^3 + bx^2 + cx + d$ 的系数都是整数，$bd + cd$ 是奇数. 证明这个多项式不能分解为两个整系数多项式的乘积.

分析 题目要求证明 $x^3 + bx^2 + cx + d$ 不能分解为两个整系数多项式的乘积，可通过反设它能分解，再推出矛盾，从而说明所设的分解不可能，这种方法叫做反证法.

证明 设 $x^3 + bx^2 + cx + d = (x + p)(x^2 + qx + r)$，$p$、$q$、$r$ 都是整数.

展开等式的右边，得

$$\begin{aligned} & x^3 + bx^2 + cx + d \\ = & x^3 + (p + q)x^2 + (pq + r)x + pr. \end{aligned}$$

比较两边同次项的系数，得

$$pr = d.$$

又 $bd + cd = d(b + c)$ 是奇数，所以 d 和 $b + c$ 都是奇数，从而 pr 也是奇数，即 p 与 r 都是奇数.

在假设的等式中令 $x = 1$，则

$$1 + b + c + d = (1 + p)(1 + q + r).$$

由于 $b + c$、d 都是奇数，故 $1 + b + c + d$ 是奇数.

而由于 p 是奇数，必有 $1+p$ 是偶数.

这样一来，上式左边是奇数，而右边却是偶数，这是不可能的.

所以，x^3+bx^2+cx+d 不能分解为两个整系数多项式的乘积.

例7 分解因式：$x^4+2x^3-9x^2-2x+8$.

分析 本题可以用拆项分组或待定系数法分解，也可利用因式定理分解. 因为首项系数为1，常数项为8，8的约数有±1、±2、±4、±8，所以，如果原多项式有因式 $x-a$，那么 a 的可能取值在这8个数之中. 通过逐个代入检验，即可找出使原多项式值为0的因数.

解 因为8的约数有1、-1、2、-2、4、-4、8、-8. 逐个代入原多项式求值，得 $x=1$、-1、2、-4 时，原多项式的值都为零，这说明 $x-1$、$x+1$、$x-2$、$x+4$ 都是原多项式的因式.

又由于原多项式的次数为4，最高次项的系数为1，所以

$$\text{原式}=(x-1)(x+1)(x-2)(x+4).$$

说明 如果一元多项式中各项的系数和为0，那么 $x-1$ 是这个多项式的因式；如果一元多项式中所有奇次项系数的和等于所有偶次项系数的和，那么 $x+1$ 是这个多项式的因式. 本题可由这个结论求得原式有因式 $(x-1)(x+1)$.

例8 分解因式：$7x^4+20x^3+11x^2+40x-6$.

解 因为原式中最高次项的系数为7，它的约数有±1、±7；常数项为-6，它的约数有±1、±2、±3、±6. 如果 $x-\frac{q}{p}$ 是多项式的因式，那么 $\frac{q}{p}$ 的值只可能为±1、±2、±3、±6、$\pm\frac{1}{7}$、$\pm\frac{2}{7}$、$\pm\frac{3}{7}$、$\pm\frac{6}{7}$.

将上述各可能值代入原多项式的 x，可得 $x=-3$ 和 $x=\frac{1}{7}$ 时，原多项式的值为0. 由因式定理知 $(x+3)\left(x-\frac{1}{7}\right)$ 是原多项式的因式，从而 $(x+3)(7x-1)$ 也是原多项式的因式.

下面用多项式除以多项式的方法求出其余的因式.

因为 $(x+3)(7x-1)=7x^2+20x-3$，由

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2 \\
\hline
7x^2+20x-3 & 7x^4+20x^3+11x^2+40x-6 \\
 & \underline{7x^4+20x^3-3x^2} \\
 & 14x^2+40x-6 \\
 & \underline{14x^2+40x-6} \\
 & 0
\end{array}
$$

所以原式 $=(x+3)(7x-1)(x^2+2)$.

说明 在试验出 $x+3$ 是原多项式的因式时，即可用原多项式除以 $x+3$，得出商式后再分解.

练 习 题

A 组

一、把下列各式分解因式

1. a^4+64b^4.

2. x^3+2x^2-5x-6.

3. x^3+3x^2+3x+2.

4. $(x^2-x-3)(x^2-x-5)-3$.

5. $3x^2+5xy-2y^2+x+9y-4$.

6. $x^3-19x-30$.

二、证明题

7. 求证 $2x+3$ 是多项式 $2x^4-5x^3-10x^2+15x+18$ 的因式.

B 组

三、把下列各式分解因式

8. $(x+y)(x-y)+4(y-1)$.

9. $x^8 + x^7 + 1$.

10. $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) - 120$.

11. $xy(xy+1) + (xy+3) - 2\left(x + y + \frac{1}{2}\right) - (x+y-1)^2$.

四、解答题

12. k 为何值时，多项式 $x^2 - 2xy + ky^2 + 3x - 5y + 2$ 能分解成两个一次因式的积？

13. 已知 $ax^3 + bx^2 - 47x - 15$ 可被 $3x + 1$ 和 $2x - 3$ 整除，求 a、b 的值，并将该多项式分解因式.

14. 求证：$x^2 - xy + y^2 + x + y$ 不能分解成两个一次因式的乘积.

测 试 题

一、把下列各式分解因式

1. $x^2y^2 - 4xy - x^2 - y^2 + 1$.

2. $x^2 - 8ax - 40ab - 25b^2$.

3. $x^4 + x^2 + 2ax - a^2 + 1$.

4. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

5. $x^5 + x + 1$.

二、按指定方法分解因式

6. 用换元法分解 $(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 7x + 6) - 3x^2$.

7. 用换元法分解 $(x^2 + 3x + 2)(4x^2 + 8x + 3) - 90$.

8. 用待定系数法分解 $x^2 - xy - 2y^2 - x + 5y - 2$.

9. 用因式定理分解 $4x^3 - 31x + 15$.

10. 用因式定理分解 $6x^4 + 27x^3 - 13x^2 + 9x - 5$.

三、解答题

11. 已知多项式 $2x^3 - x^2 + m$ 有一个因式是 $2x + 1$，求 m 的值.

12. 求证：$8x^2 - 2xy - 3y^2$ 可以化为两个整系数多项式的平方差.

第三讲　因式分解的应用

知识要点和基本方法

对一个代数式进行各种代数运算，把它变成另一个与它恒等的代数式，这个过程叫做代数恒等变形. 因式分解就是一种重要的代数恒等变形，且技巧多，方法灵活. 通过对多项式因式分解，能从整除性的角度认识多项式的组成，有利于把较为复杂的问题分解成简单的问题而加以解决.

多项式的因式分解不仅在简化数字计算，讨论数、式的性质，进行分式运算和公式变形各方面十分有用，而且是将来学习方程、不等式、三角函数变形的基本方法. 同时，通过因式分解的训练和应用，能促进我们的观察能力、探索能力、运算能力和逻辑思维能力的发展. 所以，有人说因式分解是学好代数的基础之一.

限于目前所学的知识，这一讲只讨论因式分解在数字计算、数式整除、多项式求值等方面的简单应用.

例题精讲

例1　计算：$\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+\underbrace{199\cdots9}_{n个9}$.

解　设 $\underbrace{99\cdots9}_{n个9}=a$，则 $\underbrace{199\cdots9}_{n个9}=\underbrace{100\cdots0}_{n个0}+a=10^n+a$，且 $a+1=10^n$.

$$\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+\underbrace{199\cdots9}_{n个9}$$
$$=a\times a+10^n+a$$

$$= a(a+1) + 10^n$$
$$= a \times 10^n + 10^n$$
$$= 10^n(a+1) = 10^{2n}.$$

说明 本题中设 $\underbrace{99\cdots9}_{n个9} = a$，能使运算过程书写简便. 如果注意到 $\underbrace{199\cdots9}_{n个9} = 2 \times \underbrace{99\cdots9}_{n个9} + 1$，那么原式 $= a^2 + 2a + 1$，就能运用完全平方公式求出结果.

例 2 已知 $2^{48} - 1$ 可以被 60 与 70 之间的两个整数整除，求这两个整数.

解
$$2^{48} - 1 = (2^{24})^2 - 1$$
$$= (2^{24} + 1)(2^{24} - 1)$$
$$= (2^{24} + 1)(2^{12} + 1)(2^{12} - 1)$$
$$= (2^{24} + 1)(2^{12} + 1)(2^6 + 1)(2^6 - 1).$$

易求得 $2^6 + 1 = 65$，$2^6 - 1 = 63$，而 $2^{12} + 1 > 70$，$2^{24} + 1 > 70$. 所以要求的两个整数为 63 和 65.

例 3 已知 $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$，求 $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{1999}$ 的值.

解
$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{1999}$$
$$= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) + (x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9) + \cdots + (x^{1995} + x^{1996} + x^{1997} + x^{1998} + x^{1999})$$
$$= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots + x^{1995})$$
$$= 0.$$

说明 要求值的多项式有 2 000 项，中间带有省略号，分组时要弄清省略号中共有多少项，如何分组，这样最后一组才不会出错.

例 4 如图 3-1，立方体的每一个面上都写有一个自然数，并且相对两个面所写的二数之和都相等. 若 18 的对面写的是质数 a，14 的对面写的是质数 b，35 的对面写的是质数 c. 试求 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ 的值.

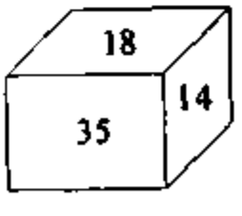


图 3-1

解 由题意可得

$a+18=b+14=c+35$.

所以 $a-b=-4$，$b-c=21$，$c-a=-17$.

因为 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$$=\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)$$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

$$=\frac{1}{2}[(-4)^2+21^2+(-17)^2]$$

$$=373,$$

所以所求式的值为 373.

说明 本题中条件“a、b、c 是质数”，在求解中没有使用. 不过由这一条件及关系式 $18+a=14+b=35+c$，可以断定 c 的奇偶性一定与 a、b 的奇偶性不同，而 $a\neq b$，偶质数又只有 2 一个，故 $c=2$，从而 $a=19$，$b=23$.

例 5 已知 a 是自然数，问 a^4-3a^2+9 是质数还是合数？给出你的证明.

分析 质数只有 1 和它本身两个约数，而合数除了 1 和它本身还有别的约数，要判定 a^4-3a^2+9 是质数还是合数，关键看它能否分解因式，并且有没有除了 1 和它本身以外的约数.

解

$$\begin{aligned}&a^4-3a^2+9\\&=(a^4+6a^2+9)-9a^2\\&=(a^2+3)^2-(3a)^2\\&=(a^2+3a+3)(a^2-3a+3).\end{aligned}$$

当 $a=0$ 时，$a^4-3a^2+9=9$ 是合数.

当 $a=1$ 时，$a^4-3a^2+9=7\times1=7$，是质数.

当 $a=2$ 时，$a^4-3a^2+9=13\times1=13$，也是质数.

当 $a>2$ 时，$a^2+3a+3>1$，$a^2-3a+3=(a-2)(a-1)+1>1$，这说明，此时 a^4-3a^2+9 可以分解为两个大于 1 的自然数的积，即它为合数.

所以，当 $a=1$ 或 2 时，a^4-3a^2+9 是质数；当 $a=0$ 或 $a>2$ 时，a^4-3a^2+9 是合数.

说明 根据国家标准规定，自然数包括 0 和正整数. 本题可先取 $a=0$、1、2、3、…，逐个求出 a^4-3a^2+9 的值，再根据值进行猜测，然后寻求证明方法. 还应注意，在将 a^4-3a^2+9 分解因式后，不能直接断定 a^4-3a^2+9 是合数，而要看各因式的值是否大于 1.

例 6 求证：有无穷多个自然数 a，使得数 $z=n^4+a$ 对于任何非零自然数 n 均为合数.

分析 根据题意，应设法找到无数个自然数 a，使 n^4+a 能分解成两个大于 1 的自然数的积. 不妨取 $a=1$、2、3、4、… 去试，会发现 a 是 4 的倍数时，用拆项、添项配方较为方便. 进一步探索发现 a 为 $4k^4$（k 为大于 1 的自然数）形式的数，能使 z 分解因式.

证明 设 $a=4k^4$（k 为大于 1 的自然数），则

$$\begin{aligned} z &= n^4+4k^4 \\ &= n^4+4k^2n^2+4k^4-4k^2n^2 \\ &= (n^2+2k^2)^2-(2kn)^2 \\ &= (n^2+2k^2+2kn)(n^2+2k^2-2kn). \end{aligned}$$

因为 $k>1$，$n^2+2k^2+2kn=(n+k)^2+k^2>1$，

$$n^2+2k^2-2kn=(n-k)^2+k^2>1.$$

所以 z 能分解为两个大于 1 的自然数之积. 又 k 是任意大于 1 的自然数，有无穷多个值，这就说明，可以找到无穷多个自然数 a，使 z 对任意非零自然数 n 均为合数.

说明 由于 0 是自然数，故找到的 $a=4k^4$ 中 k 必须大于 1，否则当 $n=1$，$k=1$ 时，$z=5$ 就不是合数.

例 7 已知 $x^5-5qx+4r$ 能被 $(x-c)^2$ 整除. 证明：$r^4=q^5$.

证明 由已知可设

$$x^5-5qx+4r=(x^2-2cx+c^2)\left(x^3+ax^2+bx+\frac{4r}{c^2}\right).$$

将等式右边乘开，并合并同类项得

$$x^5-5qx+4r=x^5+(a-2c)x^4+(c^2+b-2ac)x^3+$$

$$\left(ac^2-2bc+\frac{4r}{c^2}\right)x^2+\left(c^2b-\frac{8r}{c}\right)x+4r,$$

比较两边对应项的系数，得

$$a - 2c = 0, \tag{1}$$

$$c^2 + b - 2ac = 0, \tag{2}$$

$$ac^2 - 2bc + \frac{4r}{c^2} = 0, \tag{3}$$

$$c^2b - \frac{8r}{c} = -5q. \tag{4}$$

由①、②得　$b = 3c^2$，$a = 2c$.

代入③、④分别得　$r = c^5$，$q = c^4$.

所以 $r^4 = c^{20} = q^5$.

说明　本题用的是待定系数法，在列假设等式时应尽量减少待定系数的个数. 得到①、②、③、④四个等式后，目标是找 r、q 的关系，而这四个等式中有 5 个字母，故应不断消元.

例 8　设 a、b、c、d 满足 $a \leqslant b$，$c \leqslant d$，$a + b = c + d \neq 0$，$a^3 + b^3 = c^3 + d^3$，求证：$a = c$，$b = d$.

证明　由 $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$ 得

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = (c + d)(c^2 - cd + d^2).$$

由于　$a + b = c + d \neq 0$，

故　$a^2 - ab + b^2 = c^2 - cd + d^2$.

即　$(a + b)^2 - 3ab = (c + d)^2 - 3cd$，

从而　$ab = cd$.

于是　$(a^2 - ab + b^2) - ab = (c^2 - cd + d^2) - cd$，

即　$(a - b)^2 = (c - d)^2$，

而　$a \leqslant b$，$c \leqslant d$，

所以　$b - a = d - c$.

将此式与已知的 $a + b = c + d$ 两边相加，得

$2b = 2d$，即 $b = d$.

代入 $a+b=c+d$，即有 $a=c$.

练 习 题

A 组

一、选择题

1. 计算 $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{20^2}\right)$ 的结果是(　　).

(A) $\frac{19}{40}$　　(B) $\frac{21}{40}$　　(C) $\frac{9}{20}$　　(D) $\frac{11}{20}$

2. 当 $x-y=1$ 时，$x^4-xy^3-x^3y-3x^2y+3xy^2+y^4$ 的值是(　　).

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

3. 若 $x-y=m$，$y-z=n$，则 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ 的值为(　　).

(A) m^2+n^2+mn　　(B) m^2n+n^3

(C) m^2n+mn^2　　(D) m^2n-mn^2

4. 若 n 是奇数，则 $\frac{1}{4}(n^2-1)$(　　).

(A) 一定是奇数

(B) 一定是偶数

(C) 可能是奇数，也可能是偶数

(D) 可能是整数，也可能是分数

5. n 是某一自然数，代入代数式 n^3-n 中计算其值时，4 个同学算出的结果分别如下，其中正确的结果只能是(　　).

(A) 388 944　　(B) 388 945

(C) 388 954　　(D) 388 948

二、填空题

6. 计算 $1.234\,5^2+0.765\,5^2+2.469\times0.765\,5=$ _____.

7. 计算 $1\,990^2 - 1\,989^2 + 1\,988^2 - 1\,987^2 + \cdots + 2^2 - 1^2 =$ _____.

8. 若 $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 0$，则 $x^6 =$ _____.

三、解答题

9. 已知 $a = 1\,990x + 1\,989$，$b = 1\,990x + 1\,990$，$c = 1\,990x + 1\,991$，求 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ 的值.

10. 问 $\underbrace{1000\cdots01}_{1997个0}$ 是质数还是合数，说明理由.

11. 设 a、b、c、d 都是整数，且 $m = a^2 + b^2$，$n = c^2 + d^2$，将 mn 表示成两个整数的平方和.

12. 已知 a、b、c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 = 9$，求 $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ 的最大值.

四、证明题

13. 求证：$81^7 - 27^9 - 9^{13}$ 能被 45 整除.

14. 求证：当 n 是自然数时，$2(2n + 1)$ 形式的数不能表示为两个整数的平方差.

15. 已知 $a + b + c = 0$，求证 $a^3 + a^2c + b^2c - abc + b^3 = 0$.

B 组

五、证明题

16. 求证：对任何非零自然数，$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ 都是 10 的倍数.

17. 若 $a = 1\,995^2 + 1\,995^2 \cdot 1\,996^2 + 1\,996^2$，求证：$a$ 是一个完全平方数.

18. 证明：$4^{545} + 545^4$ 是合数.

测　试　题

一、选择题

1. $\dfrac{1\,000^2}{252^2-248^2}$ 等于(　　).

(A) 62 500　　(B) 1 000　　(C) 500　　(D) 250

2. 若 $P=\dfrac{1\,994}{1\,995}-\dfrac{1\,993}{1\,994}$, $Q=\dfrac{1\,993}{1\,994}-\dfrac{1\,992}{1\,993}$, $R=\dfrac{1}{1\,994}-\dfrac{1}{1\,995}$, 那么 P、Q、R 的大小关系为(　　).

(A) $P>Q>R$　　(B) $P<Q<R$

(C) $P<Q=R$　　(D) $P=R<Q$

3. 若 x 是非零自然数, $y=x^4+2x^3+2x^2+2x+1$, 则(　　).

(A) y 一定是完全平方数

(B) 存在有限个 x, 使 y 是完全平方数

(C) y 一定不是完全平方数

(D) 存在无限个 x, 使 y 是完全平方数

4. 已知 $x=1\underbrace{00\cdots00}_{n个0}1\underbrace{00\cdots00}_{n+1个0}50$, 则(　　).

(A) x 是完全平方数　　(B) $x-25$ 是完全平方数

(C) $x-50$ 是完全平方数　　(D) $x+50$ 是完全平方数

5. 若正数 a、b、c 满足等式 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$, 那么(　　).

(A) $a=b=c$　　(B) $a=b\neq c$

(C) $b=c\neq a$　　(D) a、b、c 互不相等

二、填空题

6. 已知 $a-b=3$, $a-c=5$, 则 $(c-b)[(a-b)^2+(a-c)(a-b)+(a-c)^2]=$ _____.

7. 若 $a^2 - 3a + 1 = 0$，则 $2a^5 - 5a^4 + 2a^3 - 8a^2 + 3a =$ _____.

8. 已知 a、b、c、d 为非负整数，且 $ac + bd + ad + bc = 1997$，则 $a + b + c + d =$ _____.

三、解答题

9. 已知 $7^{24} - 1$ 可被 40 至 50 之间的两个整数整除，求这两个数.

10. 一个自然数减去 45 后是一个完全平方数；这个自然数加上 44，仍是一个完全平方数，试求这个自然数.

四、证明题

11. 求证四个连续自然数的积与 1 之和必定是一个完全平方数.

12. 若 a 是大于 0 的自然数，求证 $a^{1985} - a^{1949}$ 是 10 的倍数.

13. 求证：如果一个数可以表示成两个整数的平方和，那么这个数的 2 倍也可以表示成两个整数的平方和.

第四讲　对称式和轮换对称式

知识要点和基本方法

一、对称多项式

对于一个含有多个字母的多项式，如果将多项式中所含的任意两个字母互换，所得到的新多项式仍然与原多项式相等，那么这个多项式叫做关于这些字母的对称多项式.

例如，$x+y+z$，无论是 x 与 y 互换，或 y 与 z 互换，还是 x 与 z 互换，所得到的多项式仍为 $x+y+z$，所以 $x+y+z$ 是对称多项式.

再如 $(x+y)^6+x^3y^3$，互换 x 与 y，而多项式不变，故它也是对称多项式.

$x+y+z$，$xy+yz+xz$，xyz 称为三元初等对称多项式.

不难证明，两个对称多项式的和、差、积仍是对称多项式.

例如，$x^3+y^3+z^2$ 是对称多项式，$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)$ 也是对称多项式，可以证明它们的和、差、积都是对称多项式.

二、轮换对称多项式

一个含有多个字母的多项式，把其中所含的字母按某种顺序(一般按字母表的先后顺序)排列后，把第一个字母换成第二个字母，第二个字母换成第三个字母，依此类推，并把最后一个字母换成第一个字母，如果所得到的多项式与原多项式相等，则称原多项式是关于这些字母的轮换对称多项式.

例如，$ab^2+bc^2+ca^2$，按 a、b、c 顺序依次轮换，变成 bc^2+ca^2

$+ ab^2$，仍与原多项式相等，所以 $ab^2 + bc^2 + ca^2$ 是关于 a、b、c 的轮换对称多项式.

容易看出，对称多项式一定是轮换对称多项式. 但轮换对称多项式不一定是对称多项式. 如 $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$ 是轮换对称多项式，但不是对称多项式，不过，只含有两个字母的轮换对称多项式都是对称多项式.

两个轮换对称多项式的和、差、积仍是轮换对称多项式.

由于对称多项式和轮换对称多项式的特殊性，它们的因式分解也有其特殊方法. 因为如果一个对称(或轮换对称)多项式有一个次数较低的因式，那么与这个因式同类型的式子也是原多项式的因式，这样就可以借助因式定理和待定系数法进行因式分解.

例题精讲

例 1 已知 $\alpha = x_1 + x_2 + x_3$，$\beta = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$，$\gamma = x_1x_2x_3$. 用 α、β、γ 表示出对称多项式 $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$.

解 $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$

$= x_1(x_1x_2 + x_1x_3) + x_2(x_1x_2 + x_2x_3) + x_3(x_1x_3 + x_2x_3)$

$= x_1(\beta - x_2x_3) + x_2(\beta - x_1x_3) + x_3(\beta - x_1x_2)$

$= x_1\beta + x_2\beta + x_3\beta - 3x_1x_2x_3$

$= (x_1 + x_2 + x_3)\beta - 3\gamma$

$= \alpha\beta - 3\gamma$.

说明 任一个三元(字母为 x_1、x_2、x_3)对称多项式都能用三元初等对称多项式 α、β、γ 表示出来. 在求表达式时，要对原式进行“凑”配.

例 2 把 $x^4 + (x+y)^4 + y^4$ 分解因式.

分析 这是一个二元对称多项式，分解因式时，一般先将该式用 $x + y$、xy 表示出来，再进行分解.

解 $x^4 + (x+y)^4 + y^4$

$= (x^4 + y^4) + (x+y)^4$

$$= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + (x + y)^4$$
$$= [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 + (x + y)^4$$
$$= 2(x + y)^4 - 4xy(x + y)^2 + 2x^2y^2$$
$$= 2[(x + y)^2 - xy]^2$$
$$= 2(x^2 + xy + y^2)^2.$$

例 3 分解因式 $(a + b + c)^5 - a^5 - b^5 - c^5$.

分析 这是一个五次对称多项式，只要找到它的一个因式，就能找出它同类型的另两个因式. 如果在多项式中令 $a = -b$，则原式 $= c^5 - c^5 = 0$，根据因式定理，则 $a + b$ 是原式的一个因式. 于是 $(b + c)$、$(c + a)$ 也是它的因式.

解 因为当 $a = -b$ 时，$(a + b + c)^5 - a^5 - b^5 - c^5 = 0$，所以原式有因式 $(a + b)(b + c)(c + a)$.

由于原式是 5 次对称多项式，根据其特点，可设

$$(a + b + c)^5 - a^5 - b^5 - c^5$$
$$= (a + b)(b + c)(c + a)[k(a^2 + b^2 + c^2) + m(ab + bc + ca)]. \quad ①$$

其中 k、m 是有待确定的系数.

令 $a = 1$，$b = 1$，$c = 0$，代入①式得

$$30 = 2(2k + m)，即\ 2k + m = 15.$$

又令 $a = 0$，$b = 1$，$c = 2$，代入①得

$$210 = 6(5k + 2m)，即\ 5k + 2m = 35.$$

由此解得 $k = 5$，$m = 5$. 所以

$$(a + b + c)^5 - a^5 - b^5 - c^5$$
$$= 5(a + b)(b + c)(c + a)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca).$$

例 4 化简 $(x + y + z)^3 - (y + z - x)^3 - (z + x - y)^3 - (x + y - z)^3$.

分析 这个多项式是对称多项式，化简后的结果仍是对称式.

解 当 $x = 0$ 时，

$$(x + y + z)^3 - (y + z - x)^3 - (z + x - y)^3 - (x + y - z)^3$$
$$= (y + z)^3 - (y + z)^3 - (z - y)^3 - (y - z)^3 = 0.$$

由因式定理，原多项式有因式 $x-0$，即有因式 x.

同样可知原多项式有因式 y 和 z.

又因为原式是 3 次对称式，化简后的结果不能超过 3 次，所以可设

$$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3 = kxyz. \quad ①$$

其中 k 是待定系数.

令 $x=1$，$y=1$，$z=-1$，代入①式可得

$$k=24.$$

故原式化简结果为 $24xyz$.

例 5 分解因式：$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

分析 容易验证，原多项式是一个轮换对称多项式. 当 $a=b$ 时，$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=b^2(b-c)+b^2(c-b)+c^2(b-b)=0$，所以 $a-b$ 是原多项式的因式. 由轮换对称式的特点，$b-c$ 和 $c-a$ 也是原多项式的因式，这样找到了原式的三个因式，再用待定系数法就可以将原式分解因式了.

解 因为当 $a=b$ 时，$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0$，所以原式含有因式 $a-b$.

由轮换对称式的特点，原式还含有因式 $b-c$、$c-a$.

由于原式是三次轮换对称多项式，故可设

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) = k(a-b)(b-c)(c-a). \quad ①$$

其中 k 是待定系数.

令 $a=1$，$b=0$，$c=-1$，代入①式得

$$k=-1.$$

所以 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a)$.

例 6 已知 $a+b>c$，$b+c>a$，$a+c>b$，求证：$a^3+b^3+c^3-a(b-c)^2-b(c-a)^2-c(a-b)^2-4abc<0$.

分析 要证多项式的值小于 0，宜将它分解因式. 只要判定了各

因式的符号，就能对原多项式的符号作出判定.

证明 设 $M=a^3+b^3+c^3-a(b-c)^2-b(c-a)^2-c(a-b)^2-4abc$.

把该多项式看作关于 a 的三次多项式，将 $b+c$ 代替 a，即令 $a=b+c$，则

$$\begin{aligned}M&=(b+c)^3+b^3+c^3-(b+c)(b-c)^2-b^3-c^3\\&\quad-4(b+c)bc\\&=2(b^3+c^3)+3b^2c+3bc^2-2(b^3+c^3)+b^2c+bc^2\\&\quad-4b^2c-4bc^2\\&=0,\end{aligned}$$

所以 $a-(b+c)$ 是 M 的一个因式.

又容易验证 M 是一个轮换对称式，于是 $b-(c+a)$、$c-(a+b)$ 都是它的因式.

因为 M 是关于 a、b、c 的三次式，所以可设 $M=k(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b)$.

比较两边 a^3 的系数，可得 $k=1$. 故

$$M=(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b).$$

又 $$a+b>c,\ b+c>a,\ a+c>b.$$

则 $$a-b-c<0,\ b-c-a<0,\ c-a-b<0.$$

所以 $M<0$. 即原不等式成立.

练 习 题

A 组

一、把下列各式分解因式

1. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$.

2. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$.

3. $(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc$.

二、解答题

4. 已知 $a=x+y$，$b=x^3+y^3$，且 $a\neq 0$，用 a、b 表示 x^2+y^2.

B 组

三、把下列各式分解因式

5. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$.

6. $(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$.

7. $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$.

8. $8(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3$.

测 试 题

一、选择题

1. 在下列四个式子中，是轮换多项式的有(　　).

① $3x+2y+z$　　② $x^2+y^3+z^4+x^4y^3z^2$

③ $xy^2+y^2z^3+z^3x$　　④ $x^3+y^3+z^3-x^2-y^2-z^2$

(A) 0 个　　(B) 1 个　　(C) 2 个　　(D) 3 个

2. 若 $x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+3xyz=k(x+y+z)(xy+yz+zx)$，则 k 的值是(　　).

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) 1　　(C) 3　　(D) -1

3. 设 $\alpha=x_1+x_2+x_3$，$\beta=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3$，$\gamma=x_1x_2x_3$，用 α、β、γ 表示出 $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ 的结果是(　　).

(A) $\alpha^3-3\alpha\beta+3\gamma$　　(B) $\beta^3-3\alpha\gamma+3\gamma$

(C) $\alpha^3+3\alpha\beta-3\gamma$　　(D) $\beta^3-3\alpha\beta+3\gamma$

二、把下列各式分解因式

4. $xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+xz(z^2-x^2)$.

5. $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)-(x^3+y^3+z^3)-2xyz$.

三、解答题

6. 化简：$a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

7. 已知 $a+b+c+d=0$，$a^3+b^3+c^3+d^3=3$. 求 $abc+bcd+cda+dab$ 的值.

第五讲　分式的运算

知识要点和基本方法

分式是两个整式相除的商，其中分母是除式，它一定含有字母，分子是被除式，不一定含有字母. 当分子为零且分母不为零时，分式的值等于零，而当分母为零时，分式没有意义.

分式的基本性质是确定分式符号、通分和约分的基础. 在 $\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M}$，$\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$ 中，M 一定是不为零的整式.

分式的运算是重要的代数式恒等变形. 其主要运算法则有

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c};$$

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\ \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad (n\text{ 是正整数}).$$

进行异分母分式加减运算的基本方法是转化为同分母分式加减运算，转化的关键是通分. 但有时并不必将所有分式全部通分，而是利用一些技巧简化运算，如用逐步通分法、拆项分项法、分组通分法、换元法等.

分式的概念、运算与分数的概念、运算有许多相似之处，因而在解决分式的问题时要重视联系分数的相关问题进行类比思考.

例题精讲

例1 计算 $\frac{2a-b-c}{a^2-ab-ac+bc}+\frac{2b-c-a}{b^2-bc-ab+ac}+\frac{2c-a-b}{c^2-ac-bc+ab}$.

解
$$\begin{aligned}&\frac{2a-b-c}{a^2-ab-ac+bc}+\frac{2b-c-a}{b^2-bc-ab+ac}\\&+\frac{2c-a-b}{c^2-ac-bc+ab}\\=&\frac{(a-b)+(a-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b-c)+(b-a)}{(b-c)(b-a)}\\&+\frac{(c-a)+(c-b)}{(c-a)(c-b)}\\=&\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-b}+\frac{1}{c-a}\\=&0.\end{aligned}$$

说明 本题如直接通分化为同分母相加，运算较繁，而通过将分子拆项，分母分解因式后，利用 $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 解法简洁.

例2 化简 $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}+\frac{2}{b-a}-\frac{2}{c-a}$.

分析 观察得出 $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}$，$\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}=\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b-a}$，$\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c-b}$. 这样拆项相加，易求出结果.

解
$$\begin{aligned}&\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}\\&+\frac{2}{b-a}-\frac{2}{c-a}\\=&\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b-a}+\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c-b}\end{aligned}$$

$$+\frac{2}{b-a}-\frac{2}{c-a}$$

$$=\frac{2}{b-c}.$$

例 3 化简 $\dfrac{(y-z)^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{(z-x)^2}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{(x-y)^2}{(z-x)(z-y)}$.

解 设 $x-y=a$，$y-z=b$，$z-x=c$，则 $a+b+c=0$.

$$\frac{(y-z)^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{(z-x)^2}{(y-x)(y-z)}+\frac{(x-y)^2}{(z-x)(z-y)}$$

$$=\frac{b^2}{-ac}+\frac{c^2}{-ab}+\frac{a^2}{-bc}$$

$$=\frac{a^3+b^3+c^3}{-abc}$$

$$=-\frac{[(a+b)^3-3ab(a+b)]+c^3}{abc}$$

$$=-\frac{-c^3+3abc+c^3}{abc}$$

$$=-3.$$

例 4 计算 $\dfrac{3x^2+9x+7}{x+1}-\dfrac{2x^2+4x-3}{x-1}-\dfrac{x^3+x+1}{x^2-1}$.

分析 题中三个分式的分子的次数比分母次数高，利用多项式除法可将每个分式拆成一个整式加一个较简单分式的形式，从而简化运算.

解 $\dfrac{3x^2+9x+7}{x+1}-\dfrac{2x^2+4x-3}{x-1}-\dfrac{x^3+x+1}{x^2-1}$

$$=(3x+6)+\frac{1}{x+1}-(2x+6)-\frac{3}{x-1}-x-\frac{2x+1}{x^2-1}$$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x-1}-\frac{2x+1}{x^2-1}$$

$$=\frac{-2x-4}{x^2-1}-\frac{2x+1}{x^2-1}$$

$$=-\frac{4x+5}{x^2-1}.$$

例 5 化简 $\dfrac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$.

分析 这是一个繁分式(即分式的分子或分母中含有分式),可以利用分式的基本性质将分子、分母同乘以 abc,把分子、分母括号内的分式化为整式,再分解因式、约分化简.

解
$$\begin{aligned}
&\frac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}\\
&=\frac{a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)}{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}\\
&=\frac{a^3(c-b)+b^3(a-b+b-c)+c^3(b-a)}{a^2(c-b)+b^2(a-b+b-c)+c^2(b-a)}\\
&=\frac{(a^3-b^3)(c-b)+(b^3-c^3)(a-b)}{(a^2-b^2)(c-b)+(b^2-c^2)(a-b)}\\
&=\frac{(a-b)(c-b)(a^2+ab+b^2-b^2-bc-c^2)}{(a-b)(c-b)(a+b-b-c)}\\
&=\frac{a^2+ab-bc-c^2}{a-c}\\
&=\frac{(a-c)(a+c+b)}{a-c}\\
&=a+b+c.
\end{aligned}$$

例 6 (1) 已知 $2x>y>0$, $A=\dfrac{x}{y}$, $B=\dfrac{x+1}{y+2}$, 试比较 A 与 B 的大小.

(2) 比较两数 $\dfrac{5\,678\,901\,234}{6\,789\,012\,345}$ 与 $\dfrac{5\,678\,901\,235}{6\,789\,012\,347}$ 的大小.

解 (1) 考察 $A-B$ 的符号.

$$\begin{aligned}
A-B&=\frac{x}{y}-\frac{x+1}{y+2}\\
&=\frac{x(y+2)-y(x+1)}{y(y+2)}=\frac{2x-y}{y(y+2)}.
\end{aligned}$$

因为 $2x>y>0$,所以 $2x-y>0$, $y(y+2)>0$. 于是 $A-B>0$,即 $A>B$.

(2) 设 $\frac{x}{y}=\frac{5\,678\,901\,234}{6\,789\,012\,345}$，则

$$\frac{5\,678\,901\,235}{6\,789\,012\,347}=\frac{x+1}{y+2}.$$

由(1)知 $\frac{x}{y}>\frac{x+1}{y+2}$，所以

$$\frac{5\,678\,901\,234}{6\,789\,012\,345}>\frac{5\,678\,901\,235}{6\,789\,012\,347}.$$

说明 比较两个分式的大小可用求差法或求商法：求差法的道理是“若 $A-B>0$，则 $A>B$”，所以先考察 $A-B$ 的符号．求商法的道理是“$A>0$，$B>0$ 时，若 $\frac{A}{B}>1$，则 $A>B$；若 $\frac{A}{B}<1$，则 $A<B$”，所以先判断 A、B 的符号，再考察商的值是大于 1，小于 1，还是等于 1．

例 7 求证：对任何自然数 n，分数 $\frac{21n+4}{14n+3}$ 不可约分．

分析 如果一个假分数可以约分，那么它化成带分数之后，它的真分数部分必定可以约分．反过来，如果一个真分数可以约分，那么它加上一个整数，化为假分数后，这个假分数也一定可以约分．

证明 因为 $\frac{21n+4}{14n+3}=1+\frac{7n+1}{14n+3}$，而 $\frac{14n+3}{7n+1}=2+\frac{1}{7n+1}$．

由于 $\frac{1}{7n+1}$ 不可约分，故 $\frac{14n+3}{7n+1}$ 不可约分．于是 $\frac{7n+1}{14n+3}$ 不可约分．从而 $\frac{2m+4}{14n+3}$ 不可约分．

例 8 求使 n^3+100 能被 $n+10$ 整除的正整数 n 的最大值．

解 因为

$$\begin{aligned}&\frac{n^3+100}{n+10}\\&=\frac{n^3+1\,000-900}{n+10}\\&=\frac{(n+10)(n^2-10n+100)-900}{n+10}.\end{aligned}$$

$$= n^2 - 10n + 100 - \frac{900}{n+10},$$

所以 $n+10$ 整除 n^3+100 必须且只需 $n+10$ 整除 900，又要 n 取最大值，故 $n+10=900$，从而符合要求的正整数 n 的最大值是 890.

练　习　题

A　组

一、选择题

1. 使分式 $\frac{3x-y}{x+2y}$ 的值等于零的全部条件是(　　).

(A) $x+2y=0$ 且 $3x-y=0$

(B) $3x=y$ 且 $x\neq 2y$

(C) $x=3y$ 且 $x\neq -2y$

(D) $x=\frac{1}{3}y$ 且 $x\neq 0$

2. 使分式 $\frac{x-a}{\frac{1}{x}-a}$ $(a\neq 0)$ 有意义的 x 应满足的条件是(　　).

(A) $x\neq 0$　　(B) $x\neq 0$ 且 $x\neq \frac{1}{a}$

(C) $x\neq \frac{1}{a}$　　(D) $x\neq 0$ 或 $x\neq \frac{1}{a}$

3. 化简 $\frac{a^4-a^2b^2}{(a-b)^2}\div\frac{a(a+b)}{b^2}\times\frac{b^2}{a}$ 的结果为(　　).

(A) $\frac{a^2}{a-b}$　　(B) $\frac{a^2}{a+b}$

(C) $\frac{b^4}{a-b}$　　(D) $\frac{b^4}{a+b}$

4. 如果 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$，那么 $\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2$ 等于(　　).

(A) 1　　(B) 3　　(C) 5　　(D) 7

二、计算下列各题

5. $\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+7x^2+7x-15}$.

6. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+1}-\dfrac{4}{x^4+1}-\dfrac{8}{x^8+1}$.

7. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}+\cdots+\dfrac{1}{(x-99)(x-100)}$.

8. $\dfrac{(1+ax)^2-(a+x)^2}{(1+bx)^2-(b+x)^2}\div\dfrac{(1+ay)^2-(a+y)^2}{(1+by)^2-(b+y)^2}$.

三、解答题

9. 已知 $A=\dfrac{7\,890\,123\,456}{8\,901\,234\,567}$，$B=\dfrac{7\,890\,123\,455}{8\,901\,234\,566}$. 试比较 A、B 的大小.

B 组

四、计算下列各题

10. $\left(\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+4}{x+5}-\dfrac{x+3}{x+4}\right)\div\dfrac{x^2+7x+13}{x^2+8x+15}$.

11. $\dfrac{x-c}{(x-a)(x-b)}+\dfrac{b-c}{(a-b)(x-b)}+\dfrac{b-c}{(b-a)(x-a)}$.

12. $\dfrac{x}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}+\dfrac{y}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}+\dfrac{1}{x^2-y^2}-\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{x^2+3y^2}{x^4-y^4}$.

五、解答题

13. 已知 $x(x\neq 0,\pm 1)$ 和 1 两个数，如果只许用加法、减法和 1 作被除数的除法，用这三种运算(可以用括号)，经过六步算出 x^2，试写出计算 x^2 的表达式.

测　试　题

一、选择题

1. 如果 $x=\frac{a}{b}\neq -1, b\neq 0$，那么 $\frac{a-b}{a+b}$ 等于(　　).

(A) $1-\frac{1}{x}$　　(B) $\frac{x-1}{x+1}$

(C) $x-\frac{1}{x}$　　(D) $x-\frac{1}{x+1}$

2. 已知 $y_1=2x$，$y_2=\frac{2}{y_1}$，$y_3=\frac{2}{y_2}$，…，$y_{1\,999}=\frac{2}{y_{1\,998}}$，$y_{2\,000}=\frac{2}{y_{1\,999}}$，则 $y_1\cdot y_{2\,000}$ 的值是(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) $2^{1\,999}$　　(D) $2^{2\,000}$

3. 假定 x 和 y 都是正数，并且成反比例，如果 x 增加了 $p\%$，那么 y 减少了(　　).

(A) $p\%$　　(B) $\frac{p}{100+p}\%$

(C) $\frac{100p}{100+p}\%$　　(D) $\frac{p}{1+p}\%$

4. 已知 $x+\frac{1}{x}=3$，那么 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值是(　　).

(A) 10　　(B) 8　　(C) $\frac{1}{10}$　　(D) $\frac{1}{8}$

5. 如果 $ab=1$，$M=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$，$N=\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$，则 M、N 的大小关系为(　　).

(A) $M>N$　　(B) $M=N$

(C) $M<N$　　(D) 不能确定

二、计算题

6. $(x^3-1)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{1-x^3}\right)$.

7. $\dfrac{22\,223^3+11\,112^3}{22\,223^3+11\,111^3}$.

8. $\dfrac{2}{(x+1)(x+3)}+\dfrac{2}{(x+3)(x+5)}+\cdots+\dfrac{2}{(x+1\,997)(x+1\,999)}$.

9. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2-a}+\dfrac{1}{a^2-3a+2}+\dfrac{1}{a^2+6-5a}$.

10. $\left(\dfrac{x^2-4x-4}{x+1}-\dfrac{x^2+8x+13}{x+2}\right)\div(11x^2+33x+21)$.

三、解答题

11. 已知使分式 $\dfrac{ax+7}{bx+11}$ 有意义的一切 x 的值，都使这个分式的值为一个定值，求 a、b 应满足的条件.

12. 把 $\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}$ 写成两个因式的积，使这两个因式的和为 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$，求出这两个因式.

13. 已知 $a_1=x$，$a_{n+1}=1-\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$.

(1) 求 a_2，a_3，a_4，a_5；

(2) 求 $a_{2\,000}$.

第六讲　部分分式

知识要点和基本方法

对于一个分子、分母都是多项式的分式，当分母的次数高于分子的次数时，我们把这个分式叫做真分式. 如 $\frac{2x^2}{6x^3+9x-7}$ 就是一个真分式. 如果一个分式不是真分式，那么它可以用带余除法化为一个多项式与一个真分式的和.

有时候，需要把一个真分式化成几个更简单的真分式的代数和，如 $\frac{2x}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}$，像这种恒等变形，称为将分式化为部分分式.

将一个真分式化为部分分式时，一般先将分式的分母分解因式，再根据分母的因式次数假设分解后的部分分式，最后用待定系数法求解.

如果分式的分母中含有因式 $(x-a)^n$，那么应设相应的部分分式为

$$\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{B}{(x-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{M}{x-a},$$

其中 A，B，…，M 是待定的常数.

如果分式的分母中含有二次式 $(x^2+px+q)^2$，相应地要设部分分式为

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}+\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^2},$$

其中 A、B、C、D 是待定的常数.

如果 Q、R、S 是一次式或二次质因式，P 是次数低于 QRS^3 次数的多项式，将 $\frac{P}{QRS^3}$ 化为部分分式时，应设

$$\frac{P}{QRS^3}=\frac{A_1}{Q}+\frac{A_2}{R}+\frac{B_1}{S}+\frac{B_2}{S^2}+\frac{B_3}{S^3},$$

这里 A_1、A_2 分别比 Q、R 的次数低一次，B_1、B_2、B_3 的次数都比 S 的次数低一次.

例题精讲

例 1 把 $\frac{13x+14}{2x^3-13x^2-7x}$ 化为部分分式.

解 因为 $2x^3-13x^2-7x=x(x-7)(2x+1)$，所以设

$$\frac{13x+14}{2x^3-13x^2-7x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-7}+\frac{C}{2x+1},$$

上式两边同乘以 $x(x-7)(2x+1)$，得

$$13x+14=A(x-7)(2x+1)+Bx(2x+1)+Cx(x-7),$$

即 $13x+14=(2A+2B+C)x^2+(-13A+B-7C)x-7A$，

比较系数，得

$$\begin{cases}2A+2B+C=0,\\-13A+B-7C=13,\\-7A=14,\end{cases}$$

由此解得 $A=-2$，$B=1$，$C=2$.

所以

$$\frac{13x+14}{2x^3-13x^2-7x}=-\frac{2}{x}+\frac{1}{x-7}+\frac{2}{2x+1}.$$

说明 化部分分式的结果中各真分式都应是最简分式.

例 2 把 $\frac{x^2+2x+3}{(x+2)^3}$ 化为部分分式.

解 设 $\frac{x^2+2x+3}{(x+2)^3}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{(x+2)^3}$，

去分母，得

$$x^2+2x+3=A(x+2)^2+B(x+2)+C$$
$$=Ax^2+(4A+B)x+4A+2B+C.$$

比较两边的系数，得

$$\begin{cases}A=1,\\4A+B=2,\\4A+2B+C=3.\end{cases}$$

解得 $A=1$，$B=-2$，$C=3$. 所以

$$\frac{x^2+2x+3}{(x+2)^3}=\frac{1}{x+2}-\frac{2}{(x+2)^2}+\frac{3}{(x+2)^3}.$$

例 3 将 $\frac{x^3+16}{(x-2)^4}$ 化为部分分式.

解 设 $x-2=t$，则 $x=2+t$，$t\neq 0$. 于是

$$x^3+16=(2+t)^3+16$$
$$=t^3+6t^2+12t+24,$$

所以

$$\frac{x^3+16}{(x-2)^4}=\frac{t^3+6t^2+12t+24}{t^4}$$
$$=\frac{1}{t}+\frac{6}{t^2}+\frac{12}{t^3}+\frac{24}{t^4},$$

即

$$\frac{x^3+16}{(x-2)^4}=\frac{1}{x-2}+\frac{6}{(x-2)^2}+\frac{12}{(x-2)^3}+\frac{24}{(x-2)^4}.$$

说明 例 2 和例 3 都是分母为 $(x+a)^n$ 的形式，从解答过程看，例 2 是直接用待定系数法，例 3 是用换元法. 当分母的次数较高而分子又较简单时，用换元法比待定系数法简单.

例 4 把 $\frac{x+4}{x^3+2x-3}$ 化为部分分式.

解 $x^3+2x-3=(x^3-1)+(2x-2)$

$=(x-1)(x^2+x+1)+2(x-1)$

$=(x-1)(x^2+x+3)$.

设 $\dfrac{x+4}{x^3+2x-3}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x+3}$,

去分母,得

$$\begin{aligned}x+4&=A(x^2+x+3)+(Bx+C)(x-1)\\&=(A+B)x^2+(A-B+C)x+3A-C,\end{aligned}$$

比较系数,得

$$\begin{cases}A+B=0,\\A-B+C=1,\\3A-C=4.\end{cases}$$

解这个方程组,得 $A=1$, $B=-1$, $C=-1$. 所以

$$\frac{x+4}{x^3+2x-3}=\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+x+3}.$$

例5 把 $\dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$ 化为部分分式.

解 设 $\dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}+\dfrac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$.

去分母,得

$2x^2+2x+13=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-2)(x^2+1)+(Dx+E)(x-2)$,

即 $2x^2+2x+13=(A+B)x^4+(-2B+C)x^3+(2A+B-2C+D)x^2+(-2B+C-2D+E)x+A-2C-2E$.

比较两边的系数,得

$$\begin{cases}A+B=0, & ①\\-2B+C=0, & ②\\2A+B-2C+D=2, & ③\\-2B+C-2D+E=2, & ④\\A-2C-2E=13. & ⑤\end{cases}$$

由①得 $B=-A$. 代入②得 $C=-2A$.

代入③得 $D=2-2A-B+2C=2-5A$.

代入④得 $E=2+2B-C+2D=6-10A$.

将 $C=-2A$，$E=6-10A$ 代入⑤得

$$A+4A-12+20A=13,$$

解得 $$A=1.$$

从而 $$B=-1,\ C=-2,\ D=-3,\ E=-4.$$

所以

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

例 6 设 n 为正整数，求证：

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}<\frac{1}{2}.$$

分析 待证的不等式左边是若干个分式的和，应设法将其化简. 为此，必须分析其一般项 $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 的特征，尝试将它化为部分分式.

证明 设 $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{A}{2k-1}+\frac{B}{2k+1}$，

由此可得 $$1=A(2k+1)+B(2k-1),$$

即 $$1=(2A+2B)k+(A-B),$$

比较系数，得

$$\begin{cases}2A+2B=0,\\ A-B=1.\end{cases}$$

所以 $$A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2}.$$

故 $$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right).$$

令 $k=1,2,\cdots n$，得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\\ &=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)<\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

练　习　题

A　组

一、填空题

1. 已知 $\dfrac{1}{n^2+3n}=\dfrac{A}{n}+\dfrac{B}{n+3}$，则 $A=$_____，$B=$_____.

2. 若在关于 x 的恒等式 $\dfrac{ax-1}{(x-1)(x^2+1)}=\dfrac{b}{x+m}+\dfrac{cx+5}{x^2+n}$ 中，$\dfrac{ax-1}{(x-1)(x^2+1)}$ 和 $\dfrac{cx+5}{x^2+n}$ 都是最简分式，且 a、b、c、m、n 都是常数，则 c 的值是_____，b 的值是_____，a 的值是_____.

3. 如果 $\dfrac{A-17x}{7x^2+41x-6}=\dfrac{B}{x+6}+\dfrac{4}{7x-1}$，则 $A=$_____，$B=$_____.

二、把下列各式化成部分分式

4. $\dfrac{x^2+2}{(x-1)^3}$.

5. $\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x+2)}$.

6. $\dfrac{5x^2+12x+29}{2x^3+10x^2-3x-15}$.

B　组

三、解答题

7. 已知 $\dfrac{6x^5+3x^3-x^2-x+3}{(3x^3+1)(2x^3+2x^2+x+1)}=\dfrac{b}{ax+1}+\dfrac{c}{2x^2+1}-\dfrac{3x}{3x^3+1}$，求 a、b、c 的值.

8. 将 $\frac{1+7x-x^2}{(1-10x)(1+3x)^2}$ 化为部分分式.

测 试 题

一、选择题

1. 已知 $\frac{3x-4}{x^2-3x+2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}$ 是恒等式，则 ab 的值是(　　).

(A) -4　　(B) 4　　(C) -2　　(D) 2

2. 若 $\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}=M+\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-3}$，$a$、$b$ 是常数，则(　　).

(A) M 是一个二次多项式　　(B) M 是一个一次多项式

(C) $M+a+b=6$　　(D) $a+b-M=10$

3. 把 $\frac{x}{x^2-2x-3}$ 化为最简部分分式的结果是(　　).

(A) $\frac{3}{x-3}+\frac{1}{x+1}$　　(B) $\frac{1}{4(x-3)}+\frac{3}{4(x+1)}$

(C) $\frac{1}{4(x+1)}+\frac{3}{4(x-3)}$　　(D) $\frac{1}{4(x+3)}+\frac{3}{4(x-1)}$

二、解答题

4. 已知在关于 x 的恒等式 $\frac{Mx+N}{x^2+x-2}=\frac{2}{x+a}-\frac{c}{x+b}$ 中，$\frac{Mx+N}{x^2+x-2}$ 为最简分式，且有 $a>b$，$a+b=c$，求 N 的值.

三、把下列各分式化为部分分式

5. $\frac{x^3}{(x^2+1)^2}$.

6. $\frac{2x^2+x+2}{x^3+1}$.

7. $\dfrac{12x^2+20x-29}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}$.

8. $\dfrac{11x^2-23x}{2x^3-x^2-18x+9}$.

第七讲　含有字母系数的方程和分式方程

知识要点和基本方法

一、含有字母系数的方程

有的方程中，除了表示未知数的字母外，还有已知数是用字母表示的，这种方程称为含有字母系数的方程. 求解这类方程时，常要根据字母系数的限制条件，对字母的取值进行分类讨论.

如方程 $ax = b$，x 是未知数，a、b 是已知数. 若没有限制 $a \neq 0$，求解时则需进行讨论：

(1) 当 $a \neq 0$ 时，$ax = b$ 是一元一次方程，它有且只有一个解 $x = \frac{b}{a}$.

(2) 当 $a = 0$，且 $b \neq 0$ 时，任何数都不适合 $ax = b$，即这个方程无解.

(3) 当 $a = b = 0$ 时，方程变为 $0x = 0$，它显然有无数多个解.

本讲主要讨论可化为一元一次方程的含有字母系数的方程.

二、分式方程

分母里含有未知数的方程叫做分式方程. 解分式方程的基本思想是把分式方程化为整式方程，解出整式方程后，再把整式方程的解代入原方程(或最简公分母)检验，确定原分式方程的解.

将分式方程转化为整式方程的方法很多，基本方法有两种，一是方程两边都乘以各分母的最简公分母，二是将分式换成新的字母表示的整式，即用换元法. 由于分式方程转化为整式方程后，有时可能产生不适合原方程的增根，所以解分式方程一定要验根.

例题精讲

例 1 已知方程 $|x| = ax + 1$ 有一个负根而且没有正根，求 a 的取值范围.

解 因为方程有一个负根，所以这个根满足 $-x = ax + 1$，从而 $x = \dfrac{-1}{a+1} < 0$. 故 $a + 1 > 0$，即 $a > -1$.

反过来，$a > -1$ 时，易验证知原方程有一个负根.

假设方程有一个正根 x，则 $x = ax + 1$，解得 $x = \dfrac{1}{1-a} > 0$，所以 $a < 1$.

这说明要使原方程没有正根，必有 $a \geqslant 1$.

综上可知 a 的取值范围是 $a \geqslant 1$.

说明 如果学了函数知识，可在同一直角坐标系中作出函数 $y = |x|$ 与 $y = ax + 1$ 的图像，根据条件，直线 $y = ax + 1$ 只能与折线 $y = |x|$ 在 $x < 0$ 段相交，而由图像容易看出 a 的取值范围为 $a \geqslant 1$.

例 2 m 为何值时，关于 x 的方程 $\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{mx}{x^2-4} = \dfrac{3}{x+2}$ 会产生增根？

解 方程两边都乘以 $x^2 - 4$，得

$$2x + 4 + mx = 3x - 6,$$

整理得

$$(m-1)x = -10.$$

当 $m \neq 1$ 时，$x = -\dfrac{10}{m-1}$.（当 $m = 1$ 时，方程无解）.

根据题意，$x = -\dfrac{10}{m-1}$ 是增根，应有

$$\left(-\frac{10}{m-1}\right)^2 - 4 = 0,$$

从而

$$\frac{10}{m-1} = 2 \quad 或 \quad \frac{10}{m-1} = -2.$$

(1) 若 $\frac{10}{m-1}=2$，则 $m=6$.

(2) 若 $\frac{10}{m-1}=-2$，则 $m=-4$.

所以，当 $m=6$ 或 -4 时，原方程有增根.

例 3 解分式方程

$$\frac{4x^3+10x^2+16x+1}{2x^2+5x+7}=\frac{6x^3+10x^2+5x-1}{3x^2+5x+1}.$$

分析 方程两边的分式都较为复杂，直接去分母较繁，观察两边分子、分母的最高次项，左边两个最高次项的比为 $\frac{4x^3}{2x^2}=2x$，右边两个最高次项的比也为 $2x$. 于是可以先将方程化简.

解 原方程可变为

$$\frac{2x(2x^2+5x+7)+2x+1}{2x^2+5x+7}=\frac{2x(3x^2+5x+1)+3x-1}{3x^2+5x+1},$$

化简得

$$\frac{2x+1}{2x^2+5x+7}=\frac{3x-1}{3x^2+5x+1}.$$

因为当分子 $2x+1=0$ 和 $3x-1=0$ 时的 x 值都不是原方程的解，所以

$$\frac{2x^2+5x+7}{2x+1}=\frac{3x^2+5x+1}{3x-1},$$

化简得

$$\frac{4x+7}{2x+1}=\frac{6x+1}{3x-1},$$

再化简得

$$\frac{5}{2x+1}=\frac{3}{3x-1},$$

解这个方程得 $x=\frac{8}{9}$.

经检验，$x=\frac{8}{9}$ 是原方程的解.

说明 本题是通过不断化简方程而求解的.在对方程进行化简时,要注意化简得到的方程是否与原方程同解,千万不要遗漏了原方程的根.

例 4 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{10}{x+y}+\dfrac{3}{x-y}=-5,\\[2ex]\dfrac{15}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=-1.\end{cases}$$

分析 直接去分母将原方程组化成二元二次方程组,超出初二数学范围.而从方程组的特点看出,可用换元法求解.

解 设 $\dfrac{1}{x+y}=u$, $\dfrac{1}{x-y}=v$, 原方程组变为

$$\begin{cases}10u+3v=-5,\\15u-2v=-1.\end{cases}$$

解这个方程组,得

$$\begin{cases}u=-\dfrac{1}{5},\\v=-1.\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}x+y=-5,\\x-y=-1.\end{cases}$$

解之得 $\begin{cases}x=-3,\\y=-2.\end{cases}$

经检验 $\begin{cases}x=-3,\\y=-2\end{cases}$

是原方程组的解.

例 5 解关于 x 的方程

$$\frac{a^2+2x}{2x+1}-\frac{a^2-2x}{1-2x}=\frac{2(1-a^4)}{1-4x^2}.$$

解 方程两边同乘以 $(1+2x)(1-2x)$, 得

$$(a^2+2x)(1-2x)-(a^2-2x)(1+2x)=2(1-a^4),$$

化简得

$$2(1-a^2)x=1-a^4.$$

(1) 当 $1-a^2\neq 0$，即 $a\neq\pm 1$ 时，

$$x=\frac{1-a^4}{2(1-a^2)}=\frac{1+a^2}{2}.$$

把 $x=\frac{1+a^2}{2}$ 代入最简公分母 $1-4x^2$，得 $1-4x^2=1-(1+a^2)^2=-a^2(2+a^2)$.

① 当 $a\neq 0$ 时，$1-4x^2\neq 0$，原方程的解为 $x=\frac{1+a^2}{2}$.

② 当 $a=0$ 时，$1-4x^2=0$，此时 $x=\pm\frac{1}{2}$ 是原方程的增根.

(2) 当 $1-a^2=0$，即 $a=\pm 1$ 时，原方程化为 $0x=0$，x 可为除 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 的任意数.

综上所述，当 $a\neq\pm 1$ 且 $a\neq 0$ 时，原方程的解为 $x=\frac{1+a^2}{2}$；当 $a=0$ 时，原方程无解；当 $a=\pm 1$ 时，原方程的解为除 $\frac{1}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}$ 以外的任意数.

说明 分类讨论时一定要分类全面，不遗漏、不重复. 本题进行了两层分类，在综述结果时要完整概括.

例 6 兄弟两人举行 100 米赛跑，当哥哥到达终点时，弟弟正在 94 米处. 如果两人的速度仍和原来一样，进行第二次比赛，但让弟弟在原起跑点起跑，哥哥退后几米起跑，要使两人同时到达，哥哥应后退多少米？结果精确到 0.01 米.

分析 由条件知道哥哥跑 100 米的时间与弟弟跑 94 米的时间相同，设这个时间为 t 秒，可推得两人的速度. 而第二次两人同时到达，说明所跑时间相等，由此可列出方程.

解 设哥哥跑完 100 米用了 t 秒，第二次哥哥应后退 x 米. 则哥哥的速度为 $\frac{100}{t}$ 米/秒，弟弟的速度为 $\frac{94}{t}$ 米/秒. 第二次比赛哥哥需时

间 $\frac{100+x}{\frac{100}{t}}$ 秒，弟弟需时间 $\frac{100}{\frac{94}{t}}$ 秒，所以

$$\frac{(100+x)t}{100}=\frac{100t}{94},$$

因为 $t\neq 0$，故

$$\frac{100+x}{100}=\frac{100}{94},$$

解这个方程，得 $x=\frac{300}{47}\approx 6.38$(米).

答：为使两人同时到达，哥哥应后退 6.38 米.

例 7 某商场在一楼和二楼之间安装了一自动扶梯，以均匀的速度向上行驶，一男孩和一女孩同时从自动扶梯上走到二楼(扶梯行驶，两人也走梯)，如果两人上梯的速度都是匀速的，每次只跨 1 级，且男孩每分钟走动的级数是女孩的两倍. 已知男孩走了 27 级到达扶梯顶部，而女孩走了 18 级到达顶部.

(1) 扶梯露在外面的部分有多少级？

(2) 现扶梯近旁有一从二楼下到一楼的楼梯道，台阶的级数与自动扶梯的级数相等，两个孩子各自到扶梯顶部后按原速度再下楼梯，到楼梯底部再乘自动扶梯上楼(不考虑扶梯与楼梯间的距离)，求男孩第一次追上女孩时走了多少级台阶？

解 (1) 设女孩上梯的速度为 x 级/分，自动扶梯的速度为 y 级/分，扶梯露在外面的部分有 s 级，则男孩上梯的速度为 $2x$ 级/分，且有

$$\begin{cases}\frac{27}{2x}=\frac{s-27}{y},\\ \frac{18}{x}=\frac{s-18}{y},\end{cases}$$

两个方程两边分别相除，得

$$\frac{27}{36}=\frac{s-27}{s-18},$$

解之得

$$s=54.$$

所以扶梯露在外面的部分有 54 级.

(2) 设男孩第一次追上女孩时走过自动扶梯 m 遍，走过楼梯 n 遍，则女孩走过自动扶梯 $(m-1)$ 遍，走过楼梯 $(n-1)$ 遍. 由于两人所走的时间相等，所以

$$\frac{54m}{y+2x}+\frac{54n}{2x}=\frac{54(m-1)}{y+x}+\frac{54(n-1)}{x},$$

由(1)中可求得 $\frac{27}{2x}=\frac{54-27}{y}$，即 $y=2x$.

代入上面方程得

$$\frac{m}{4x}+\frac{n}{2x}=\frac{m-1}{3x}+\frac{n-1}{x},$$

化简，得 $$6n+m=16.$$

无论男孩第一次追上女孩是在自动扶梯还是在下楼时，m、n 中都一定有一个是正整数，且 $0\leqslant m-n\leqslant 1$.

试验知只有 $m=3$，$n=2\frac{1}{6}$ 符合要求.

所以男孩第一次追上女孩时走的级数为

$$3\times 27+2\frac{1}{6}\times 54=198(\text{级}).$$

说明 本题求解时设的未知数 x、y，只设不求，这种“借桥过河”的办法在解复杂的应用问题时常用来帮助分析数量关系.

练 习 题

A 组

一、解下列方程(x 是未知数)

1. $(a-1)(a-4)x+2x=a-2$，a 是字母系数.

2. $\frac{2bx+2cx-2bc-2b^2}{bx+cx-ab-ac}-\frac{ax-cx-a^2+ac}{ax-cx-ab+bc}=1$，其中 a、

b、c 是已知数.

3. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{2x+9}{x+3}-2$.

4. $\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-4x+4}+\left(1+\dfrac{2}{x-2}\right)^2=\dfrac{2x}{x-2}$.

5. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1}=\dfrac{x^2-x+2}{x^2+x-2}$.

二、解答下列应用题

6. 甲、乙两位采购员同去一家饲料公司购买两次饲料.两次饲料的价格有变化,两位采购员的购货方式也不相同,甲每次购买1 000千克,乙每次购买800元的饲料.问他们两人谁的购货方式合算?

7. A、B 两地相距270千米,两辆汽车都从 A 地开往 B 地,大汽车比小汽车提前出发5小时,小汽车比大汽车晚到30分钟.已知小汽车与大汽车的速度之比为5∶2,求两辆汽车的速度各是多少?

B 组

8. 解关于 x 的方程:

$$\frac{a(x+n)}{x+m}+\frac{b(x+m)}{x+n}=a+b.$$

9. 一件工作,甲、乙、丙合作需要7天半完成;甲、丙、戊合作需要5天完成;甲、丙、丁合作需要6天完成;乙、丁、戊合作需要4天完成,问甲、乙、丙、丁、戊五人合作需几天才能完成?

测 试 题

一、选择题

1. 关于 x 的方程 $\dfrac{b-x}{x-a}=\dfrac{d}{c}$ 有唯一的一个解,字母已知数应具备的条件是(　　).

(A) $a \neq b$　　(B) $c \neq d$

(C) $bc + ad \neq 0$　　(D) $c + d \neq 0$

2. 要使关于 x 的方程 $\frac{x+1}{x+2} - \frac{x}{x-1} = \frac{a}{x^2+x-2}$ 的解是正数，a 应满足的条件是(　　).

(A) $a = -1$　　(B) $a = -2$

(C) $a < -1$　　(D) $a > -1$

3. 使分式 $\frac{4}{x^2-4}$ 与 $\frac{3}{x^2+x-6} + \frac{2}{x^2+5x+6}$ 的值相等的 x 等于(　　).

(A) -4　　(B) -3　　(C) 1　　(D) 10

4. m 个男孩和 n 个女孩的平均年龄为 x 岁，如果女孩的平均年龄为 y 岁，则男孩的平均年龄为(　　)岁.

(A) $\frac{mx+ny}{m+n}$　　(B) $\frac{mx+nx-ny}{m}$

(C) $\frac{mx-ny}{m}$　　(D) $\frac{mx+nx+ny}{m+n}$

二、解下列方程(x 是未知数)

5. $\frac{1-ax}{mx} + \frac{1+bx}{nx} = \frac{ab}{mn}$，其中 $ab + an \neq bm$.

6. $\frac{x+1}{a+b} + \frac{x-1}{a-b} = \frac{2a}{a^2-b^2}$.

7. $\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \cdots + \frac{1}{(x+99)(x+100)} + \frac{1}{x+100} = \frac{1\,999}{2\,000}$.

8. $\frac{x+6}{x+5} + \frac{x+10}{x+9} = \frac{x+7}{x+6} + \frac{x+9}{x+8}$.

三、解方程组

9. $\begin{cases} \frac{2}{3x+2y} + \frac{5}{3x-2y} = 3, \\ \frac{9}{3x+2y} - \frac{2}{3x-2y} = \frac{5}{4}. \end{cases}$

四、应用题

10. 一辆玩具车走 12 米路，前轮比后轮多转 6 圈，如果前轮周长增加$\frac{1}{4}$，后轮周长增加$\frac{1}{5}$，那么走 12 米路前轮比后轮要多转 4 圈. 求前轮和后轮的周长.

11. 当水槽漏水时，要将水槽注满，甲管单独开放需用 2 小时，乙管单独开放需用 3 小时，甲、乙两管同时开放需用 1 小时. 求水槽不漏水时，甲、乙两管同时开放注满水槽需用多少时间？

第八讲　实数的性质

知识要点和基本方法

有理数和无理数统称实数. 实数有无穷多个，既没有最大的实数，也没有最小的实数.

全体实数和数轴上的所有点一一对应. 在实数范围内，任一实数都可以开奇次方，但只有非负数才能开偶次方.

有理数都可以写成有限小数(包括整数)或循环小数的形式，都可以表示成分数$\frac{q}{p}$(p、q是互质的整数，$p\neq0$)；反过来，能写成$\frac{q}{p}$(p、q是互质的整数)形式的数都是有理数. 任何两个有理数之间存在无穷多个有理数，并且任何两个有理数的和、差、积、商(除数不为零)还是有理数，这一性质称为有理数对加、减、乘、除(除数$\neq0$)是封闭的.

无理数是无限不循环小数，不能写成分数$\frac{q}{p}$(p、q是互质的整数，$p\neq0$)的形式. 无理数对四则运算不具有封闭性，即两个无理数的和、差、积、商不一定是无理数. 如$\sqrt{7}$是无理数，但$\sqrt{7}-\sqrt{7}$，$\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$都不是无理数.

一个有理数a与一个无理数b进行四则运算时，$a+b$、$a-b$是无理数；当$a\neq0$时，$a\cdot b$、$\frac{a}{b}$、$\frac{b}{a}$都是无理数；当$a=0$时，$a\cdot b$、$\frac{a}{b}$就是有理数了.

任一个实数的绝对值是一个非负实数，两个互为相反数的实数绝对值相等，即$|a|=|-a|$.

非负数即正数或0. 如果a是实数，则$|a|$、a^2、$\sqrt{a}$($a\geqslant0$)都是

非负数. 非负数有许多性质，如：有限个非负数的和仍然是非负数；有限个非负数的和等于 0，必定每一个非负数都等于 0；有限个非负数的积仍然是非负数；非负数中最小的数是 0，而没有最大的非负数.

例题精讲

例 1 计算下列各题：

(1) $\sqrt{(-5)^2}-\sqrt[4]{(-34)^4}+|-3^2|-\sqrt[5]{(-4)^5}$；

(2) $\sqrt{(\underbrace{99\cdots9}_{1999个9})^2+1\underbrace{99\cdots9}_{1999个9}}$；

(3) $\left(\frac{7}{3}\right)^{999}\cdot\sqrt{\frac{3^{1998}+15^{1998}}{7^{1998}+35^{1998}}}$.

解 (1) $\sqrt{(-5)^2}-\sqrt[4]{(-34)^4}+|-3^2|-\sqrt[5]{(-4)^5}$

$=5-34+9+4$

$=-16.$

(2) $\sqrt{(\underbrace{99\cdots9}_{1999个9})^2+1\underbrace{99\cdots9}_{1999个9}}$

$=\sqrt{(\underbrace{99\cdots9}_{1999个9})^2+2\times\underbrace{99\cdots9}_{1999个9}+1}$

$=\sqrt{(\underbrace{99\cdots9}_{1999个9}+1)^2}$

$=\sqrt{(10^{1999})^2}=10^{1999}.$

(3) $\left(\frac{7}{3}\right)^{999}\cdot\sqrt{\frac{3^{1998}+15^{1998}}{7^{1998}+35^{1998}}}$

$=\left(\frac{7}{3}\right)^{999}\cdot\sqrt{\frac{3^{1998}(1+5^{1998})}{7^{1998}(1+5^{1998})}}$

$=\left(\frac{7}{3}\right)^{999}\cdot\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^{1998}}$

$=\left(\frac{7}{3}\right)^{999}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{999}=1.$

例 2 已知三个数 89，12，3，进行如下运算：取其中任意两个数

求其和再除以 $\sqrt{2}$，同时求其差再除以 $\sqrt{2}$. 试问：能否经过若干次上述运算，得到三个数 90，14，10？证明你的结论.

解 设题中原三个数为 a，b，c，则经过一次运算后得到的三个数是 $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$，$\frac{a-b}{\sqrt{2}}$，c.

因为 $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2+c^2$

$=\frac{a^2+2ab+b^2}{2}+\frac{a^2-2ab+b^2}{2}+c^2$

$=a^2+b^2+c^2$，

所以题设的三个数经过一次运算后始终保持其平方和不变.

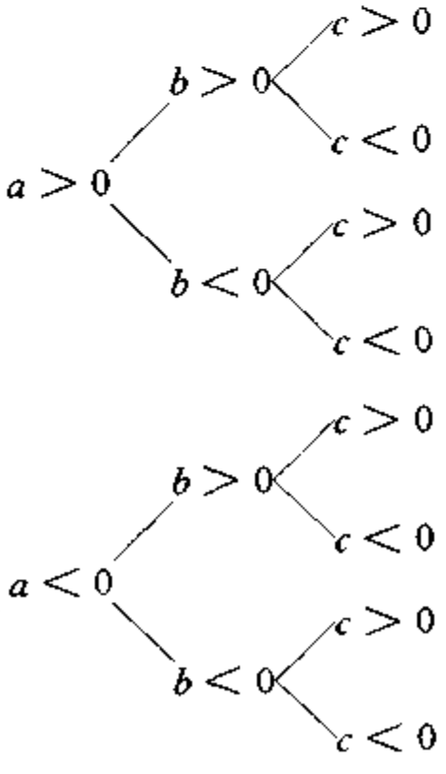
但 $$89^2+12^2+3^2=8\,074,$$

$$90^2+14^2+10^2=8\,396>8\,074.$$

故经过题中规定的运算不可能由已知的三个数得到 90，14，10 三个数.

例 3 已知 a、b、c 是非零实数，$M=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{ab}{|ab|}+\frac{ac}{|ac|}+\frac{bc}{|bc|}+\frac{abc}{|abc|}$，求 M 的值.

分析 M 中有 3 个不同的字母，如逐个分类有如下八种情形：



考虑到 M 中 a、b、c“地位平等”，$\frac{ab}{|ab|}+\frac{ac}{|ac|}+\frac{bc}{|bc|}$ 的值取决于两数积的符号，$\frac{abc}{|abc|}$ 的值取决于 3 数积的符号，故可按 a、b、c 中正数的个数分类.

解 (1) a、b、c 3 个数均为正数时，$M=7$.

(2) a、b、c 中有 2 个正数，1 个负数时，$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=1$，$\frac{ab}{|ab|}+\frac{ac}{|ac|}+\frac{bc}{|bc|}=-1$，$\frac{abc}{|abc|}=-1$，从而 $M=1-1-1=-1$.

(3) a、b、c 中有 1 个正数，2 个负数时，$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=-1$，$\frac{ab}{|ab|}+\frac{ac}{|ac|}+\frac{bc}{|bc|}=-1$，$\frac{abc}{|abc|}=1$，从而 $M=-1-1+1=-1$.

(4) a、b、c 中 3 个数全为负数时，$M=-1-1-1+1+1+1-1=-1$.

例 4 求方程 $|x+1|-|x-2|=|2x-1|$ 的实数解.

分析 求解含绝对值的方程，关键是要去掉绝对值符号，因而需要求出使各绝对值中式子为 0 的 x 的值. 本题中由 $x+1=0$，得 $x=-1$，由 $x-2=0$，得 $x=2$，由 $2x-1=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，于是应分 $x\leqslant -1$，$-1<x\leqslant\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<x\leqslant 2$，$x>2$ 四段讨论.

解 (1) 当 $x\leqslant -1$ 时，原方程化为

$$-(x+1)+(x-2)=-(2x-1),$$

解之得 $x=2$，不满足 $x\leqslant -1$，故舍去.

(2) 当 $-1<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，原方程化为

$$(x+1)+(x-2)=-(2x-1),$$

解之得

$$x=\frac{1}{2}.$$

(3) 当 $\frac{1}{2} < x \leqslant 2$ 时，原方程化为

$$(x+1)+(x-2)=2x-1,$$

即

$$2x-1=2x-1.$$

这是一个恒等式，说明满足 $\frac{1}{2} < x \leqslant 2$ 的任意 x 值，都是方程的解.

(4) 当 $x > 2$ 时，原方程化为

$$(x+1)-(x-2)=2x-1,$$

解之得 $x=2$，不满足 $x>2$，故舍去.

综上所述，可知 $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$ 中的任意实数都是原方程的解.

例 5 已知 x、y 为实数，且 $(x-y)^2$ 与 $\sqrt{5x-3y-16}$ 互为相反数，求 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的值.

解 由已知得

$$(x-y)^2+\sqrt{5x-3y-16}=0,$$

因为 $(x-y)^2$，$\sqrt{5x-3y-16}$ 都是非负数，要使它们的和等于 0，必有

$$\begin{cases} x-y=0, \\ 5x-3y-16=0. \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=8, \\ y=8. \end{cases}$$

故

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}.$$

例 6 已知 $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z)$，求 x、y、z 的值.

解 由已知得

$$x+y+z-2\sqrt{x}-2\sqrt{y-1}-2\sqrt{z-2}=0,$$

即 $(x-2\sqrt{x}+1)+[(y-1)-2\sqrt{y-1}+1]+[(z-2)-2\sqrt{z-2}+1]=0.$

因为 $x=(\sqrt{x})^2$，$y-1=(\sqrt{y-1})^2$，$z-2=(\sqrt{z-2})^2$，所以

$$(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{y-1}-1)^2+(\sqrt{z-2}-1)^2=0.$$

根据非负数的性质，有

$$\sqrt{x}-1=0,\ \sqrt{y-1}-1=0,$$

$$\sqrt{z-2}-1=0.$$

由此可求得 $x=1$，$y=2$，$z=3$.

说明 题中一个等式中含有 3 个未知数，要求出它们的值，常先把已知等式配凑成几个非负数的和为 0 的形式，再由每个非负数为 0 求出其解.

例 7 已知 x、y 是有理数，且 $\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{12}\right)y-2.25-1.45\sqrt{3}=0$，求 x、y 的值.

分析 a、b 为有理数，m 为无理数，则当且仅当 $a=b=0$ 时，$a+bm=0$. 由这一性质可解答本题.

解 已知等式可以变形为

$$\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y-2.25\right)+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}y-1.45\right)\sqrt{3}=0.$$

因为 x、y 是有理数，所以

$$\begin{cases}\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y-2.25=0,\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{12}y-1.45=0.\end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases}4x+3y=27,\\6x-y=17.4.\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}x=3.6,\\y=4.2.\end{cases}$$

例 8 若 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，a、b、c、d 都是有理数，x 是无理数. 求证：

(1) 当 $bc=ad$ 时，y 是有理数；

(2) 当 $bc\neq ad$ 时，y 是无理数.

证明 (1) 根据题意，c、d 不能同时为 0，否则 $cx+d=0$，y 没有意义了.

若 $c=0$，由 $bc=ad$，$d\neq 0$，得 $a=0$，此时 $y=\dfrac{b}{d}$ 是有理数.

若 $d=0$，则 $c\neq 0$，由 $bc=ad$ 得 $b=0$，此时 $y=\dfrac{ax}{cx}=\dfrac{a}{c}$ 是有理数.

若 $c\neq 0$ 且 $d\neq 0$，由 $bc=ad$ 得 $a=\dfrac{bc}{d}$，代入 y 得

$y=\dfrac{\frac{bc}{d}x+b}{cx+d}=\dfrac{bcx+bd}{cdx+d^2}=\dfrac{b(cx+d)}{d(cx+d)}=\dfrac{b}{d}$，所以此时 y 是有理数.

(2) 假设 $bc\neq ad$ 时，y 是有理数，则 $(cx+d)y=ax+b$，

即 $(cy-a)x+(dy-b)=0.$

因为 $cy-a$、$dy-b$ 是有理数，x 是无理数，所以一定有

$$cy-a=0,\ dy-b=0,$$

从而 $$bc=cdy=(cy)d=ad,$$

这与已知条件 $bc\neq ad$ 矛盾，从而 y 不是有理数，y 一定是无理数.

说明 要证一个数是有理数，常证这个数能表示成几个有理数的和、差、积、商形式. 要证一个数是无理数，常用反证法，即假设这个数不是无理数(即是有理数)，再推出矛盾.

练　习　题

A　组

一、填空题

1. 化简 $(\sqrt{1.21}-\sqrt{0.0196})\div\left[\sqrt{\frac{9}{625}}+\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{12.5}\right)^3}\right]=$ _____.

2. 计算 $\sqrt{81\cdot 82\cdot 83\cdot 84+1}=$ _____.

3. 如果 a 是负数，则 a^2 的平方根是_____.

4. 若 m 是一个完全平方数，则比 m 大的最小完全平方数是 _____.

5. 用“$>$”、“$<$”填空：

$-\sqrt{275}$ _____ $-4\sqrt{11}$，

$4-\sqrt{2}$ _____ $1+\sqrt{2}$，

$\sqrt{61}-1$ _____ $\sqrt{6}+3$.

6. 当 $ab>0$ 时，$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}-\frac{ab}{|ab|}$ 的值等于_____.

7. 用四则运算的加、减、除定义一种新的运算：对于任意两个实数 x、y 有 $x*y=\frac{x+y}{x-y}$，则 $(11*12)*(19*31)=$ _____.

8. 定义：$a\vee b$ 表示 a，b 两个实数中取较大的一个，$a\wedge b$ 表示 a，b 两个实数中取较小的一个，则 $(1998\vee 2000)\wedge(1999\vee 2001)$ 等于_____.

9. 若 $|a-1|+\sqrt{2b+1}=0$，则 $a^{2000}-b^4=$ _____.

10. 已知 $a>0$，$b<0$，则使 $|x-a|+|x-b|=a-b$ 成立的 x 的取值范围是_____.

二、解答题

11. 恰有 35 个连续自然数的算术平方根的整数部分相同，求这个相同的整数.

12. 已知 $(x-y-1)^2+|2x+y+4|=0$，求 $3x^2-\sqrt[3]{y^3}$ 的值.

13. 若 $|x-8y|+(4y-1)^2+\sqrt{8z-3x}=0$，求 $\sqrt{2x}+y-\sqrt{3z}$ 的值.

14. 设 $T=|x-p|+|x-15|+|x-p-15|$，其中 $0<p<15$，对于满足 $p\leqslant x\leqslant 15$ 的 x 来说，T 的最小值是多少?

15. 设 a，b 是正有理数，且满足 $(\sqrt{3}a+\sqrt{2})a+(\sqrt{3}b-\sqrt{2})b-\sqrt{2}-25\sqrt{3}=0$，求 ab 的值.

B 组

三、解答题

16. 已知 x、y 为实数，$y=\frac{1}{3}+\sqrt{4x-1}+\sqrt{1-4x}$，求 $\frac{x}{y}$ 的值.

17. 实数 a 是由 b 经四舍五入得到的近似值，试比较 a 与 b 的大小.

18. 已知 a、b、c、d、p 都是有理数，$\sqrt{p}$ 是无理数，$a\neq 0$，求等式

$$\frac{a+c\sqrt{p}}{a+b\sqrt{p}}=\frac{a+d\sqrt{p}}{a+c\sqrt{p}}$$

成立的条件.

四、证明题

19. 已知 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$，其中 a，b，c，d 都是正数.

求证　$a=b=c=d$.

测　试　题

一、填空题

1. 计算 $\sqrt{1\,991\times1\,990\times1\,989\times1\,988+1}-1\,989^2$ 的结果是_____.

2. 若 $0<x<1$，在 x^2，x，$\sqrt{x}$，$\frac{1}{x}$ 这四个数中，最大的是_____，最小的是_____.

3. 对任意两个实数 x、y，定义运算 $x*y=\frac{2xy}{ax+by}$，其中 a、b 是常数，等式右边的运算是通常的实数四则运算，若 $1*2=1$，$2*3=3$，则 $2*(-1)=$_____.

4. 已知实数 a，b，x，y 满足 $y+|\sqrt{x}-\sqrt{3}|=1-a^2$，$|x-3|=y-1-b^2$，则 $2^{x+y}+2^{a+b}$ 的值是_____.

二、选择题

5. 一个自然数的算术平方根为 $a(a>1)$，则与这个自然数相邻的两个自然数的算术平方根分别为(　　).

(A) $a-1$，$a+1$　　(B) $\sqrt{a-1}$，$\sqrt{a+1}$

(C) $\sqrt{a^2-1}$，$\sqrt{a^2+1}$　　(D) a^2-1，a^2+1

6. 对实数 x，y 定义运算 $*$：$x*y=ax^y+b+1$，若 $1*2=869$，$2*3=883$，则 $2*9=$(　　).

(A) 1 991　(B) 1 990　(C) 1 999　(D) 1 891

7. 如图 8-1，点 A、B、C 表示的数分别为 a、b、c.

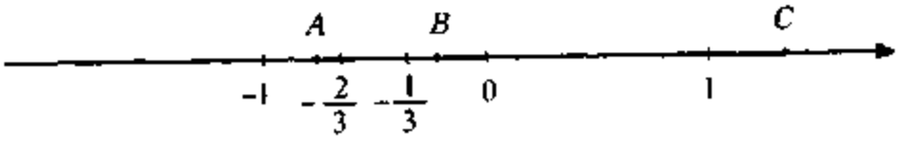


图 8-1

则 $\frac{1}{ab}$，$\frac{1}{b-a}$，$\frac{1}{c}$ 的大小关系是(　　).

(A) $\frac{1}{ab}<\frac{1}{b-a}<\frac{1}{c}$　　(B) $\frac{1}{b-a}<\frac{1}{ab}<\frac{1}{c}$

(C) $\frac{1}{c}<\frac{1}{b-a}<\frac{1}{ab}$　　(D) $\frac{1}{c}<\frac{1}{ab}<\frac{1}{b-a}$

8. 已知 $x<y<0$，$M=|x|$，$N=|y|$，$P=\frac{|x+y|}{2}$，$Q=\sqrt{xy}$，则(　　).

(A) $M<Q<P<N$　　(B) $M<P<Q<N$

(C) $Q<N<P<M$　　(D) $N<Q<P<M$

9. 若 a 是无理数，且 a，b 满足 $ab-a-b+1=0$，则 b 是一个(　　).

(A) 小于 0 的有理数　　(B) 大于 0 的有理数

(C) 小于 0 的无理数　　(D) 大于 0 的无理数

10. 设 x 是无理数，但 $(x-2)(x+6)$ 是有理数，则下列结论正确的是(　　).

(A) x^2 是有理数　　(B) $(x+6)^2$ 是有理数

(C) $(x+2)(x-6)$ 是无理数　　(D) $(x+2)^2$ 是无理数

三、解答题

11. 关于 x 的方程 $\big||x-2|-1\big|=a$ 恰有三个整数解，求 a 的值.

12. 解方程 $|x-2|+|x+3|=6$.

13. 已知 x 是实数，$M=|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|+|x+5|$，求 M 的最小值.

14. 已知实数 x 与 y，使得 $x+y$、$x-y$、xy、$\frac{x}{y}$ 四个数中的三个有相同的数值，求出所有具有这样性质的数对 (x, y).

第九讲　二次根式的运算

知识要点和基本方法

一般地，式子 $\sqrt{a}$ $(a \geqslant 0)$ 叫做二次根式. 二次根式的被开方数是非负数，$\sqrt{a}$ 的结果也是一个非负数.

二次根式具有以下性质：

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad (a \geqslant 0);$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a > 0), \\ 0 & (a = 0), \\ -a & (a < 0); \end{cases}$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geqslant 0, b \geqslant 0);$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geqslant 0, b > 0).$$

二次根式的运算法则如下：

$$a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c} \quad (c \geqslant 0);$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a \geqslant 0, b \geqslant 0);$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geqslant 0, b > 0);$$

$$(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n} \quad (a \geqslant 0).$$

在运用二次根式性质和运算法则时，要注意条件是否满足？以避免出现 $\sqrt{(-25)\times(-36)}=\sqrt{-25}\times\sqrt{-36}$ 之类的错误.

例题精讲

例1 当 $a<2b$ 时，把 $\frac{a}{a-2b}\sqrt{\frac{a^2-4ab+4b^2}{a}}$ 中根号外的因式移入根号内.

分析 由二次根式的性质和运算法则可知：若 $a\geqslant 0$，则 $a\sqrt{x}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{x}=\sqrt{a^2x}$；若 $a<0$，则 $a\sqrt{x}=-(-a)\sqrt{x}=-\sqrt{(-a)^2x}=-\sqrt{a^2x}$. 所以求解本题先要分析 $\frac{a}{a-2b}$ 的符号.

解 因为 $a<2b$，所以 $a-2b<0$. 又

$$\sqrt{\frac{a^2-4ab+4b^2}{a}}=\sqrt{\frac{(a-2b)^2}{a}},$$

这个根式有意义，必定 $a>0$. 从而 $\frac{a}{a-2b}<0$. 所以

$$\begin{aligned}&\frac{a}{a-2b}\sqrt{\frac{a^2-4ab+4b^2}{a}}\\=&-\left|\frac{a}{a-2b}\right|\cdot\sqrt{\frac{(a-2b)^2}{a}}\\=&-\sqrt{\frac{a^2}{(a-2b)^2}\cdot\frac{(a-2b)^2}{a}}\\=&-\sqrt{a}.\end{aligned}$$

例2 已知最简根式 $\sqrt[3x+y]{2x-y}$ 与 $\sqrt[y+6]{4x+y-2}$ 是同次根式，且 y 是偶数. 求 y 的值.

解 由同次根式的意义，得

$$3x+y=y+6,$$

故 $x=2$. $3x+y=y+6$ 是偶数，即两个根式都是偶次根式. 于是

$$\begin{cases}2x-y=4-y\geqslant 0,\\4x+y-2=6+y\geqslant 0.\end{cases}$$

求得 $-6 \leqslant y \leqslant 4$.

又 y 是偶数，所以 y 的可能值有 -6，-4，-2，0，2，4.

逐一检验发现，$y=-6$ 时，$y+6=0$，不合题意，$y=-4$，-2，0，4 时，两个根式中至少有一个根式不是最简根式. $y=2$ 时符合要求.

所以 $y=2$.

说明 当 $x=2$，$y=2$ 时，题中两个根式不是二次根式，而是 8 次根式了. 偶次根式的被开方数都必须是非负数.

例 3 已知 $a>b>c>0$，$P_1=\sqrt{(a+c)^2+b^2}$，$P_2=\sqrt{a^2+(b+c)^2}$，$P_3=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$，求出在 P_1P_2，P_1P_3，P_2P_3，P_2^2，P_3^2 中的最大数和最小数.

分析 比较几个数(式)的大小常可通过求差、求商等办法解决. 比较几个二次根式的大小时，还可先将各二次根式平方，再比较各被开方式的大小，最后确定原根式的大小关系.

解 因为 $a>b>c>0$，故 $ab>ac>bc$. 从而

$$\begin{aligned} &a^2+2ab+b^2+c^2\\ >&a^2+2ac+b^2+c^2\\ >&a^2+2bc+b^2+c^2, \end{aligned}$$

即 $$(a+b)^2+c^2>(a+c)^2+b^2>(b+c)^2+a^2>0,$$

所以 $$P_3^2>P_1^2>P_2^2.$$

由于 P_1、P_2、P_3 都是正数，故

$$P_3>P_1>P_2>0.$$

于是 $P_3^2>P_1P_3>P_2P_3>P_2P_1>P_2^2$，这说明 P_3^2 最大，P_2^2 最小.

例 4 已知 $c>1$，$x=\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$，$y=\sqrt{c+1}-\sqrt{c}$，$z=\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}$，比较 x，y，z 的大小.

解 因为 $x=\sqrt{c}-\sqrt{c-1}=\dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{c-1}}$，

$$y=\sqrt{c+1}-\sqrt{c}=\frac{1}{\sqrt{c+1}+\sqrt{c}},$$

$$z=\sqrt{c+2}-\sqrt{c+1}=\frac{1}{\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}}.$$

显然 $\sqrt{c}+\sqrt{c-1}<\sqrt{c+1}+\sqrt{c}<\sqrt{c+2}+\sqrt{c+1}$，

所以 $$x>y>z.$$

例 5 计算下列各题：

(1) $M=(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{7})(-\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})$；

(2) $N=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{35}+\sqrt{21}+5}{\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{7}}$；

(3) $P=\dfrac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$；

(4) $S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{1\,997^2}+\frac{1}{1\,998^2}}$.

解 (1) $M=[(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2-(\sqrt{7})^2]\cdot[(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5}-\sqrt{6})^2]$

$=(2\sqrt{30}+4)(2\sqrt{30}-4)$

$=(2\sqrt{30})^2-16$

$=104.$

(2) $N=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$，

故 $$\frac{1}{N}=\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2},$$

所以 $$N=\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}.$$

(3) 考察 P 中一般项

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)n}$$

$$=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

故 $$P=\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}$$

$$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}.$$

(4) S 中的一般项为 $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$.

因为 $$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{2}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2-2\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2}$$

$$=\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

所以 $$S=\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots$$

$$+\left(1+\frac{1}{1\,997}-\frac{1}{1\,998}\right)$$

$$=1\,997+1-\frac{1}{1\,998}$$

$$=1\,997\,\frac{1\,997}{1\,998}.$$

说明 二次根式的化简或计算，要灵活运用乘法公式、分解因式、拆项分组等方法. 本题第(2)小题先求其倒数的值，以便能运用 $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 简化运算. 第(3)、(4)小题都是先分析一般项的特

征，找出规律，再用拆项相抵的办法求出结果，这种方法在解带有省略号的项数较多的计算题时常用.

例6 化简 $\dfrac{x^2-x-2+(x-1)\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-2+(x+1)\sqrt{x^2-4}}$，其中 $x>2$.

分析 本题直接分母有理化很麻烦.应观察式子的特点，找出分子与分母之间的联系，先约分，再分母有理化.

解
$$\frac{x^2-x-2+(x-1)\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-2+(x+1)\sqrt{x^2-4}}$$
$$=\frac{(x+1)(x-2)+(x-1)\sqrt{(x-2)(x+2)}}{(x-1)(x+2)+(x+1)\sqrt{(x-2)(x+2)}}$$
$$=\frac{\sqrt{x-2}[(x+1)\sqrt{x-2}+(x-1)\sqrt{x+2}]}{\sqrt{x+2}[(x-1)\sqrt{x+2}+(x+1)\sqrt{x-2}]}$$
$$=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}.$$

例7 化简 $S=\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+6x+9}$.

解
$$S=\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+6x+9}$$
$$=\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+3)^2}$$
$$=|x-1|-|x-2|+|x+3|.$$

由于 $x-1=0$ 时，$x=1$；$x-2=0$ 时，$x=2$，$x+3=0$ 时，$x=-3$，故应分四个部分讨论：

当 $x\leqslant -3$ 时，$S=-(x-1)+(x-2)-(x+3)=-x-4$.

当 $-3<x\leqslant 1$ 时，$S=-(x-1)+(x-2)+(x+3)=x+2$.

当 $1<x\leqslant 2$ 时，$S=(x-1)+(x-2)+(x+3)=3x$.

当 $x>2$ 时，$S=(x-1)-(x-2)+(x+3)=x+4$.

说明 利用公式 $\sqrt{a^2}=|a|$ 化简求值时，要根据各绝对值的“零点数”(使绝对值为0的未知数值)把数轴划分为 n 个区间，再分别对每个区间进行讨论.

例8 (1) 求证

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}}=\left|a+\frac{1}{b}-\frac{a}{ab+1}\right|. \qquad ①$$

(2) 计算 $\sqrt{1+1\,999^2+\frac{1\,999^2}{2\,000^2}}-\frac{1}{2\,000}$.

解 (1) 利用

$$\left(a+\frac{1}{b}-\frac{a}{ab+1}\right)^2$$

$$=a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}+2\left[\frac{a}{b}-\frac{a^2}{ab+1}-\frac{a}{(ab+1)b}\right]$$

$$=a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}+2\left[\frac{a(ab+1)-a^2b-a}{(ab+1)b}\right]$$

$$=a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2},$$

上式两边开平方，得

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}}=\left|a+\frac{1}{b}-\frac{a}{ab+1}\right|.$$

(2) 在①中令 $a=1\,999$，$b=1$，则

$$\sqrt{1+1\,999^2+\frac{1\,999^2}{2\,000^2}}=\left|1\,999+1-\frac{1\,999}{2\,000}\right|=1\,999\frac{1}{2\,000},$$

从而 $$\sqrt{1+1\,999^2+\frac{1\,999^2}{2\,000^2}}-\frac{1}{2\,000}=1\,999.$$

例 9 已知 $M=(\sqrt{5}+\sqrt{3})^6$ 的小数部分为 P，求 $M(1-P)$ 的值.

解 设 $x=\sqrt{5}+\sqrt{3}$，$y=\sqrt{5}-\sqrt{3}$，则

$$x+y=2\sqrt{5},\ xy=2.$$

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=16.$$

$$x^6+y^6=(x^2+y^2)[x^4+y^4-x^2y^2]$$

$$=16[(x^2+y^2)^2-3(xy)^2]$$

$$=3\,904.$$

因为　　$y=\sqrt{5}-\sqrt{3}<1$，又 $y>0$，

故　　$0<y^6<1$，

又　　$M=x^6=3\,904-y^6$.

于是 M 的小数部分为 $P=1-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^6$.

从而 $M(1-P)=(\sqrt{5}+\sqrt{3})^6\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})^6=2^6=64$.

例 10　已知 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$，且 $\sqrt{a}=m+\dfrac{a-b}{2}$，$\sqrt{b}=n-\dfrac{a-b}{2}$，其中 m，n 均为有理数，求 m^2+n^2 的值.

解　因为

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}=\sqrt{a},$$

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}=\sqrt{b},$$

且 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$，所以

$$\begin{aligned}\sqrt{a}&=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\\&=\frac{1}{2}+\frac{a-b}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\\&=\frac{1}{2}+\frac{a-b}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{b}&=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\\&=\frac{1}{2}-\frac{a-b}{2}.\end{aligned}$$

与已知比较，得　　$m=\dfrac{1}{2}$，$n=\dfrac{1}{2}$.

故　　$m^2+n^2=\dfrac{1}{2}$.

练　习　题

A　组

一、选择题

1. 已知最简根式 $a\sqrt{2a+b}$ 与 $\sqrt[a-b]{7}$ 是同类根式，则满足条件的 a、b 的值(　　).

(A) 不存在　　(B) 有 1 组　　(C) 有 2 组　　(D) 多于 2 组

2. 已知 $a<0$，化简 $|\sqrt{a^2}-a|$ 后的结果为(　　).

(A) 0　　(B) $2a$

(C) $-2a$　　(D) 不确定

3. 若 $x<1$，则 $\left|\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(2-x)^2}\right|$ 等于(　　).

(A) $3-2x$　　(B) $2x-3$

(C) 1　　(D) 2

4. 已知实数 a、b、c 满足 $|a|+a=0$，$|ab|=ab$，$|c|-c=0$，那么代数式 $\sqrt{b^2}-|a+b|+|a-c|-\sqrt{c^2-2bc+b^2}$ 化简后的结果为(　　).

(A) $2c-b$　　(B) $2c-2a$

(C) $-b$　　(D) b

5. 满足不等式 $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}<x<\dfrac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 的整数 x 的个数是(　　).

(A) 4　　(B) 5　　(C) 6　　(D) 7

6. 设 $\sqrt{5}$ 的整数部分为 m，小数部分为 n，则 $m\left(m-\dfrac{1}{n}\right)^5$ 的值为(　　).

(A) $50\sqrt{5}$　　(B) $-50\sqrt{5}$

(C) 128　　(D) -128

二、比较大小

7. 比较 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ 与 $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ 的大小.

8. 设 $a>b>c>d>0$，且 $X=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，$Y=\sqrt{ac}+\sqrt{bd}$，$Z=\sqrt{ad}+\sqrt{bc}$，用"$<$"把 X，Y，Z 连结起来.

三、计算下列各题

9. $\sqrt{\dfrac{a^2-3a+2}{a^2-6a+9}}\cdot\dfrac{a-3}{\sqrt{2-a}}+\sqrt{1-a}$.

10. $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

11. $\dfrac{\sqrt{11}+5\sqrt{7}+4\sqrt{6}}{7+\sqrt{77}+\sqrt{66}+\sqrt{42}}$.

B 组

四、填空题

12. 化简 $\sqrt{\dfrac{1\cdot2\cdot3+2\cdot4\cdot6+\cdots+n\cdot2n\cdot3n}{1\cdot5\cdot10+2\cdot10\cdot20+\cdots+n\cdot5n\cdot10n}}=$_____.

13. 若 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的三边，化简 $\sqrt{(a+b+c)^2}+\sqrt{(a-b-c)^2}+\sqrt{(b-c-a)^2}+\sqrt{(c-a-b)^2}=$_____.

14. $\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{3}}+\dfrac{1}{1+\sqrt[4]{3}}+\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}$ 的值是_____.

15. 已知 $9+\sqrt{13}$ 与 $9-\sqrt{13}$ 的小数部分分别是 a 和 b，则 $ab-3a+4b+8$ 的值是_____.

16. 比 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6$ 大的最小整数是_____.

17. 已知 n 为正整数，且 $m=\left[\dfrac{(\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n}{2}\right]^2$，

用含 m 的代数式表示 $(\sqrt{2}-1)^n$ 的结果为_____.

五、计算题

18. $\dfrac{3+2\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\dfrac{1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

19. $\dfrac{3\sqrt{15}-\sqrt{10}-2\sqrt{6}+3\sqrt{3}-\sqrt{2}+18}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1}$.

六、解答题

20. 已知 $x=\dfrac{2ab}{1+b^2}$ $(a>0,\ b>0)$，化简 $\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$.

测 试 题

一、选择题

1. 如果 $\sqrt{-a}$ 是整数，那么(　　).

(A) $a>0$，且 a 是完全平方数

(B) $a<0$，且 $-a$ 是完全平方数

(C) $a\geqslant 0$，且 a 是完全平方数

(D) $a\leqslant 0$，且 $-a$ 是完全平方数

2. 使等式 $(-\sqrt{-x})^2=x$ 成立的 x 值(　　).

(A) 是正数　　(B) 是负数

(C) 是 0　　(D) 不能确定

3. 如果 $a<b$，那么 $\sqrt{-(x+a)^3(x+b)}$ 等于(　　).

(A) $(x+a)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$

(B) $(x+a)\sqrt{(x+a)(x+b)}$

(C) $-(x+a)\sqrt{-(x+a)(x+b)}$

(D) $-(x+a)\sqrt{(x+a)(x+b)}$

4. 已知 a、b、c 在数轴上的位置如图 9-1 所示.

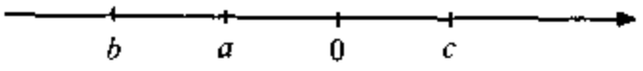


图 9-1

化简 $\sqrt{a^2}+\sqrt{(c-a)^2}-\sqrt{(a+b)^2}+\sqrt{(b+c)^2}$ 的值等于(　　).

(A) $2c-a$　　(B) $-a$

(C) $2a-2b$　　(D) a

5. 设实数 x 满足 $|2-x|=2+|x|$，则 $\sqrt{(x-3)^2}$ 等于(　　).

(A) $x-3$　　(B) $3-x$

(C) $\pm(x-3)$　　(D) 3

6. 把 $(x-1)\sqrt{-\dfrac{1}{x-1}}$ 根号外面的因式移到根号内，则原式等于(　　).

(A) $\sqrt{1-x}$　　(B) $\sqrt{x-1}$

(C) $-\sqrt{x-1}$　　(D) $-\sqrt{1-x}$

二、填空题

7. 已知实数 a 满足 $\sqrt{a-1\,999}+|1\,998-a|=a$，那么 $a-1\,998^2=$_____.

8. 若 $0<a<1$，化简 $\sqrt{a^2+\dfrac{1}{a^2}-2}\div\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\times\dfrac{1}{1+a}$ 后的结果是_____.

9. 已知实数 a 满足 $a+\sqrt{a^2}+\sqrt[3]{a^3}=0$，那么 $|a-1|+|a+1|=$_____.

10. 化简 $(\sqrt{14}+\sqrt{13})^{1\,999}\cdot(\sqrt{13}-\sqrt{14})^{2\,001}=$_____.

11. 设 $a=\sqrt{1\,003}+\sqrt{997}$，$b=\sqrt{1\,001}+\sqrt{999}$，$c=2\sqrt{1\,001}$，用“>”连结 a、b、c 是_____.

三、计算题

12. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$.

13. $\dfrac{\sqrt{5}+3\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

14. $\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}+\dfrac{6-2\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2-\sqrt{10}}$.

四、解答题

15. 设 $\dfrac{\sqrt{13}+3}{\sqrt{13}-3}$ 的整数部分是 m，小数部分是 n，求 $198m+9n+n^2$ 的值.

16. 求不超过 $(\sqrt{7}+\sqrt{5})^6$ 的值的最大整数.

17. a，b 是实数，$(\sqrt{1+a^2}+a)(\sqrt{1+b^2}+b)=1$，推导出 a、b 之间的关系.

五、证明题

18. a 是大于 -1 的实数，n 是正整数. 求证：

$$\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}}+\frac{1}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a+3}}+\cdots$$
$$+\frac{1}{\sqrt{a+n-2}+\sqrt{a+n-1}}+\frac{1}{\sqrt{a+n-1}+\sqrt{a+n}}=$$
$$\sqrt{a+n}-\sqrt{a+1}.$$

第十讲　复合二次根式

知识要点和基本方法

一般地，我们把二次根式中套叠着二次根式的式子叫做复合二次根式. 如 $\sqrt{6+7\sqrt{a}}$，$\sqrt{5a-\sqrt{x}}$，$\sqrt{a-\sqrt{b+3\sqrt{c}}}$ 都是复合二次根式.

把复合二次根式化简需要灵活运用二次根式的性质和运算法则. 基本方法有三种：

1. 平方法. 先将复合二次根式平方并化简，再将结果开方，求得原式的值.

2. 配方法. 如将 $\sqrt{a+2\sqrt{b}}$ 中 $a+2\sqrt{b}$ 能配成 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2(x>0, y>0, x>y)$，这样就可以把原复合二次根式化为 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$. 此时，应有 $x+y=a$，$xy=b$. 由此可求得

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2},\ y=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

这里 x、y 右边的式子通常能化简.

于是 $\sqrt{a+2\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}}$.

3. 待定系数法. 先根据复合二次根式的特点，假设原式能化为几个简单二次根式的和或差，再通过平方、化简，比较系数求出结果.

例题精讲

例1 已知 $a > \sqrt{2}b > 0$，化简

$$\sqrt{2a^2 - b^2 + 2a\sqrt{a^2 - b^2}} - \sqrt{a^2 - 2b\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

分析 因为 $2a^2 - b^2 = a^2 + (\sqrt{a^2 - b^2})^2$，$a^2 = a^2 - b^2 + b^2 = (\sqrt{a^2 - b^2})^2 + b^2$，这样，题中两个复合二次根式都可通过配凑完全平方式化简.

解
$$\begin{aligned}
&\sqrt{2a^2 - b^2 + 2a\sqrt{a^2 - b^2}} - \sqrt{a^2 - 2b\sqrt{a^2 - b^2}} \\
&= \sqrt{a^2 + 2a\sqrt{a^2 - b^2} + (\sqrt{a^2 - b^2})^2} \\
&\quad - \sqrt{b^2 - 2b\sqrt{a^2 - b^2} + (\sqrt{a^2 - b^2})^2} \\
&= \sqrt{(a + \sqrt{a^2 - b^2})^2} - \sqrt{(b - \sqrt{a^2 - b^2})^2} \\
&= |a + \sqrt{a^2 - b^2}| - |b - \sqrt{a^2 - b^2}|.
\end{aligned}$$

因为 $a > \sqrt{2}b > 0$，故 $a^2 > 2b^2$，$a^2 - b^2 > b^2$，$\sqrt{a^2 - b^2} > b$，于是

$$\begin{aligned}
&|a + \sqrt{a^2 - b^2}| - |b - \sqrt{a^2 - b^2}| \\
&= a + \sqrt{a^2 - b^2} - (\sqrt{a^2 - b^2} - b) \\
&= a + b,
\end{aligned}$$

即原式化简结果为 $a + b$.

例2 化简 $\sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}} - 2\sqrt{3 - \sqrt{5}}$.

解 因为 $\sqrt{4 + \sqrt{15}} = \sqrt{\dfrac{8 + 2\sqrt{15}}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}},$$

又 $\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}$,

$\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$.

所以 $\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}-2\sqrt{3-\sqrt{5}}$

$=\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}-2\sqrt{\frac{5}{2}}+2\sqrt{\frac{1}{2}}$

$=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

例 3 计算 $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

解 因为 $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=2+\sqrt{3}+2\sqrt{4-3}+2-\sqrt{3}=6$.

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2=8.$$

所以 $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

$=\sqrt{6}-\sqrt{8}$

$=\sqrt{6}-2\sqrt{2}$.

说明 本题式中前两个根式内的被开方式 $2+\sqrt{3}$ 与 $2-\sqrt{3}$ 是互为有理化因式，后两个根式内的被开方式 $3+2\sqrt{2}$ 与 $3-2\sqrt{2}$ 也是互为有理化因式，故采用“平方法”求解较为简便. 也可用配方法求解.

例 4 化简 $M=\sqrt{8+\sqrt{40+8\sqrt{5}}}+\sqrt{8-\sqrt{40+8\sqrt{5}}}$.

解 因为 $M^2=8+\sqrt{40+8\sqrt{5}}+2\sqrt{64-(40+8\sqrt{5})}+8-\sqrt{40-8\sqrt{5}}=16+2\sqrt{24-8\sqrt{5}}=16+4\sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

又 $\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{5}-1$.

故 $M^2=16+4(\sqrt{5}-1)=12+4\sqrt{5}$.

由于 $M>0$，所以

$$\begin{aligned}M&=\sqrt{12+4\sqrt{5}}=\sqrt{12+2\sqrt{20}}\\&=\sqrt{(\sqrt{10})^2+2\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}\\&=\sqrt{(\sqrt{10}+\sqrt{2})^2}\\&=\sqrt{10}+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

例 5 化简 $\sqrt{11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})}$.

分析 式内被开方式 $11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})=13+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}+2\sqrt{35}$，它难以配成两个式子和的完全平方，但其中有三个不同的根式 $\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{35}$，它们的系数都是 2，似乎可看作 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ 形式的式子平方所得的结果，于是不妨用“待定系数法”试一试.

解 设 $\sqrt{11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$，两边平方得

$$\begin{aligned}&13+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}+2\sqrt{35}\\&=(x+y+z)+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}.\end{aligned}$$

比较系数，得

$$\begin{cases}x+y+z=13, & ①\\ xy=5, & ②\\ xz=7, & ③\\ yz=35. & ④\end{cases}$$

由②得 $x=\dfrac{5}{y}$.

代入③得 $z=\dfrac{7}{5}y$.

代入④得 $$\frac{7}{5}y^2 = 35,$$

故 $$y = 5.\ (y = -5\text{ 不合要求，舍去})$$

从而 $$x = 1,\ z = 7.$$

所以 $$\sqrt{11 + 2(1 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{7})} = 1 + \sqrt{5} + \sqrt{7}.$$

例 6 设 $\sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$ 的整数部分为 x，小数部分为 y. 求 $x + y + \frac{1}{y}$ 的值.

分析 为求复合二次根式的整数部分和小数部分，应先将其化简. 因为 $19 - 8\sqrt{3} = 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = (4 - \sqrt{3})^2$，从而可将 $\sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$ 化简.

解 因为

$$\sqrt{19 - 8\sqrt{3}} = \sqrt{(4 - \sqrt{3})^2} = 4 - \sqrt{3},\ 1 < \sqrt{3} < 2.$$

所以 $$x = 2,\ y = 2 - \sqrt{3}.$$

从而 $$x + y + \frac{1}{y} = 2 + 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

$$= 4 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 6.$$

例 7 求满足 $\sqrt{\frac{21}{4} + 3\sqrt{3}} = x + \sqrt{y}$ 的有序有理数对 (x, y).

解 $$\sqrt{\frac{21}{4} + 3\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{21 + 12\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{12 + 2 \cdot \sqrt{12} \cdot 3 + 9}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{12} + 3)^2}$$

$$= \frac{3}{2} + \sqrt{3}.$$

于是 $\frac{3}{2} + \sqrt{3} = x + \sqrt{y}$.

即 $\left(\frac{3}{2}-x\right)+(\sqrt{3}-\sqrt{y})=0.$

由于 x，y 是有理数，$\sqrt{3}$ 是无理数，所以必须有 $\frac{3}{2}-x=0$，$\sqrt{3}-\sqrt{y}=0.$

解之得 $x=\frac{3}{2}$，$y=3.$

故所求有理数对是 $\left(\frac{3}{2},3\right)$.

练　习　题

A　组

一、化简下列各式

1. $\sqrt{27+10\sqrt{2}}$.

2. $\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

3. $\sqrt{16+2(1+\sqrt{5})(1+2\sqrt{3})}$.

4. $\sqrt{7-\sqrt{15}-\sqrt{16-2\sqrt{15}}}$.

二、解答题

5. 已知 $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ 的整数部分为 a，小数部分为 b，求 $ab+\frac{2}{b}$ 的值.

6. 设正整数 a、m、n 满足 $\sqrt{a^2-4\sqrt{2}}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$. 求 a、m、n 的值.

B 组

三、化简

7. $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

8. $\sqrt{21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15}}$.

9. $\sqrt{9-2\sqrt{23-6\sqrt{10+4\sqrt{3-2\sqrt{2}}}}}$.

四、证明题

10. 求证：$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

测 试 题

一、比较下列各组中两个式子值的大小

1. $\sqrt{8-\sqrt{28}}$ 与 $\sqrt{6-\sqrt{20}}$.

2. $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$ 与 $\sqrt{11}$.

3. $\sqrt{4-\sqrt{15}}+\sqrt{6-\sqrt{35}}$ 与 $\sqrt{5-\sqrt{21}}$.

二、化简下列各式

4. $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$.

5. $\sqrt{8+2\sqrt{15}}+\sqrt{8-2\sqrt{15}}$.

6. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

三、解答题

7. 已知 $x=\sqrt{5+\sqrt{5}}$，$y=\sqrt{5-\sqrt{5}}$，求 x^6+y^6 的值.

8. 设 $\sqrt{39-\sqrt{432}}$ 的整数部分为 a，小数部分为 b，求 $\frac{11}{a+b}+\frac{11}{a-b+4}$ 的值.

9. 设 a 为 $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$ 的小数部分，b 为 $\sqrt{6+3\sqrt{3}}-\sqrt{6-3\sqrt{3}}$ 的小数部分，求 $\frac{2}{b}-\frac{1}{a}+\sqrt{2}$ 的值.

10. 求满足条件 $\sqrt{a-2\sqrt{6}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 的自然数 a、x、y.

第十一讲　代数式的求值

知识要点和基本方法

用加、减、乘、除、乘方、开方符号把数或表示数的字母连结而成的式子，叫做代数式，它包括有理式和无理式，有理式又包括整式和分式.

本讲主要讨论在已知字母的值或有限制条件下的代数式的求值问题. 为了求出代数式的值，有时先要把已知数据化简，或把限制条件进行变形，再作整体代入；有时先要把待求值的式子化简或变形；有时要对条件和待求式子都作变形.

例题精讲

例 1　已知 $x = 4 - \sqrt{3}$，求 $\dfrac{x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 18x + 23}{x^2 - 8x + 15}$ 的值.

解　由已知得 $(x-4)^2 = 3$，即 $x^2 - 8x + 13 = 0$. 所以

$$\begin{aligned}&\frac{x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 18x + 23}{x^2 - 8x + 15}\\ =&\frac{x^2(x^2-8x+13)+2x(x^2-8x+13)+(x^2-8x+13)+10}{(x^2-8x+13)+2}\\ =&\frac{10}{2} = 5.\end{aligned}$$

例 2　已知 $x = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$，$y = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$，

求 $\dfrac{2\sqrt{10(x+y)} - 3\sqrt{xy}}{3x^2 - 5xy + 3y^2}$ 的值.

分析 已知 x、y 的值正好互为倒数，待求值的式子可用 $x+y$，xy 表示，于是关键是求出 $x+y$ 和 xy 的值，而不必直接将 x、y 的值代入.

解 由已知得 $x+y=10$，$xy=1$，

所以
$$\frac{2\sqrt{10(x+y)}-3\sqrt{xy}}{3x^2-5xy+3y^2}$$
$$=\frac{2\sqrt{100}-3}{3(x+y)^2-11xy}$$
$$=\frac{17}{300-11}=\frac{1}{17}.$$

例3 已知 $a^2-3a+1=0$，求 $2a^2-5a-2+\frac{3}{1+a^2}$ 的值.

解 由已知得 $a^2-3a=-1$，$a^2+1=3a$，两边都除以 a（$a\neq 0$）得 $a+\frac{1}{a}=3$. 所以

$$2a^2-5a-2+\frac{3}{1+a^2}$$
$$=2(a^2-3a)+a-2+\frac{1}{a}$$
$$=-4+\left(a+\frac{1}{a}\right)$$
$$=-4+3=-1.$$

说明 根据待求值的式子特点对已知条件进行变化，再整体代入，这种方法能大大简化运算.

例4 设 $\frac{x}{x^2+x+1}=a$，$a\neq 0$，求 $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值.

分析 已知式和要求值的式子都是分母比分子复杂，不妨考察它们的倒数.

解 因为 $\frac{x}{x^2+x+1}=a$，$a\neq 0$，故

$$\frac{x^2+x+1}{x}=\frac{1}{a}，即\ x+\frac{1}{x}=\frac{1}{a}-1.$$

又
$$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+1$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1 = \left(\frac{1}{a} - 1\right)^2 - 1$$
$$= \frac{1 - 2a}{a^2},$$

所以
$$\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{a^2}{1 - 2a}.$$

例 5 若 $a + x^2 = 1991$，$b + x^2 = 1992$，$c + x^2 = 1993$，且 $abc = 24$，求 $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ 的值.

解 由条件得 $a - b = -1$，$b - c = -1$，$c - a = 2$. 于是

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$
$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab}{abc}$$
$$= \frac{(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (a^2 - 2ac + c^2)}{2abc}$$
$$= \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2}{2abc}$$
$$= \frac{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2}{48} = \frac{1}{8}.$$

例 6 设 $x > 0$，$y > 0$，已知 $\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2\sqrt{y}) = \sqrt{y}(6\sqrt{x} + 5\sqrt{y})$，求 $\frac{x + \sqrt{xy} - y}{2x + \sqrt{xy} + 3y}$ 的值.

解 由已知得 $(\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x}\sqrt{y} - 5(\sqrt{y})^2 = 0$，即

$$(\sqrt{x} - 5\sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 0.$$

因为 $x > 0$，$y > 0$，故 $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0$，从而

$$\sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 0,$$

即 $\sqrt{x} = 5\sqrt{y}$，两边平方得 $x = 25y$.

所以 $\frac{x + \sqrt{xy} - y}{2x + \sqrt{xy} + 3y} = \frac{25y + \sqrt{25y^2} - y}{50y + \sqrt{25y^2} + 3y} = \frac{29y}{58y} = \frac{1}{2}$.

例 7 已知 a、b、c 为非零实数，且 $\frac{a + b - c}{c} = \frac{a - b + c}{b} = \frac{-a + b + c}{a}$. 求 $\frac{(a + b)(b + c)(c + a)}{abc}$ 的值.

解 设 $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}=k$，则 $a+b=(k+1)c$，$a+c=(k+1)b$，$b+c=(k+1)a$，三式相加得

$$2(a+b+c)=(k+1)(a+b+c).$$

从而 $k+1=2$，或 $a+b+c=0$.

当 $k+1=2$，即 $k=1$ 时，

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{2c\cdot 2a\cdot 2b}{abc}=8.$$

当 $a+b+c=0$ 时，$a+b=-c$，$b+c=-a$，$c+a=-b$，于是

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{(-c)\cdot(-a)\cdot(-b)}{abc}=-1.$$

说明 遇到分式连等式，常设其值为一字母 k，再利用等式的性质变形.

例 8 设 $1995x^3=1996y^3=1997z^3$，$xyz>0$，且 $\sqrt[3]{1995x^2+1996y^2+1997z^2}=\sqrt[3]{1995}+\sqrt[3]{1996}+\sqrt[3]{1997}$. 求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

解 设 $1995x^3=1996y^3=1997z^3=k$，显然 $k\neq 0$. 于是

$$1995=\frac{k}{x^3},\ 1996=\frac{k}{y^3},\ 1997=\frac{k}{z^3}.$$

代入已知式得

$$\sqrt[3]{\frac{k}{x}+\frac{k}{y}+\frac{k}{z}}=\sqrt[3]{\frac{k}{x^3}}+\sqrt[3]{\frac{k}{y^3}}+\sqrt[3]{\frac{k}{z^3}},$$

即 $$\sqrt[3]{k}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\sqrt[3]{k}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right),$$

由 $k\neq 0$ 和 $xyz>0$，可知 $x>0$，$y>0$，$z>0$，

所以 $$\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z},$$

两边立方，并注意到 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>0$，可得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

例 9 已知非零实数 a、b、c 满足 $a^2+b^2+c^2=1$，$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3$，求 $a+b+c$ 的值.

解 因为 $abc\neq 0$，在已知的第二个等式两边同乘以 abc，得

$$a^2(c+b)+b^2(c+a)+c^2(b+a)=-3abc,$$

即 $$ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)+3abc=0,$$

将 $3abc$ 拆开为 $abc+abc+abc$，可得

$$ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ac(a+b+c)=0,$$

于是 $$(a+b+c)(ab+bc+ac)=0.$$

所以 $$a+b+c=0,\text{或 } ab+bc+ac=0.$$

若 $ab+bc+ac=0$，由

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=1$ 得

$$a+b+c=\pm 1.$$

所以 $a+b+c$ 的值可能为 0，-1，1.

练　习　题

A　组

一、选择题

1. 已知 $a=2-\sqrt{3}$，那么 $\frac{a^2-1}{a+1}-\frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$ 的值等于(　　).

(A) -1　　(B) $2-\sqrt{3}$　　(C) 3　　(D) $-1-2\sqrt{3}$

2. 已知 $x^2-5x-1991=0$，则 $\frac{(x-2)^4+(x-1)^2-1}{(x-1)(x-2)}$ 的值为(　　).

(A) 1 997　　(B) 1 998　　(C) 1 999　(D) 2 000

3. 若实数 a、b 满足 $4a^2-4a+1+\sqrt{1-ab}=0$，则 $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^3}{\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)^2}$ 等于(　　).

(A) $\dfrac{125}{18}$　　(B) $\dfrac{5}{3}$　　(C) $\dfrac{25}{9}$　　(D) $-\dfrac{5}{2}$

4. 已知 $\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{5}$，则 $\dfrac{2a+b-c}{a-b+c}$ 的值是(　　).

(A) 1　　(B) 3　　(C) $\dfrac{21}{9}$　　(D) $\dfrac{3}{11}$

5. 若 $x+\dfrac{1}{y}=1$，$y+\dfrac{1}{z}=1$，则 xyz 的值是(　　).

(A) 1　　(B) -1　　(C) ±1　　(D) ±2

二、填空题

6. 若 $a=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$，$b=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$，则 $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}=$_____.

7. 已知 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=4$，则 $\dfrac{a-2ab-b}{2a+7ab-2b}$ 的值是_____.

8. 已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=8$，则 $\dfrac{x^2+1}{x}=$_____.

9. 已知 $a^2-a+1=0$. 则 $a^{1\,995}+\dfrac{1}{a^{1\,995}}=$_____.

10. 如果 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{y+z}=\dfrac{3}{z+x}$，那么 $\dfrac{z}{x+y}=$_____.

三、解答题

11. 已知 $x=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$，求 $2x^2-3xy+2y^2$ 的值.

12. 若实数 a、b 满足 $ab\neq0$，且 $(a^2+b^2)^3=(a^3+b^3)^2+8a^3b^3$，

求$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$的值.

13. x、y、z为实数,且$x+y+z\neq 0$,设$\frac{x}{y+z}=a$,$\frac{y}{z+x}=b$,$\frac{z}{x+y}=c$,求$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}$的值.

14. 已知$m>0$,$n>0$,且$\sqrt{m}\cdot(\sqrt{m}+\sqrt{n})=3\sqrt{n}\cdot(\sqrt{m}+5\sqrt{n})$,求$\frac{8m-\sqrt{mn}+3n}{2m+3\sqrt{mn}+n}$的值.

B 组

四、解答题

15. 已知$2x=\sqrt{2-\sqrt{3}}$,试求$S=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$的值.

16. 已知$x^2+\sqrt{2}y=\sqrt{3}$,$y^2+\sqrt{2}x=\sqrt{3}$,且$x\neq y$,求$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$的值.

17. 设a、b、c均不为0,且$a+b+c=1998$,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{1998}$. 求证:$a$、$b$、$c$中至少有一个等于1998.

测 试 题

一、选择题

1. 已知$\frac{xy}{x-y}=-\frac{1}{3}$,则$\frac{2x+3xy-2y}{x-y-2xy}$的值为(　　).

(A) $-\frac{5}{3}$　　(B) $\frac{5}{3}$　　(C) $-\frac{3}{5}$　　(D) $\frac{3}{5}$

2. 设等式$\sqrt{a(x-a)}+\sqrt{a(y-a)}=\sqrt{x-a}-\sqrt{a-y}$在

实数范围内成立，其中 a、x、y 是两两不同的实数，则 $\dfrac{3x^2+xy-y^2}{x^2-xy+y^2}$ 的值是(　　).

(A) 3　　(B) $\dfrac{1}{3}$　　(C) 2　　(D) $\dfrac{5}{3}$

3. 若 $|ab+2|+|a+1|=0$，则 $\dfrac{1}{(a-1)(b+1)}+\dfrac{1}{(a-2)(b+2)}+\cdots+\dfrac{1}{(a-1\,999)(b+1\,999)}$ 等于(　　).

(A) $-\dfrac{1\,999}{4\,002}$　　(B) $-\dfrac{999}{2\,000}$　　(C) $-\dfrac{1}{1\,999}$　　(D) $-\dfrac{1\,997}{3\,998}$

4. 当 $x=\dfrac{1+\sqrt{1\,994}}{2}$ 时，多项式 $(4x^3-1997x-1994)^{2\,001}$ 的值为(　　).

(A) 1　　(B) -1　　(C) $2^{2\,001}$　　(D) $-2^{2\,001}$

二、填空题

5. 如果 $x=2-\sqrt{3}$，那么 $\dfrac{x^4-4x^3-x^2+9x-4}{x^2-4x+5}=$_____.

6. 若 $x+y=\sqrt{3\sqrt{5}-\sqrt{2}}$，$x-y=\sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$，则 $xy=$_____.

7. 已知实数 a、b、c 满足 $a+b+c=-1$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$，则 $a^2+b^2+c^2=$_____.

8. 已知 $x+y+z=0$，则 $x\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)+y\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)+z\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)+6=$_____.

三、解答题

9. 已知 $x-\dfrac{1}{x}=2$，求 $x^3-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{2}{x}-2x$ 的值.

10. 若 $\dfrac{xy}{x+y}=1$，$\dfrac{yz}{y+z}=2$，$\dfrac{xz}{x+z}=3$，求 x 的值.

11. 设 $x=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$，求 $x^4+y^4+(x+y)^4$ 的值.

12. 设 x、y、z 为实数，且

$$(y-z)^2+(x-y)^2+(z-x)^2$$
$$=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2.$$

求 $\dfrac{(yz+1)(zx+1)(xy+1)}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}$ 的值.

13. 设 $x=by+cz$，$y=cz+ax$，$z=ax+by$，求 $\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}$ 的值.

第十二讲　恒等式的证明

知识要点和基本方法

如果两个代数式 A 和 B，对于它们的变数字母在允许取值范围内的任意取值，它们都有相同的值，那么就说这两个代数式是恒等的. 一般记作 $A \equiv B$，有时也记作 $A = B$，这样的等式就称为恒等式. 而把一个代数式变成另一个与它恒等的代数式，就叫做代数式的恒等变形.

恒等式的证明，就是通过恒等变形，证明等号两边的代数式相等. 通常的证明方法有：(1)将左边转化为右边，或将右边转化为左边，一般是从复杂的一边化向简单的一边；(2)将两边都变形，化成同一个代数式；(3)证明：左边 $-$ 右边 $=0$，或 $\frac{\text{左边}}{\text{右边}}=1$，此时右边 $\neq 0$. 对有条件限制的恒等式证明，常要变更条件，并灵活运用条件，方能使等式得到证明.

例题精讲

例 1　求证 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(ab+\frac{1}{ab}\right)^2=4+\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(ab+\frac{1}{ab}\right)$.

证明　因为

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(ab+\frac{1}{ab}\right)^2$$
$$-\left[4+\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(ab+\frac{1}{ab}\right)\right]$$

$$= a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + 2 + \frac{1}{b^2} - 4$$
$$+ \left(ab + \frac{1}{ab}\right)\left[\left(ab + \frac{1}{ab}\right) - \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)\right]$$
$$= a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b^2} + \left(ab + \frac{1}{ab}\right)\left(-\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right)$$
$$= a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b^2} - b^2 - \frac{1}{a^2} - a^2 - \frac{1}{b^2}$$
$$= 0,$$

所以

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(ab + \frac{1}{ab}\right)^2$$
$$= 4 + \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)\left(c + \frac{1}{c}\right).$$

例 2 已知 $abc = 1$，求证：

$$\frac{a}{ab + a + 1} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{c}{ac + c + 1} = \frac{1}{abc}.$$

证明 因为 $abc = 1$，所以 a、b、c 都不等于 0. 于是

$$\text{左边} = \frac{a}{ab + a + 1} + \frac{b \cdot a}{abc + ab + a} + \frac{c \cdot ab}{ab \cdot ac + c \cdot ab + ab}$$
$$= \frac{a}{ab + a + 1} + \frac{ab}{ab + a + 1} + \frac{abc}{ab + a + 1}$$
$$= \frac{a + ab + 1}{ab + a + 1} = 1.$$

又显然，右边 $= 1$.

故原等式成立.

说明 本题可推广：若 $abcd = 1$，则

$$\frac{a}{abc + ab + a + 1} + \frac{b}{bcd + bc + b + 1} + \frac{c}{cda + cd + c + 1}$$
$$+ \frac{d}{dab + da + d + 1} = \frac{1}{abcd} = 1.$$

例 3 已知实数 a、b、c 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$. 求证：$\frac{1}{a^{2n-1}} + \frac{1}{b^{2n-1}} + \frac{1}{c^{2n-1}} = \frac{1}{a^{2n-1} + b^{2n-1} + c^{2n-1}}$，其中 n 是正整数.

证明 由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ 得

$$(bc+ac+ab)(a+b+c)=abc,$$

即 $$[c(a+b)+ab][(a+b)+c]=abc,$$

化简得 $$c(a+b)^2+ab(a+b)+c^2(a+b)=0,$$

即 $$(a+b)(ca+cb+ab+c^2)=0.$$

变形得 $$(a+b)(c+a)(c+b)=0.$$

所以 $$a+b=0,\text{或}\ c+a=0,\text{或}\ c+b=0.$$

即 $$a=-b,\text{或}\ c=-a,\text{或}\ c=-b.$$

由对称性不妨设 $a=-b$，于是 $a^{2n-1}=-b^{2n-1}$，所以

$$\frac{1}{a^{2n-1}}+\frac{1}{b^{2n-1}}+\frac{1}{c^{2n-1}}=\frac{1}{c^{2n-1}},$$

$$\frac{1}{a^{2n-1}+b^{2n-1}+c^{2n-1}}=\frac{1}{c^{2n-1}},$$

所以原等式成立.

例4 已知 $\frac{x}{a+2b+c}=\frac{y}{a-c}=\frac{z}{a-2b+c}$，且 a、b、c、x、y、z 均不为零.

求证：$\frac{a}{x+2y+z}=\frac{b}{x-z}=\frac{c}{x-2y+z}$.

证明 设 $\frac{x}{a+2b+c}=\frac{y}{a-c}=\frac{z}{a-2b+c}=k$，

则 $k\neq 0$，所以

$$x=(a+2b+c)k, \qquad ①$$

$$y=(a-c)k, \qquad ②$$

$$z=(a-2b+c)k. \qquad ③$$

① + 2 × ② + ③ 得

$$x+2y+z=4ak.$$

从而 $$\frac{a}{x+2y+z}=\frac{1}{4k}.$$

又 ① − ③ 得

$$x - z = 4bk,$$

故

$$\frac{b}{x - z} = \frac{1}{4k}.$$

① − 2 × ② + ③ 得

$$x - 2y + z = 4ck,$$

故

$$\frac{c}{x - 2y + z} = \frac{1}{4k}.$$

所以 $\frac{a}{x + 2y + z} = \frac{b}{x - z} = \frac{c}{x - 2y + z}$.

例 5 已知 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$，$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. 求证：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

分析 题中已知等式和要求证明的等式中都有分式 $\frac{x}{a}$、$\frac{y}{b}$、$\frac{z}{c}$ 或其倒数，为使运算简便，不妨作变量代换：$\frac{x}{a} = u$，$\frac{y}{b} = v$，$\frac{z}{c} = w$.

证明 设 $\frac{x}{a} = u$，$\frac{y}{b} = v$，$\frac{z}{c} = w$，则条件变为

$$u + v + w = 1,\ \frac{vw + uw + uv}{uvw} = 0.$$

即

$$(u + v + w)^2 = 1,\ uv + uw + vw = 0.$$

于是

$$\begin{aligned} & u^2 + v^2 + w^2 \\ &= (u + v + w)^2 - 2(uv + uw + vw) \\ &= 1, \end{aligned}$$

即

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

例 6 已知 $(x + \sqrt{x^2 + a})(y + \sqrt{y^2 + b}) = c^2$. ①

$$z = x\sqrt{y^2 + b} + y\sqrt{x^2 + a}. \quad ②$$

求证：$c^4 - ab = 2c^2 z$.

证明 将①左边展开得

$$xy + x\sqrt{y^2+b} + y\sqrt{x^2+a} + \sqrt{(x^2+a)(y^2+b)} = c^2.$$

用②代入得

$$z + xy + \sqrt{(x^2+a)(y^2+b)} = c^2,$$

从而 $$c^2 - z = xy + \sqrt{(x^2+a)(y^2+b)},$$

两边平方，得

$$c^4 - 2c^2z + z^2 = x^2y^2 + 2xy\sqrt{(x^2+a)(y^2+b)} + (x^2y^2 + ay^2 + bx^2 + ab). \quad ③$$

又②两边平方，得

$$z^2 = x^2(y^2+b) + 2xy\sqrt{(x^2+a)(y^2+b)} + y^2(x^2+a). \quad ④$$

③ − ④，得 $$c^4 - 2c^2z = ab,$$

即 $$c^4 - ab = 2c^2z.$$

例7 已知 $ax^3 = by^3 = cz^3$，且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. 求证：$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.

证明 设 $ax^3 = by^3 = cz^3 = t^3$，则

$$a = \frac{t^3}{x^3},\ b = \frac{t^3}{y^3},\ c = \frac{t^3}{z^3}.$$

所以 $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = t\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = t.$

又 $$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{ax^3 \cdot \frac{1}{x} + by^3 \cdot \frac{1}{y} + cz^3 \cdot \frac{1}{z}}$$

$$= \sqrt[3]{t^3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} = t.$$

从而 $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.

说明 如令 $\sqrt[3]{a} = p$，$\sqrt[3]{b} = q$，$\sqrt[3]{c} = r$，条件变为 $px = qy = rz$，也可证得等式两边都等于 px.

练　习　题

A　组

一、证明题

1. 求证：$\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\frac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}=\frac{b+c+d}{a(a+b+c+d)}$.

2. 求证：$\left(\frac{1}{a^2+2ab+b^2}-\frac{1}{a^2-2ab+b^2}\right)\div\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right)=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$.

3. 求证：$\left(\frac{1}{a-\sqrt{2}}-\frac{a^2+4}{a^3-2\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+1+\frac{\sqrt{2}}{a}\right)=\frac{1}{a}$.

4. 求证：$\frac{b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2}{b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2}\cdot\sqrt{\frac{b+2}{b-2}}=\frac{1-b}{1+b}$.

5. 已知 $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2$，$a$、$b$、$c$、$x$、$y$、$z$ 都是非零实数.

求证：$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

6. 已知 $x=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}-\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^3}-a}$. 求证：$x^3+3bx=2a$.

7. 已知 $x=\frac{a-b}{a+b}$，$y=\frac{b-c}{b+c}$，$z=\frac{c-a}{c+a}$，求证：$(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$.

8. 已知 $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$. 求证：$(x+y+z)^3=27xyz$.

B 组

9. 已知 x、y、z 为三个不相等的实数，且 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$. 求证：$x^2y^2z^2=1$.

10. 已知 $\frac{a}{bc-a^2}+\frac{b}{ac-b^2}+\frac{c}{ab-c^2}=0$. 求证：$\frac{a}{(bc-a^2)^2}+\frac{b}{(ac-b^2)^2}+\frac{c}{(ab-c^2)^2}=0$.

11. 已知 $\sqrt{x^2+x\sqrt[3]{xy^2}}+\sqrt{y^2+y\sqrt[3]{x^2y}}=a$，求证：$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$.

测 试 题

1. 求证：$1+\frac{1}{a}+\frac{a+1}{ab}+\frac{(a+1)(b+1)}{abc}+\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abcd}=\frac{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}{abcd}$.

2. 求证：$\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-9}+\cdots+\frac{20}{x^2-100}=\frac{11}{(x-1)(x+10)}+\frac{11}{(x-2)(x+9)}+\cdots+\frac{11}{(x-10)(x+1)}$.

3. 求证：$\frac{x}{ax-a^2}+\frac{y}{ay-a^2}+\frac{z}{az-a^2}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{y-a}+\frac{1}{z-a}+\frac{3}{a}$.

4. 求证：$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}=\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2$.

5. 已知 $\frac{A}{x}=\frac{B}{y}=\frac{C}{z}=\frac{D}{t}$，求证：

$$\sqrt{Ax}+\sqrt{By}+\sqrt{Cz}+\sqrt{Dt}=\sqrt{(A+B+C+D)(x+y+z+t)}.$$

6. 已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=3$. 求证：

$$\frac{a^2+c^2}{a+c}+\frac{b^2+d^2}{b+d}=\frac{(a+b)^2+(c+d)^2}{a+b+c+d}.$$

7. 已知 $a+b=1$，求证：

$$\frac{b}{a^3-1}-\frac{a}{b^3-1}=\frac{2(a-b)}{a^2b^2+3}.$$

8. 设 $m>0$，$n>0$，实数 a、b、c、d 满足 $a+b+c+d=m$，$ac=bd=n^2$. 求证：

$$\sqrt{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}=mn.$$

第十三讲　三角形的边和角

知识要点和基本方法

三角形是由三条线段首尾连接围成的封闭图形.它的任意两边之和大于第三边,由此可推出,任意两边之差小于第三边.边长都是整数的三角形,称为整边三角形.

三角形内角和是 180°,进而可得出,三角形的一个外角等于与它不相邻的两内角之和,大于任一个与它不相邻的内角.

方程(特别是不定方程)和不等式是解决整边三角形或内角度数是整数的三角形的常用工具.运用这一工具时,枚举法则是常用的方法,但要注意对求得的结果进行检验.

例题精讲

例 1　有多少个边长为整数且周长为 2 000 的等腰三角形?

解　设腰长为 x,底边长为 y,则

$$\begin{cases}2x+y=2\,000,\\2x>y.\end{cases}$$

从而 $2x<2x+y<4x$,即 $2x<2\,000<4x$, $500<x<1\,000$.

因为 x 是整数,所以 $x=501, 502, \cdots, 999$. 故满足条件的三角形个数有 $999-501+1=499$ 个.

说明　求整边三角形的边长(个数)常有下列几种情形:

1. 已知整边三角形的周长;

2. 已知三边满足一定的条件或某一边满足某一(些)条件.

解决这类问题,一般采取求出一边的取值范围后,再列举出各种情形.

例 2 已知 a, b, c 是正数,且任意两数之和不等于第三数,$\sqrt{(a+b+c)^2}+\sqrt{(a-b-c)^2}+\sqrt{(b-c-a)^2}+\sqrt{(c-a-b)^2}=2(a+b+c)$. 试问以 a,b,c 为边,能否构成一个三角形?

解 将已知等式化为 $|b+c-a|+|c+a-b|+|a+b-c|=a+b+c$. 观察此式知道,只有当 $b+c-a>0$, $c+a-b>0$, $a+b-c>0$ 同时成立时,该等式才能成立。因此,以 a, b, c 为边可以组成一个三角形.

说明 凡是联系三角形三边 a, b, c 的问题,要充分利用"任意两边之和大于第三边"或"任意两边之差小于第三边"这一隐含条件中所能列出的不等式.

例 3 设有一个边长为 1 的等边三角形,记作 A_1(如图 13-1). 将 A_1 的每条边三等分,在中间的线段上向图形外作等边三角形,去掉中间线段后所得到的图形记作 A_2(如图 13-2);将 A_2 的每条边三等分,并重复上述过程,所得到的图形记作 A_3(如图 13-3)……这样,可以得到一系列的图形,请计算图形 A_{1999}的周长.

图 13-1

图 13-2

图 13-3

解 A_1 的周长是 3,A_2 的周长是 $\frac{4}{3}\times 3$, A_3 的周长是 $\left(\frac{4}{3}\right)^2\times 3$,由此可推知 A_{1999}的周长是 $\left(\frac{4}{3}\right)^{1998}\times 3=\frac{4^{1998}}{3^{1997}}$.

说明 按题中的方法不断地做下去,得到的曲线叫科赫曲线,其形状与雪花的形状相似.

例 4 已知三角形的一边是另一边的 3 倍,求证:它的最小边在

它周长的$\frac{1}{8}$与$\frac{1}{6}$之间.

证明 设三角形三边为a,b,c,且$a=3b$.因为$c>a-b=2b$,所以b是最小的边.

又$a+b+c>3b+b+2b=6b$,则$b<\frac{1}{6}(a+b+c)$.

而$c<a+b=4b$,那么$a+b+c<3b+b+4b=8b$,即$\frac{1}{8}(a+b+c)<b$.

因此,最小边b介于周长的$\frac{1}{8}$与$\frac{1}{6}$之间.

例5 三角形的三个内角分别为α,β,γ,且$\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma,\alpha=2\gamma$.求$\beta$的取值范围.

解 因为$\alpha+\beta+\gamma=180°,\alpha=2\gamma$,则$3\gamma+\beta=180°,\gamma=\frac{180°-\beta}{3}\leqslant\beta$,解得$\beta\geqslant45°$.

又$2\gamma\geqslant\beta$,则$\gamma\geqslant\frac{\beta}{2}$,$3\gamma+\beta\geqslant\frac{5\beta}{2}$,即$180°\geqslant\frac{5}{2}\beta,\beta\leqslant72°$.所以$45°\leqslant\beta\leqslant72°$.

例6 设a、b、c是三角形的三条边长.求证:$\frac{b-c}{b^2c}+\frac{c-a}{c^2a}+\frac{a-b}{a^2b}\leqslant0$.

证明 由于$a^2b^2c^2>0$,因此所证不等式转化为只要证明$a^2c(b-c)+b^2a(c-a)+c^2b(a-b)\leqslant0$成立.也即只要证明$abc(a+b+c)-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\leqslant0$.利用基本不等式,得

$$a^2b^2+b^2c^2\geqslant2ab^2c,$$
$$b^2c^2+c^2a^2\geqslant2abc^2,$$
$$c^2a^2+a^2b^2\geqslant2a^2bc.$$

此三式相加,且不等式两边同时除以2,即得$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant abc(a+b+c)$,从而得证.

说明 本例证明用的是分析法,即假定要证的不等式成立,步步推出一个显而易见的成立的理由,就可以认定要证的不等式正确.

练　习　题

A　组

一、选择题

1. 下列不能构成三角形三边长的数组是(　　).

(A) $(1, \sqrt{3}, 2)$　　(B) $(\sqrt{199}, \sqrt{999}, \sqrt{1\,999})$

(C) $(3^2, 4^2, 5^2)$　　(D) $(4^2, 5^2, 6^2)$

2. 一个三角形的周长是个偶数,其中的两条边长分别是 4 和 1 997,则满足上述条件的三角形个数为(　　).

(A) 1 个　　(B) 3 个　　(C) 5 个　　(D) 7 个

3. 已知$\triangle ABC$ 有两边长为 a, b,其中 $a<b$,则其周长 l 一定满足(　　).

(A) $3a<l<3b$　　(B) $2b<l<2(a+b)$

(C) $2a+b<l<a+2b$　　(D) $2a<l<3b$

4. 锐角$\triangle ABC$ 的三个内角为 A、B、C,若 $\alpha=A+B$, $\beta=B+C$, $\gamma=C+A$,那么 α, β, γ 这三个角中(　　).

(A) 最多可有一个锐角

(B) 最多可有两个锐角

(C) 最多可有三个锐角

(D) 一定没有锐角

二、填空题

5. 已知三角形的三边长 a、b、c 都是整数,且 $a<b<c$,如果 $b=7$,那么这样的三角形共有____个.

6. 已知三角形的三边是 3、$1-2x$、4,则 x 的取值范围是____.

7. 如图 13-4 所示,DC 平分 $\angle ADB$, EC 平分 $\angle AEB$. 若 $\angle DAE=\alpha$, $\angle DBE=\beta$, 则$\angle DCE=$____(用 α, β 表示).

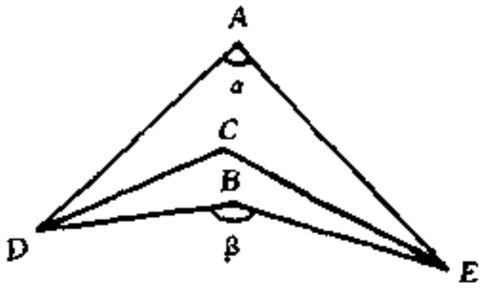


图 13-4

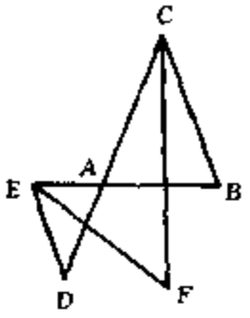


图 13-5

8. 如图 13-5 所示，E 和 D 分别在$\triangle ABC$ 的边 BA 和 CA 的延长线上，CF、EF 分别平分$\angle ACB$ 和$\angle AED$. 若 $\angle B = 70°$，$\angle D = 40°$，则$\angle F$ 的大小是____.

B 组

9. 不等边$\triangle ABC$ 的两条高的长度分别是 4 和 12，若第三条高及三边均为整数，求当第三条高取得最大值时，$\triangle ABC$ 周长的最小值.

10. 用长度相等的 100 根火柴杆，摆放成一个三角形，使最大边的长度是最小边长度的 3 倍. 求满足此条件的每个三角形的各边所用火柴杆的根数.

11. 已知三角形有一个内角是 $(180 - x)$ 度，最大角与最小角之差是 24°. 求 x 的取值范围.

测 试 题

一、选择题

1. $\triangle ABC$ 的每个内角都具有正整数的度数，$\angle A$ 不小于其余的两个角，$\angle C$ 不大于其余的两个角，已知 $\angle C = 30°$，那么$\angle A$ 的度数的最大值是(　　).

(A) 75°　　(B) 119°　　(C) 120°　　(D) 149°

2. $\triangle ABC$ 的三个内角 A、B、C 满足 $3A > 5B$，$3C \leqslant 2B$，则这个三角形是(　　).

(A) 钝角三角形　　(B) 直角三角形

(C) 锐角三角形　　(D) 非直角三角形

3. 把一根长 100 cm 的铁丝截成 n 小段 ($n \geqslant 3$)，每段不小于 10 cm. 若不论怎样的截法，总存在 3 小段，以它们为边可拼成一个三角形，则 n 的最小值是(　　).

(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

4. 如图 13-6 所示，C 是 $\angle BAD$ 内的一点，连 CB、CD，$\angle A = 80°$，$\angle B = 30°$，$\angle D = 40°$. 则 $\angle BCD$ 的度数是(　　).

(A) 120°　　(B) 130°

(C) 110°　　(D) 150°

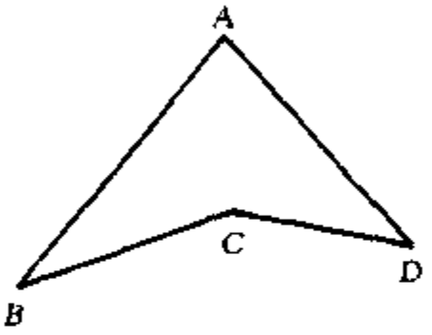


图 13-6

5. 不等边三角形中，如果一条边长等于另两条边长的平均值，那么，最大边上的高与最小边上的高的比值 k 的取值范围是(　　).

(A) $\frac{3}{4} < k < 1$　　(B) $1 < k < 3$

(C) $1 < k < 2$　　(D) $\frac{1}{2} < k < 1$

二、填空题

6. 三角形的最大角与最小角之比是 4∶1，则第三个内角 α 的取值范围是____.

7. 如图 13-7 所示，已知 $BG \parallel CE$，则 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F + \angle G$ 的度数是____.

8. 在 $\triangle ABC$ 中，三边长为 $a = 3$，$b = 4$，$c = 6$，h_a 表示 a 边上的高的长，h_b、h_c 的意义类似. 则 $(h_a + h_b + h_c) \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)$ 的值为____.

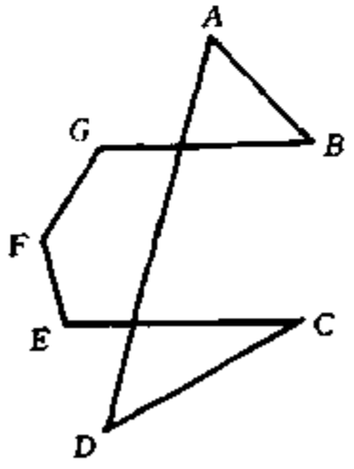


图 13-7

9. $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 是最小角，$\angle B$ 是最大角，且 $2\angle B = 5\angle A$，若 $\angle B$ 的最大值是 $m°$，最小值是 $n°$. 则 $m + n =$ ____.

10. 已知三角形两边的长的差是 5，若此三角形的周长为偶数，则第三边的最小值为_____.

三、解答题

11. 如图 13-8 所示，E 在 $\triangle ABC$ 的边 AC 上，D 在 BE 上.

(1) $AB + BC + CA$ 与 $2(DA + DB + DC)$ 哪一个大？证明你的结论；

(2) $AB + BC + CA$ 与 $DA + DB + DC$ 哪一个大？证明你的结论.

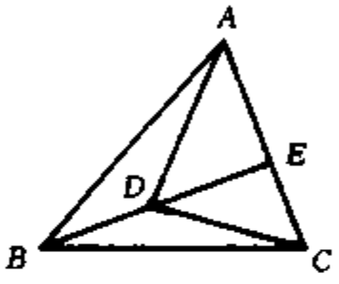


图 13-8

12. 在 $\triangle ABC$ 中，AD、BE 是两边 BC、AC 上的高，D、E 为垂足. 若 $CE + CD = AB$，试判断 $\angle C$ 为锐角、直角还是钝角，写出你判断的理由.

第十四讲　全等三角形

知识要点和基本方法

判定两个三角形全等的方法有：SAS、AAS、ASA、SSS. 两个直角三角形全等的判定方法，除了上述 4 种以外，还有 HL 方法.

两个全等三角形的对应边、对应角相等；对应边上的中线、高线相等；对应角的角平分线相等.

运用三角形全等，可以证明线段相等、角相等、两直线垂直等问题. 证题的基本思路是将要证明的问题，转化为证两个三角形全等，在要证的两个全等的三角形中，找出对应的边或角相等. 但在找全等的条件时，要注意添加适当的辅助线，而辅助线的添加可由图形特征及已知条件而决定.

例题精讲

例 1　如图 14-1 所示，已知 BD、CE 是 $\triangle ABC$ 的高，点 P 在 BD 的延长线上，$BP = AC$，点 Q 在 CE 上，$CQ = AB$. 试证：$AP = AQ$ 且 $AP \perp AQ$.

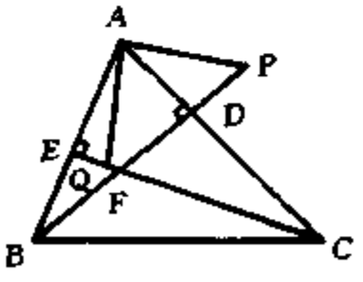


图 14-1

证明　因为 $BD \perp CA$，$CE \perp AB$，所以 $\angle BEF = \angle CDF = 90°$. 而 $\angle BFE = \angle CFD$，则 $\angle ABP = \angle QCA$.

又因为 $AB = QC$，$BP = CA$，所以 $\triangle ABP \cong \triangle QCA$，$AP = AQ$，$\angle AQC = \angle PAB$. 这时，$\angle AQC = \angle QEA + \angle QAE = 90° + \angle QAE$，$\angle PAB = \angle PAQ + \angle QAE$，则 $\angle PAQ = 90°$，即 $AP \perp AQ$.

例 2 如图 14-2 所示，在$\triangle ABC$中，$\angle A = 100°$，$\angle ABC = 40°$，BD是$\angle ABC$的平分线，延长BD至E，使$DE = AD$. 求证：$BC = AB + CE$.

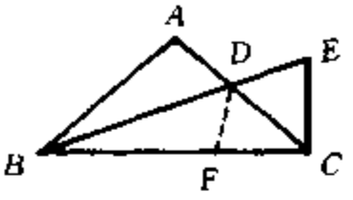


图 14-2

证明 在BC上截取$BF = AB$，连结DF.

由于BD平分$\angle ABC$，那么对$\triangle ABD$和$\triangle FBD$有$\angle ABD = \angle FBD$，$AB = BF$，BD公共，则$\triangle ABD \cong \triangle FBD$. 这时$\angle BFD = \angle A = 100°$，$AD = FD$. 因此，$DE = DF$，$\angle CFD = 80°$.

又$\angle ACF = 40°$，则$\angle CDF = 60°$. 而$\angle CDE = \angle ADB = 180° - 100° - 20° = 60°$，则$\angle CDF = \angle CDE$，$\triangle CDF \cong \triangle CDE$，$CE = CF$. 所以，$BC = AB + CE$.

说明 证线段间的和、差、倍关系时，经常采用将长线段分成几条线段之和或将短线段加长的办法，从而使要证的几条线段转化到一条线段上，构造全等三角形证之.

例 3 如图 14-3 所示的$\triangle ABC$中，D是BC的中点，$DE \perp DF$. 试判断$BE + CF$与EF的大小关系，并证明你的结论.

证明 延长FD到G，使$FD = DG$，连结BG、EG.

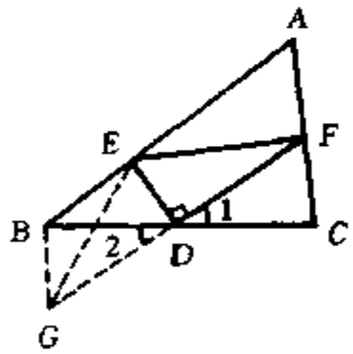


图 14-3

因为D是BC中点，则$CD = DB$. 又$\angle 1 = \angle 2$，所以，$\triangle CDF \cong \triangle BDG$，$CF = BG$.

而$DE \perp DF$，则$\angle EDF = \angle EDG = 90°$，$DE$是$\triangle DEF$和$\triangle DEG$的公共边，则$\triangle DEF \cong \triangle DEG$，$EF = EG$.

在$\triangle BEG$中，$BE + BG > EF$，因此，$BE + CF > EF$.

说明 证线段间的不等关系问题，往往构造全等三角形，将有关线段转化到同一三角形中.

例 4 如图 14-4 所示，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC = 100°$，$\angle C$的平分线交AB边于E，在AC边上取点D，使得$\angle CBD = 20°$，连结DE. 求$\angle CED$的度数.

解 过 E 作 $EF \perp CB$ 交其延长线于 F，$EG \perp BD$ 于 G，$EH \perp AD$ 于 H.

因为 $\angle ABC = 100°$，$\angle CBD = 20°$，则 $\angle EBF = \angle EBD = 80°$，所以 $EF = EG$.

又 EC 平分 $\angle ACB$，则 $EG = EH$，故 DE 是 $\angle ADB$ 的平分线.

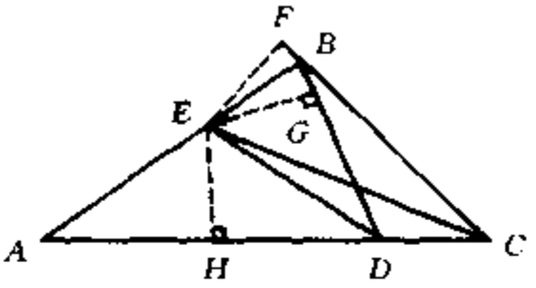


图 14-4

而 $\angle CED = \angle ADE - \angle DCE$

$= \frac{1}{2}\angle ADB - \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}(\angle DBC + \angle ACB) - \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\angle DBC = \frac{1}{2} \times 20° = 10°$. 所以，$\angle CED$ 的度数是 $10°$.

例 5 如图 14-5 所示，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle ACB = 90°$，D 是 AC 的中点，连结 BD，作 $\angle ADF = \angle CDB$，连结 CF 交 BD 于 E. 求证：$BD \perp CF$.

证明 过 A 作 $GA \perp AC$ 交 DF 的延长线于 G.

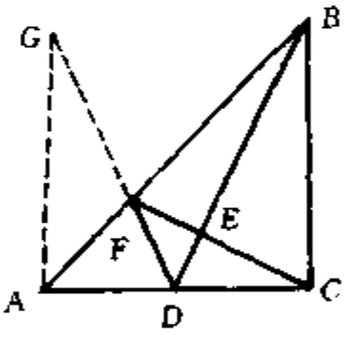


图 14-5

因为 $\angle GAD = \angle BCD = 90°$，$\angle ADG = \angle CDB$，$AD = CD$，所以 $\triangle ADG \cong \triangle CDB$，所以 $AG = BC$，$\angle G = \angle DBC$.

又 $AC = BC$，则 $AG = AC$. 而 $\angle GAF = \angle CAF = 45°$，$AF$ 是 $\triangle AGF$ 和 $\triangle ACF$ 的公共边，所以 $\triangle AGF \cong \triangle ACF$，$\angle G = \angle ACF$. 因此，$\angle ACF = \angle CBD$.

而 $\angle ACF + \angle BCF = 90°$，所以 $\angle BCF + \angle CBD = 90°$，则 $\angle BEC = 90°$，即 $BD \perp CF$.

例 6 在如图 14-6 所示的 $\triangle ABC$ 中，$AC = BC$，$\angle C = 90°$，点 M、N 分别是边 AC 和 BC 的中点，点 D 在射线 BM 上，且 $BD = 2BM$，点 E 在射线 NA 上，且 $NE = 2NA$. 求证：$BD \perp DE$.

证明 取 AD 中点 F，连结 EF.

由于 $AC = BC$，$CN = CM$，$\angle C$ 是 $\triangle ACN$ 和 $\triangle BCM$ 的公共角，则 $\triangle ACN \cong \triangle BCM$，$\angle 3 = \angle 6$.

又由 $BM = DM$, $CM = AM$, $\angle BMC = \angle AMD$, 那么 $\triangle BCM \cong \triangle DAM$, $\angle 2 = \angle 6$, $AD = BC$, 且 $AD \parallel BC$, $\angle 2 = \angle 3$.

而 $AE = AN$, $\angle 4 = \angle 5$, $AF = NC$, 则 $\triangle AEF \cong \triangle NAC$, $\angle EFA = \angle C = 90°$.

又 $AF = FD$, $\angle AFE = \angle DFE = 90°$, EF 是 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DEF$ 的公共边, 则 $\triangle AFE \cong \triangle DFE$, $\angle 5 = \angle 1$. 因此 $\angle 1 = \angle 4$. 而 $\angle 3 + \angle 4 = 90°$, 故 $\angle 1 + \angle 2 = 90°$, 即 $BD \perp DE$.

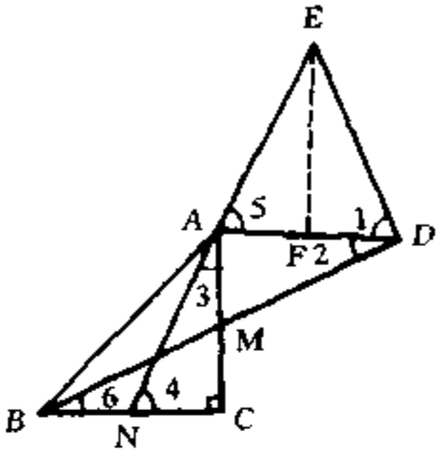


图 14-6

例 7 若两个三角形的两边和其中一边上的高分别对应相等, 试判断这两个三角形的第三边所对的角之间的关系, 并说明理由.

解 这两个三角形的第三边所对的角之间的关系是相等或互补.

(1) 当这两个三角形同是锐角、直角或钝角三角形时, 由 HL 方法可证出第三边所对的角相等.

(2) 当有一个是锐角三角形, 一个是钝角三角形时, 如图 14-7, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AD \perp BC$ 交 CB 的延长线于 D, $A'D' \perp B'C'$ 于 D', 且 $AD = A'D'$. 这时, 易知 $\mathrm{Rt}\triangle ABD \cong \mathrm{Rt}\triangle A'B'D'$, 那么 $\angle ABD = \angle B'$. 而 $\angle ABD + \angle ABC = 180°$, 即 $\angle ABC + \angle B' = 180°$.

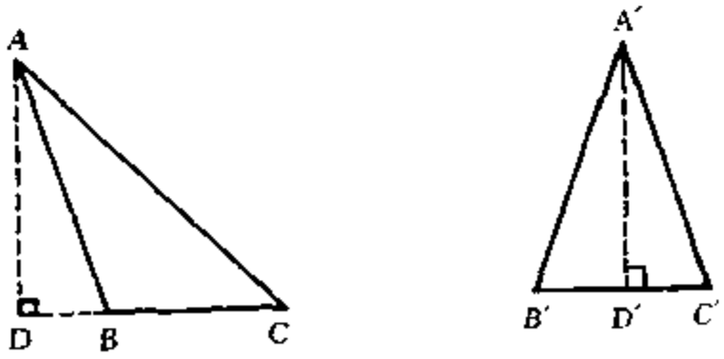


图 14-7

说明 分三角形的形状讨论, 才能完整地说清本题的道理.

练　习　题

A　组

一、选择题

1. 如图 14-8 所示，在 AB、AC 上各取一点 E、D，使 $AE = AD$，连接 BD、CE 相交于 O，再连结 AO、BC. 若 $\angle 1 = \angle 2$，则图中全等三角形共有(　　).

(A) 5 对　　(B) 6 对

(C) 7 对　　(D) 8 对

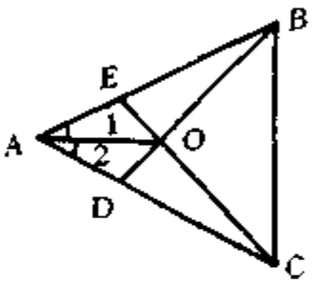


图 14-8

2. 下列关于全等三角形的判定命题：

(1) 一边上的中线、角平分线、高对应相等的两个三角形全等；

(2) 一边及另两边的中线对应相等的两个三角形全等；

(3) 一边与另一边的高及第三边的中线对应相等的两个三角形全等.

其中假命题的个数有(　　).

(A) 0 个　　(B) 1 个　　(C) 2 个　　(D) 3 个

3. 如图 14-9 所示，已知 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，$DE \perp AB$ 于 E，$DF \perp AC$ 于 F. 则下列结论中错误的是(　　).

(A) $AD \perp EF$　　(B) $DE = DF$

(C) $AE = AF$　　(D) $DE \perp DF$

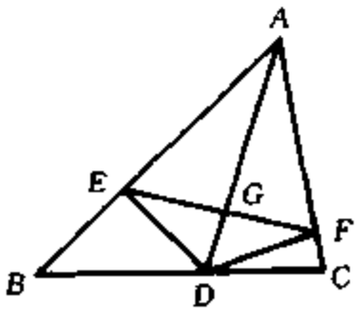


图 14-9

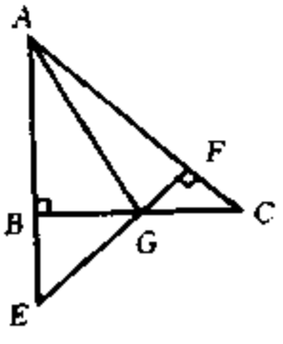


图 14-10

4. 在如图 14-10 所示的$\triangle ABC$中，$\angle ABC = 90°$，延长 AB 至 E，使 $AE = AC$，过 E 作 $EF \perp AC$ 于 F，EF 交 BC 于 G. 若 $\angle C = 40°$，则$\angle EAG$ 的度数是(　　).

(A) 25°　　(B) 20°　　(C) 30°　　(D) 35°

二、填空题

5. 如图 14-11 所示，Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$AD \perp AB$，$AD = AB$，$BE \perp DC$ 于 E，$AF \perp AC$ 交 EB 于 F，则$\angle ACF$ 的度数是____.

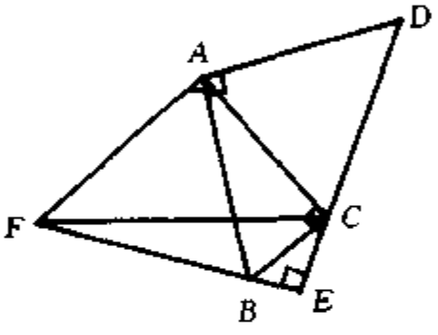


图 14-11

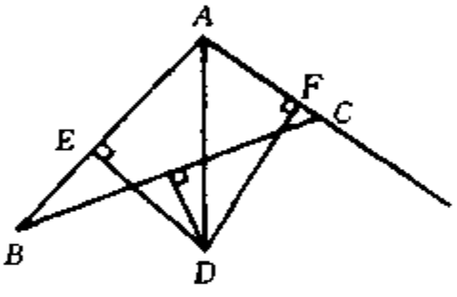


图 14-12

6. 如图 14-12 所示，$\triangle ABC$ 的边 $AB = 8$，$AC = 4$，$\angle A$ 的平分线与 BC 的垂直平分线交于 D 点，过 D 点的直线 $DE \perp AB$，$DF \perp AC$ (或 AC 的延长线)，那么 $AE =$ ____.

7. 如图 14-13 所示，$AB = AE$，$BD = EC$，$\angle BCA = 81°$，那么$\angle BDE$ 的度数是____.

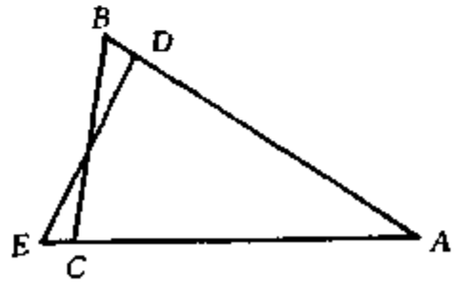


图 14-13

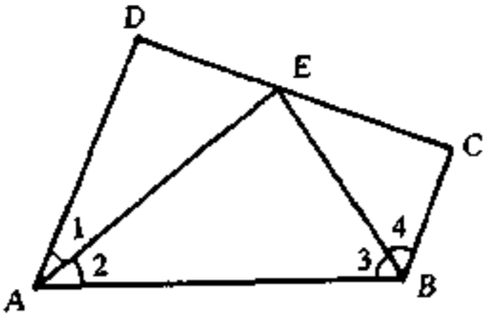


图 14-14

8. 如图 14-14 所示，$AD \parallel BC$，$\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$，$AD = 4$，$BC = 2$，那么 $AB =$ ____.

B　组

三、解答下列各题

9. 已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，$AB = A_1B_1$，$BC = B_1C_1$，$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = 110°$.

(1) 证明：$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$；

(2) 若将条件中的 $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = 110°$ 改为 $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = 50°$，$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ 是否成立？写出你的证明过程.

10. 如图 14-15 所示，$\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形，$\triangle BDC$ 是顶角 $\angle BDC = 120°$ 的等腰三角形，以 D 为顶点作一个 $60°$ 角，角的两边分别交 AB 于 M，交 AC 于 N，连结 MN，形成一个 $\triangle AMN$. 求 $\triangle AMN$ 的周长.

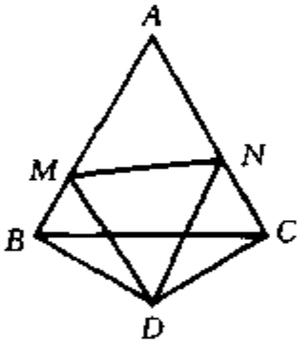


图 14-15

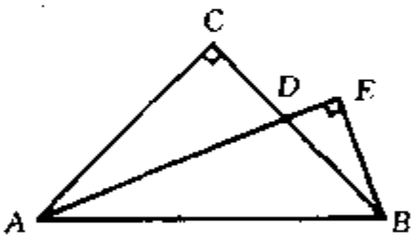


图 14-16

11. 如图 14-16 所示，已知 $AC = BC$，$\angle C = 90°$，$\angle A$ 的平分线交 BC 于 D，过 B 作 $BE \perp AD$ 于 E. 求证：$AD = 2BE$.

测　试　题

一、选择题

1. 下列命题正确的是(　　).

(A) 有两边和一角对应相等的两个三角形全等

(B) 有一边对应相等的两个等腰直角三角形全等

(C) 有一边对应相等的两个等边三角形全等

(D) 有一角对应相等的两个等腰三角形全等

2. 如图 14-17 所示是等边$\triangle ABC$，D、F 分别是 BC、AB 上的点，且 $BD = AF$，AD、CF 交于 E 点，则$\angle CED$ 的度数是(　　).

(A) 30°　　(B) 60°

(C) 45°　　(D) 75°

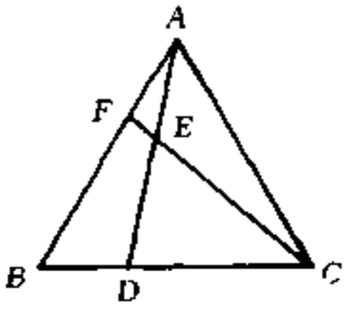


图 14-17

3. 如图 14-18 所示，$AB \parallel CD$，$AC \parallel DB$，AD 与 BC 交于 O，$AE \perp BC$ 于 E，$DF \perp BC$ 于 F，那么图中全等的三角形有(　　).

(A) 5 对　　(B) 6 对

(C) 7 对　　(D) 8 对

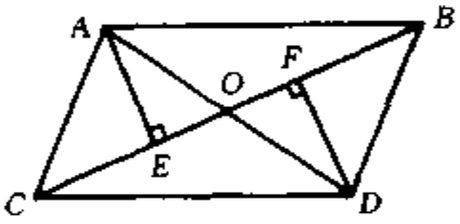


图 14-18

二、填空题

4. 如图 14-19 所示，$DA \perp AB$，$EA \perp AC$，$AB = AD$，$AC = AE$，BE 和 CD 相交于 O，则$\angle DOE$ 的度数是____.

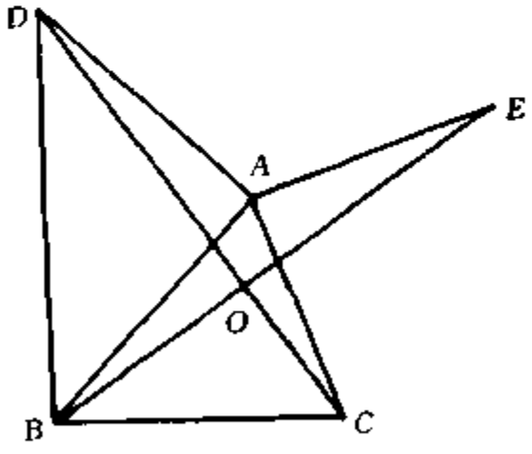


图 14-19

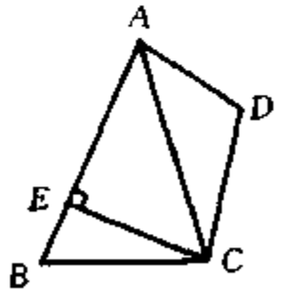


图 14-20

5. 如图 14-20 所示，在凸四边形 $ABCD$ 中，AC 平分$\angle BAD$，过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E，并且 $AE = \frac{1}{2}(AB + AD)$. 那么 $\angle ABC + \angle ADC$ 的度数是____.

6. 如图 14-21 所示，$\triangle ABC$ 中，D、E 分别是 AB、AC 的中点，延长 BE 到 G，使 $EG = BE$，延长 CD 到 F，使 $DF = CD$，连结 FA、AG，$BC = 15$，则点 F 与点 G 之间的距离是____.

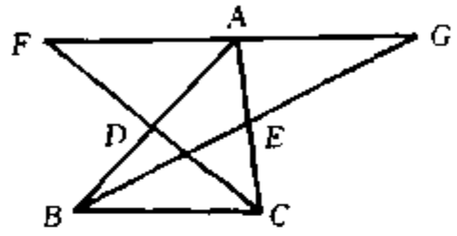


图 14-21

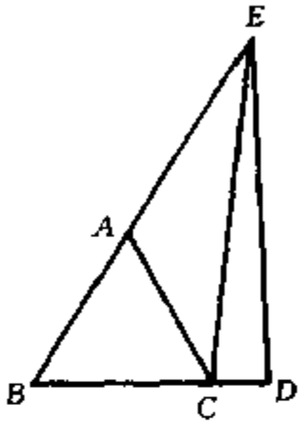


图 14-22

7. 如图 14-22 所示，已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，延长 BC 到 D，延长 BA 到 E，使 $AE = BD$，若 $CE = a$，则 $DE =$ ____.

三、解答题

8. 如图 14-23 所示，$AB = AD$，$BC = DC$，E、F 在 AC 上，AC 与 BD 相交于 P. 图中有几对全等三角形？请一一找出来，并简述全等的理由.

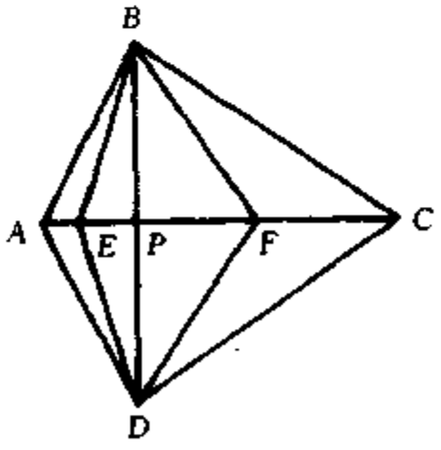


图 14-23

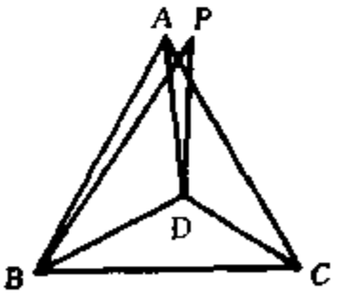


图 14-24

9. 如图 14-24 所示，D 为等边 $\triangle ABC$ 内一点，$DB = DA$，$BP = AB$，$\angle DBP = \angle DBC$，求 $\angle BPD$ 的度数.

第十五讲　等腰三角形

知识要点和基本方法

若按边(角)是否相等分类，两边(角)相等的三角形是等腰三角形. 等腰三角形是轴对称图形，由此可知，它的两底角相等，底边上的高、中线、顶角的平分线重合(简称三线合一)，这是等腰三角形最重要的性质. 等边三角形的三边相等，各内角均为 60°.

在要确定一个等腰三角形的边或角时，通常要讨论哪一条边可作为腰或底边，哪一个角可作为底角或顶角的问题.

解决等腰三角形中的问题，一般可运用全等三角形知识，但更多地是考虑运用等腰三角形的特殊性质. 比如，证线段或角相等，可将两线段或两角转化到同一三角形中，证角或边相等. 构造等腰三角形是证题中经常运用的方法.

例题精讲

例 1　已知 BD 是等腰 $\triangle ABC$ 一腰上的高，且 $\angle ABD = 50°$. 求 $\triangle ABC$ 的三内角的度数.

解　当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时，$\angle A$ 既可作顶角又可作底角. 当 $\angle A$ 作顶角时，见图 15-1，$\triangle ABC$ 的三内角分别为 140°、20°、20°；当 $\angle A$ 作底角时，见图 15-2，$\triangle ABC$ 三内角分别为 100°、40°、40°.

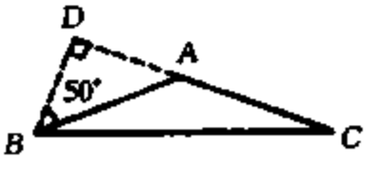


图 15-1

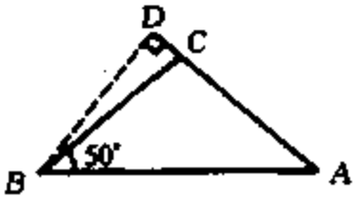


图 15-2

当$\triangle ABC$是锐角三角形时，$\angle A$只可能作顶角，见图15-3. $\triangle ABC$的三内角分别为40°、70°、70°.

因此，$\triangle ABC$三内角度数是140°、20°、20°或100°、40°、40°或40°、70°、70°.

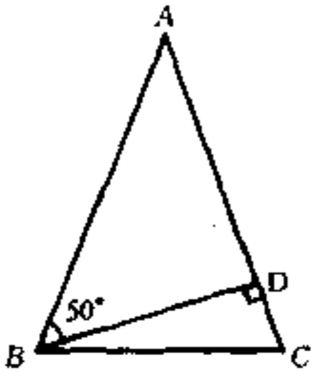


图15-3

说明 凡是联系到需作三角形高的题目，则要分别考虑三角形是锐角、直角或钝角三角形，才能确定高的位置.

等腰三角形中，若没有明确哪一条边是底或腰时，要分情况讨论，以便一个题的解答完整.

例2 如图15-4所示，已知$\triangle ABC$是等边三角形，E是AC延长线上的任意一点，选择一点D，使得$\triangle CDE$是等边三角形. 如果M是线段AD的中点，N是线段BE的中点. 求证：$\triangle CMN$是等边三角形.

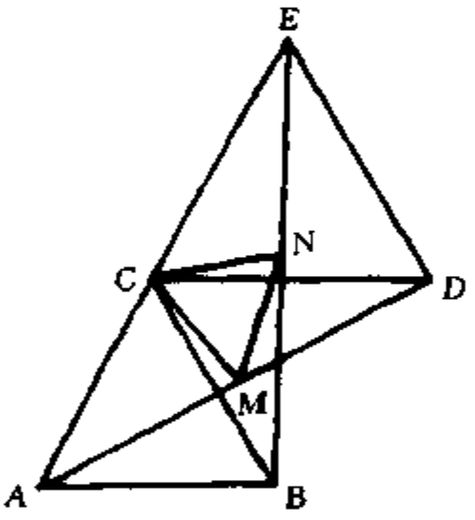


图15-4

证明 因为$\triangle ABC$和$\triangle CDE$都是等边三角形，则$AC = BC$，$\angle ACD = \angle BCE = 60° + \angle BCD$，$CD = CE$，所以$\triangle ACD \cong \triangle BCE$，$AD = BE$.

又M、N分别是AD、BE中点，则$AM = BN$.

而$\angle CAM = \angle CBN$，则$\triangle AMC \cong \triangle BNC$，$CM = CN$，$\angle ACM = \angle BCN$. 又因为$\angle NCM = \angle BCN - \angle BCM$，$\angle ACB = \angle ACM - \angle BCM = 60°$，即$\angle NCM = 60°$. 所以，$\triangle CMN$是等边三角形.

说明 等边三角形中，我们要思考其三边相等，每个内角是60°，实现线段或角之间相等关系的转化. 例2实际上是由教材《几何》第二册第115页第13题变化而成的.

例3 如图15-5所示，$\triangle ABC$内部有一点P，使$\angle PAB = 10°$，$\angle PBA = 20°$，$\angle PCA = 30°$，$\angle PAC = 40°$. 证明：$\triangle ABC$是等腰

三角形.

证明 作高 BD，又作 $\angle QAD = 30°$，AQ 同 BD 交于 Q，连 PQ. 这时，易算得 $\angle PBA = \angle PBQ = 20°$，$\angle PAB = \angle PAQ = 10°$，则 P 是 $\triangle ABQ$ 三内角平分线的交点，$\angle PQA = 60°$.

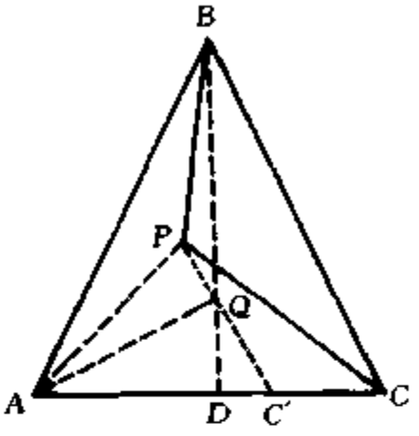


图 15-5

设 PQ 交 AC 于 C'，则 $\angle PC'A = \angle PQA - \angle QAC = 60° - 30° = 30° = \angle PCA$，故 C 与 C' 重合，从而 $QA = QC$，$BA = BC$，$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

说明 例 3 运用的是同一法，证明 C 与 C' 重合得出结论.

例 4 如图 15-6 所示，设 P 为等腰 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 斜边 AB 上的任意一点，PE 垂直 AC 于点 E，PF 垂直 BC 于点 F，PG 垂直 EF 于点 G，延长 GP 并在其延长线上取一点 D，使得 $PD = PC$. 试证 $BC \perp BD$，且 $BC = BD$.

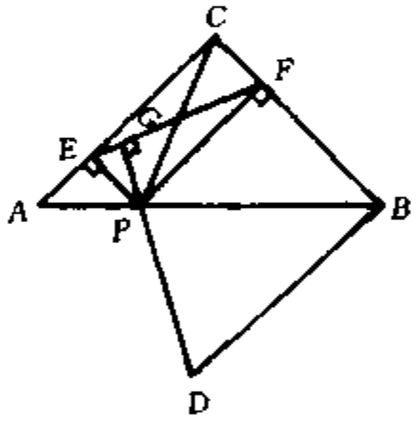


图 15-6

证明 由 $\angle ACB = 90°$，$PE \perp AC$，$PF \perp BC$ 知 $PE \perp PF$.

又 $PG \perp EF$，则 $\angle EPG = \angle EFP = \angle CPF$. 因此 $\angle DPB = \angle APG = 45° + \angle CPF = \angle BPF + \angle CPF = \angle BPC$.

而 $PC = PD$，PB 是 $\triangle PDB$ 和 $\triangle PCB$ 的公共边，所以 $\triangle PDB \cong \triangle PCB$，从而 $BC = BD$. 又 $\angle PBD = \angle CBP = 45°$，则 $\angle CBD = 90°$，即 $BC \perp BD$.

例 5 如图 15-7 所示，$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，AM 是 $\angle BAC$ 外角平分线. $BD \perp AC$ 于 D，延长 BD 交 AM 于 E；$CF \perp AB$ 于 F，延长 CF 交 MA 的延长线于 G. 求证：$DE = FG$.

证明 在 $\triangle BCF$ 和 $\triangle CBD$ 中，$\angle CBF = \angle BCD$，$\angle BFC = \angle CDB = 90°$，$BC$ 为公共边，则 $\triangle BCF \cong \triangle CBD$，$\angle 1 = \angle 2$，$BD = CF$. 所以，$\angle 3 = \angle 4$.

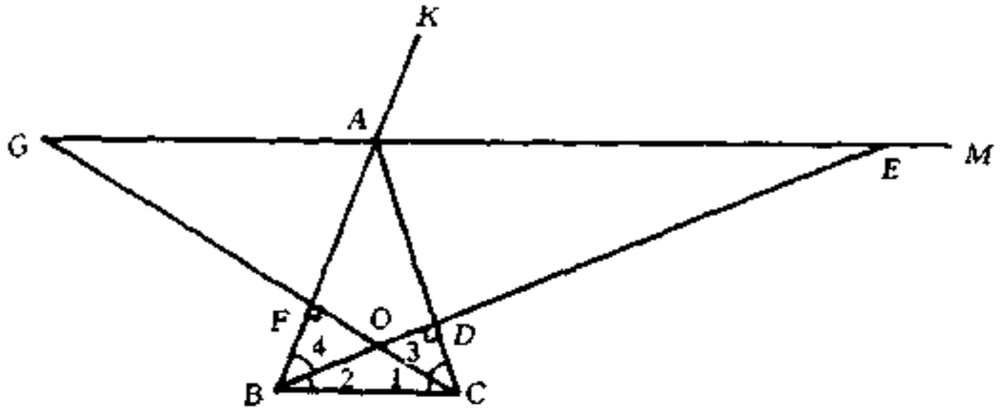


图 15-7

又 $\angle KAC = \angle ABC + \angle ACB = 2\angle ACB$，而 $2\angle EAC = \angle KAC$，则 $\angle EAC = \angle ACB$，所以，$AM \parallel BC$. 那么 $\angle 2 = \angle AED$，$\angle 1 = \angle G$. 而 $AB = AC$，则 $\triangle ABE \cong \triangle ACG$，$BE = CG$. 因此，$DE = FG$.

说明 当两线段所在的三角形不容易证出全等时，可转化为证其他线段相等，通过和差关系达到相等的目的.

例 6 如图 15-8 所示，在$\triangle ABC$ 中，$AD \perp BC$ 于 D，$AB + BD = CD$. 求证：$\angle B = 2\angle C$.

证明 延长 DB 至 E，使 $BE = AB$，连结 AE.

因为 $AB + DB = CD$，则 $CD = DE$. 又 $AD \perp BC$，那么$\triangle ACE$ 是等腰三角形，$\angle C = \angle E$.

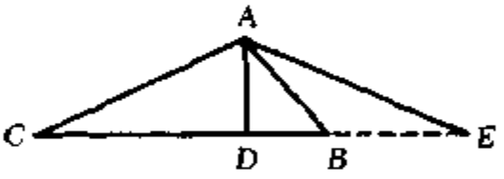


图 15-8

又 $\angle ABC = \angle E + \angle BAE = 2\angle E$，因此 $\angle ABC = 2\angle C$.

例 7 如图 15-9 所示，$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，D、E 分别是 BC、AC 上的点. 问 $\angle BAD$ 与 $\angle CDE$ 满足什么条件时，$AD = AE$，写出你的推理过程.

解 当 $\angle BAD = 2\angle CDE$ 时，$AD = AE$，理由如下：

因为 $\angle 1 = \angle C + \angle CDE$，$\angle 2 = \angle ADC - \angle CDE = \angle B + \angle BAD -$

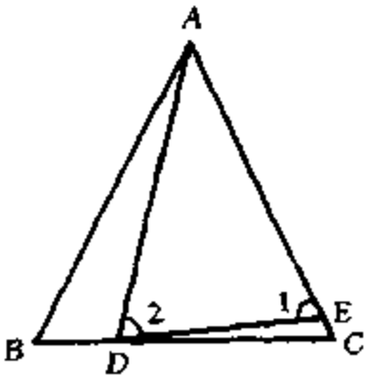


图 15-9

$\angle CDE$. 要使 $\angle 1 = \angle 2$，则必须有 $\angle C + \angle CDE = \angle B + \angle BAD - \angle CDE$. 而 $AB = AC$，则 $\angle B = \angle C$，所以 $\angle BAD = 2\angle CDE$.

说明 这是探索条件的问题. 我们可先假定结论成立，逐步逆推过去，找到相应的结论.

例 8 如图 15-10 所示，六边形 $ABCDEF$ 中，$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F$，且 $AB + BC = 11$，$FA - CD = 3$. 求 $BC + DE$ 的值.

解 六边形各角相等，且均为 120°，故各外角均为 60°，则把各边延长分别相交于 P、Q、G，得到 4 个正三角形：$\triangle BCP$、$\triangle DEQ$、$\triangle AFG$、$\triangle PQG$. 因此，$BC + DE = PQ - CD = PG - CD = FA + AB + BC - CD = (AB + BC) + (FA - CD) = 14$.

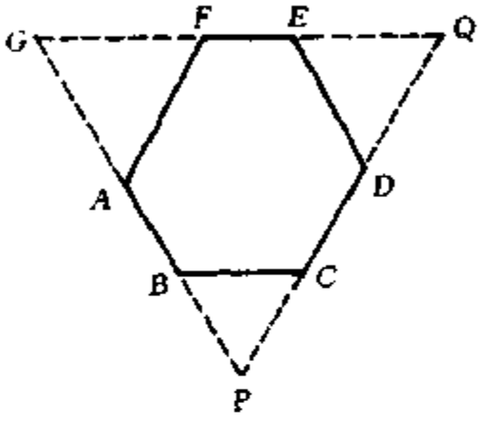


图 15-10

说明 抓住六边形各外角为 60°的特点，构造正三角形解题，是本题解法关键所在. 在求等腰三角形的许多问题中，我们要依据角度特点，构造等腰三角形，促进条件的集中.

练 习 题

A 组

一、选择题

1. 如图 15-11 所示，$\triangle ABC$ 是锐角三角形，D 是 BC 边上的任一点，E、F 分别在边 AB 和 AC 上，且满足 $DE = DB$，$DF = DC$. 若 $\angle A = 55°$，则 $\angle EDF$ 的度数是(　　).

(A) 55°　　(B) 60°　　(C) 65°　　(D) 70°

2. 如图 15-12 所示，在等边 $\triangle ABC$ 中，$AD = BE = CF$，D、E、F 不是中点，连结 AE、BF、CD，构成一些全等三角形. 如果将三个

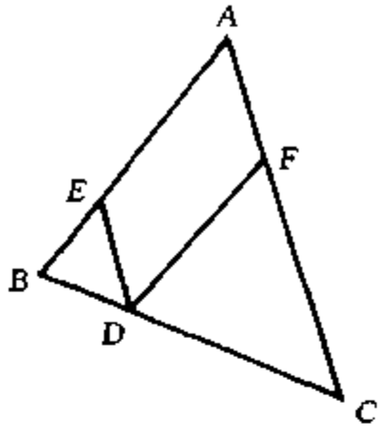


图 15-11

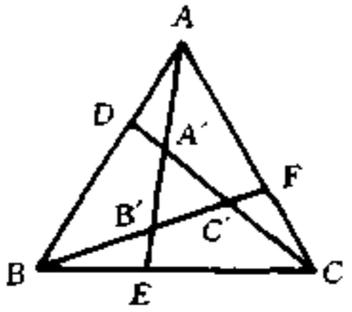


图 15-12

全等三角形组成一组，那么图中全等三角形的组数是(　　).

(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

3. 设 O 是等边$\triangle ABC$ 所在平面上一点，它使$\triangle ABO$、$\triangle BCO$、$\triangle ACO$ 都是等腰三角形，满足上述条件的 O 点共有(　　).

(A) 1 个　　(B) 4 个　　(C) 7 个　　(D) 10 个

4. 如图 15-13 所示，$AB = AC = AD$，如果 $\angle DAC = 3\angle CAB$，那么$\angle DBC$ 是$\angle BDC$ 的(　　).

(A) 3 倍　　(B) 6 倍　　(C) 9 倍　　(D) 2 倍

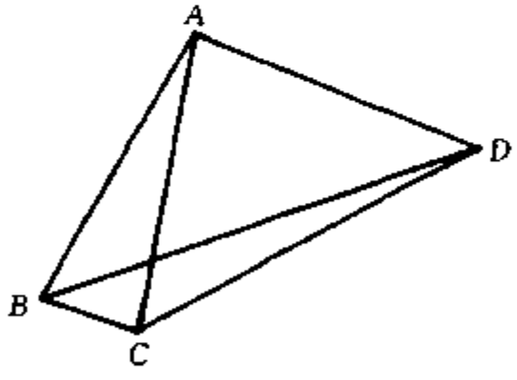


图 15-13

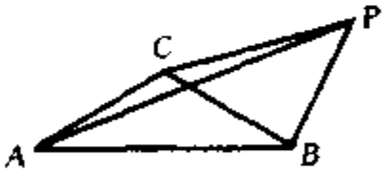


图 15-14

5. 如图 15-14 所示，等腰$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 120°$，点 P 在$\triangle ABC$ 外部，且点 P 与点 C 在 AB 的同侧. 若 $PB = BC$，则$\angle APB$ 等于(　　).

(A) 30°　　(B) 45°

(C) 60°　　(D) 75°

二、填空题

6. 如图 15-15 所示，D 在$\triangle ABC$ 的 BC 边上，且 $BD = DA = AC$，$\angle BAC = 63°$，则$\angle DAC$ 的度数是____.

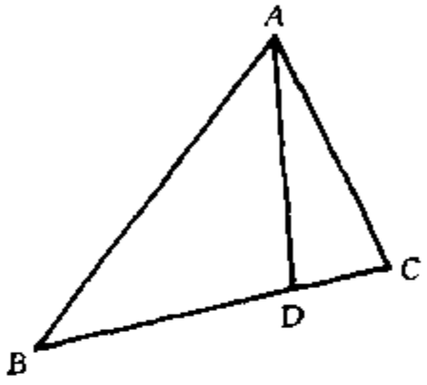


图 15-15

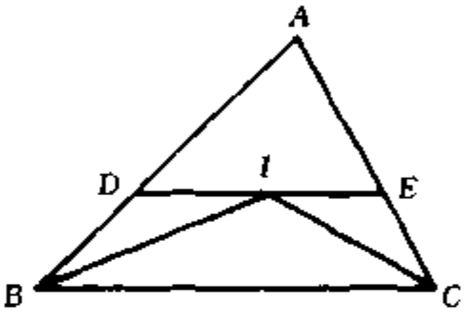


图 15-16

7. 如图 15-16 所示，$\triangle ABC$ 的两内角平分线 BI、CI 交于 I，过 I 作 $DE \parallel BC$ 交 AB 于 D，交 AC 于 E. 若 $AB = 12$，$AC = 7$，则 $\triangle ADE$ 的周长是____.

8. 如图 15-17 所示，$\triangle ABC$ 的两边 AB 和 AC 的垂直平分线分别交 BC 于 D、E，若 $\angle BAC + \angle DAE = 150°$，则$\angle BAC$ 的度数是____.

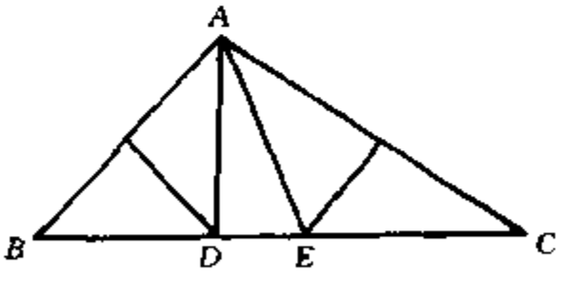


图 15-17

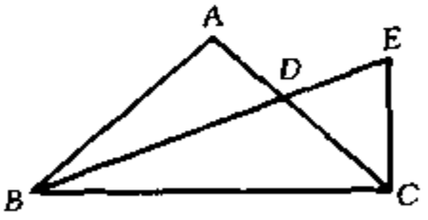


图 15-18

9. 如图 15-18 所示，在$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle ABC = 40°$，BD 平分$\angle ABC$，延长 BD 至 E，使 $DE = AD$，则$\angle ECA$ 的度数是____.

10. 等腰三角形的周长是 30，一腰上的中线把周长分成 3∶2 两部分，则这个三角形的三边长是____.

B 组

11. 如图 15-19 所示，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$BC=BD=ED=EA$. 求$\angle A$的度数.

12. 如图 15-20 所示，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D、E、F分别在AB、BC、CA上，且$DE=EF=FD$. 求证：$\angle DEB=\frac{1}{2}(\angle ADF+\angle CFE)$.

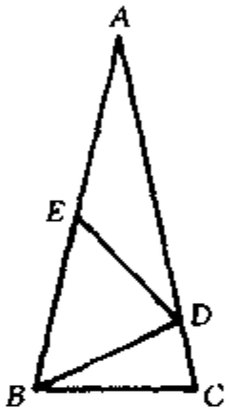


图 15-19

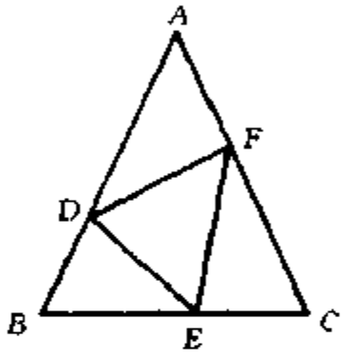


图 15-20

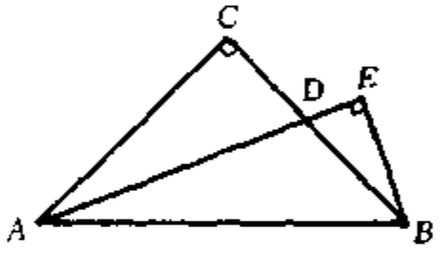


图 15-21

13. 如图 15-21 所示，已知$AC=BC$，$\angle C=90°$，$\angle BAC$的平分线交BC于D，过B作$BE\perp AD$于E. 求证：$AD=2BE$.

14. 如图 15-22 所示，已知$\angle ABD=\angle ACD=60°$，$\angle ADB=90°-\frac{1}{2}\angle BDC$，且$\angle BAC=20°$. 求$\angle ACB$的度数.

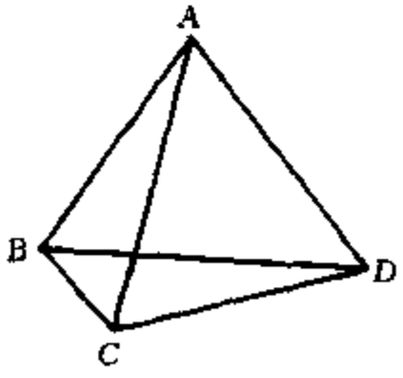


图 15-22

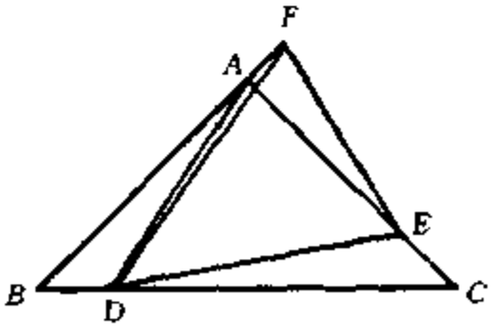


图 15-23

15. 如图 15-23 所示，在$\triangle ABC$中，BC为最大边，$AB=AC$，D

为 BC 上一点，延长 BA 至 F，使 $BF = CD$，E 在 AC 上且 $CE = BD$，连结 DE、EF. 求$\angle DEF$ 的取值范围.

测 试 题

一、选择题

1. 如图 15-24 所示，在$\triangle ABC$ 中，$AB = BC$，$\angle B = 50°$，D 点在 BC 的延长线上，且 $AD = BC$. 则$\angle CAD$ 的度数为(　　).

(A) 30°　　(B) 15°　　(C) 10°　　(D) 25°

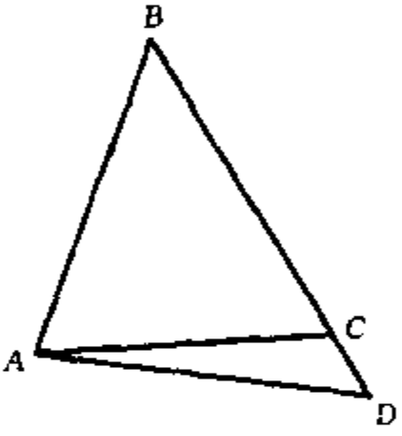


图 15-24

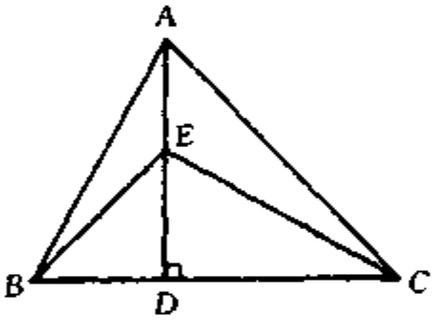


图 15-25

2. 如图 15-25 所示，$\triangle ABC$ 中，$AD \perp BC$ 于 D，$\triangle ADC$ 和 $\triangle BDE$ 都是等腰三角形，且 $AB=6$，则 EC 的长为(　　).

(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

3. 等腰三角形两内角度数之比为 4∶1，则它的顶角度数是(　　).

(A) 30°　　(B) 120°

(C) 80°　　(D) 120° 或 20°

4. 等腰三角形的三边均为整数，且周长为 13，则底边是(　　).

(A) 1 或 3　　(B) 3 或 5

(C) 1 或 5　　(D) 1 或 3 或 5

5. 如图 15-26 所示，在 $\triangle ABC$ 中，D 在 AC 上，E 在 AB 上，且 AB

$=AC$，$BC=BD$，$AD=DE=EB$，则 $\angle A$ 的度数为(　　).

(A) 45°　　(B) 30°　　(C) 60°　　(D) 75°

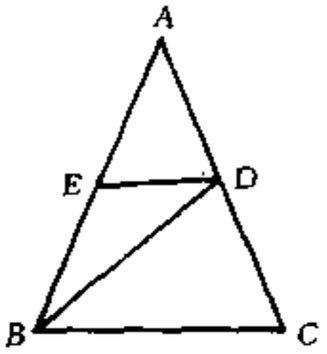


图 15-26

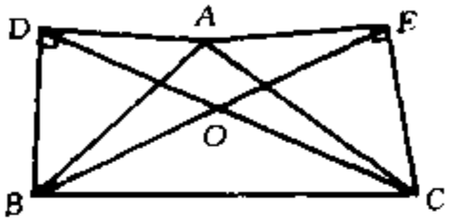


图 15-27

6. 如图 15-27 所示，$\triangle ABD$、$\triangle AEC$ 都是等腰直角三角形，且 $\angle ADB=\angle AEC=90°$，则 $\angle BOD$ 的度数是(　　).

(A) 90°　　(B) 45°　　(C) 60°　　(D) 30°

二、填空题

7. 如图 15-28 所示，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，DE、DF 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的高，$\angle DEF=20°$，则 $\angle BAC$ 的度数是____.

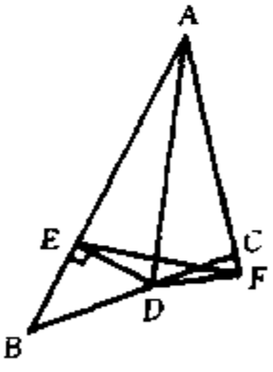


图 15-28

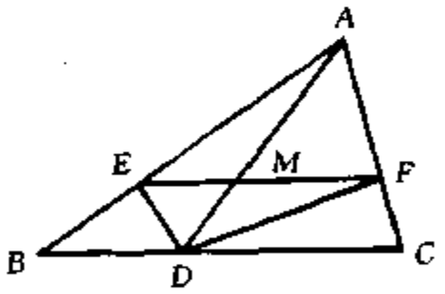


图 15-29

8. 如图 15-29 所示，$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上的一点，DE 平分 $\angle ADB$，DF 平分 $\angle ADC$，且 $EF/\!/BC$. 若 EF 交 AD 于 M，$EF=12$，则 $DM=$____.

9. 已知一个六边形的 6 个内角都是 120°，其连续四边长依次是 1，9，9，5，则这个六边形的周长是____.

10. 等腰三角形的周长是 50，一腰上的中线分得两个三角形的

周长是 32 和 22，则腰长是____.

三、解答题

11. 如图 15-30 所示，设 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$AB=AC$，D 是斜边 BC 的中点，E、F 分别是 AB、AC 上的点，且 $DE\perp DF$. 若 $BE=12$，$CF=5$，求 $\triangle DEF$ 的面积.

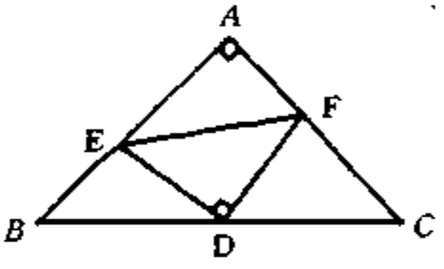


图 15-30

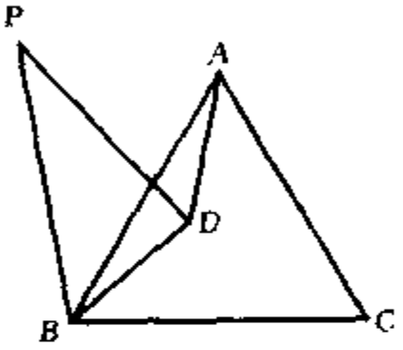


图 15-31

12. 如图 15-31 所示，已知 D、P 分别是等边三角形 ABC 内、外一点，且 $DA=DB$，$AB=BP$，$\angle DBP=\angle DBC$. 求 $\angle BPD$ 的度数.

13. 如图 15-32 所示，点 D、E 在 $\triangle ABC$ 的 BC 上，$AD=AE$. 要使 $AB=AC$，请补充一个条件（尽量写出你所知道的可能的情形），并给予证明.

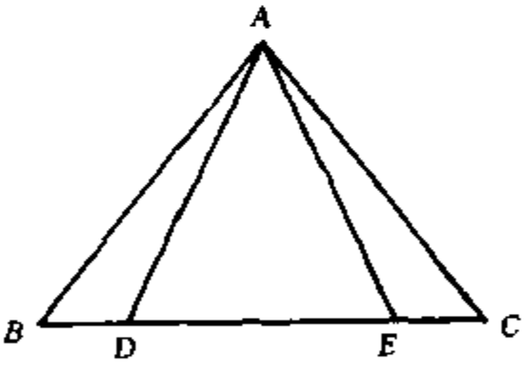


图 15-32

第十六讲　直角三角形

知识要点和基本方法

直角三角形的两锐角互余，斜边是最大的边；30° 角所对的边是斜边的一半. 反过来，在直角三角形中，若有一直角边是斜边的一半，则其所对的角是 30°.

若设两直角边为 a、b，斜边为 c，则 $a^2+b^2=c^2$. 反之，若 $a^2+b^2=c^2$，则以 a、b、c 为边的三角形是直角三角形.

证明直角三角形中的两角相等、线段相等或两线垂直问题，除运用全等三角形或等腰三角形中的方法外，还要应用直角三角形中的特殊角或边之间的关系.

涉及边长是整数的问题，一般是对 $a^2+b^2=c^2$ 进行变换，结合整数及方程知识解决.

例题精讲

例 1　如图 16-1 所示，把一张长方形的纸条 $ABCD$ 沿对角线 BD，将 $\triangle BCD$ 折成 $\triangle BDF$，DF 交 AB 于 E. 若已知 $AE=2\,\text{cm}$，$\angle BDC=30°$，求纸条的长和宽.

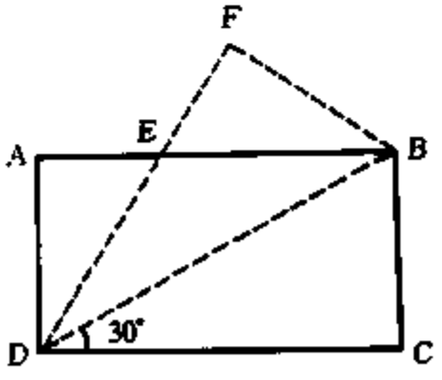


图 16-1

解　由于 $\triangle BCD$ 折叠后变为 $\triangle BFD$，则 $\triangle BCD\cong\triangle BFD$. 这时 $\angle BDC=\angle BDF=30°$，则 $\angle ADE=30°$.

又 $AB\parallel CD$，则 $\angle EBD=\angle BDC=30°$，那么 $\angle EDB=\angle EBD=30°$，$DE=BE$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$\angle ADE=30°$，$AE=2$，则 $DE=4$，$AD=\sqrt{DE^2-AE^2}=2\sqrt{3}$. 而 $AB=AE+EB=6$.

所以，纸条长为 6 cm，宽为 $2\sqrt{3}$ cm.

说明 图形折叠后，前后图形必全等，由此要善于找出相等的角与线段.

例 2 已知 $\triangle ABC$ 中，$AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，BC 边的高为 h_a，AC 边的高为 h_b，且有 $a\leqslant h_a$，$b\leqslant h_b$. 求 $\triangle ABC$ 的三个内角的度数.

解 因为直角三角形中，斜边最大，所以在任意三角形中，都有 $b\geqslant h_a$，$a\geqslant h_b$. 又由于 $a\leqslant h_a$，$b\leqslant h_b$，则有 $a\leqslant h_a\leqslant b\leqslant h_b\leqslant a$，那么 $a=b=h_a=h_b$. 因此，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，从而 $\angle A=\angle B=45°$，$\angle C=90°$.

说明 几何中，也要善于运用代数知识解题. 本例中，运用不等式“夹”出了线段相等，从而说明 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

例 3 求满足下列两个条件的直角三角形三边长：

1. 两条直角边长为整数；

2. 三角形的周长是 x 厘米，面积是 x 平方厘米.

解 设两直角边是 a、b（a、b 为整数），则斜边为 $\sqrt{a^2+b^2}$. 因为 $\frac{1}{2}ab=a+b+\sqrt{a^2+b^2}$，那么 $\frac{1}{2}ab-(a+b)=\sqrt{a^2+b^2}$. 两边同平方并化简得 $(a-4)(b-4)=8$. 由于 $a-4$、$b-4$ 均为整数，可知 $(a,b)=(5,12)$、$(12,5)$、$(6,8)$、$(8,6)$. 因此，当两直角边为 5、12 时，斜边为 13；当两直角边为 6、8 时，斜边为 10.

例 4 如图 16-2 所示，在凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=30°$，$\angle ADC=60°$，$AD=DC$. 证明：$BD^2=AB^2+BC^2$.

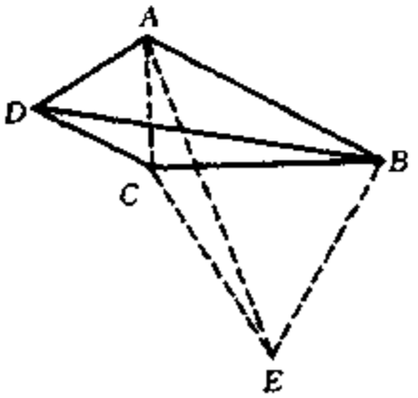


图 16-2

证明 连结 AC，以 BC 为边作正 $\triangle BCE$，连结 AE.

因为 $AD = DC$，$\angle ADC = 60°$，所以 $\triangle ACD$ 是正三角形，则 $DC = CA = AD$.

又 $\angle EBC = 60°$，$\angle ABC = 30°$，则 $\angle ABE = 90°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$AE^2 = AB^2 + BE^2 = AB^2 + BC^2$.

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle DCB$ 中，$AC = DC$，$\angle ACE = \angle BCD$，$CE = BC$，则 $\triangle ACE \cong \triangle DCB$，所以，$AE = BD$，故 $BD^2 = AB^2 + BC^2$.

说明 由结论 $BD^2 = AB^2 + BC^2$ 的形式，联想到勾股定理，故要构造直角三角形，从而得出了以 BC 为边作正三角形的方法.

例 5 如图 16-3 所示，已知 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，CD 是斜边 AB 上的高，O、O_1、O_2 分别是 $\triangle ABC$、$\triangle ACD$、$\triangle BCD$ 角平分线的交点. 求证：$O_1O \perp CO_2$；$OC = O_1O_2$.

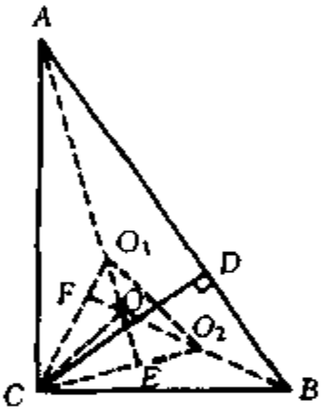


图 16-3

证明 由已知得：O_1、O 均在 $\angle BAC$ 的平分线上，设该平分线交 CO_2 于 E.

因为 $\angle BAC = \angle DCB$，则 $\angle EAC = \angle O_2CB$，所以 $\angle EAC + \angle ACE = \angle O_2CB + \angle ACE = 90°$，即 $\angle AEC = 90°$，$O_1O \perp CO_2$.

由于点 O_1、O_2 分别在 $\angle ACD$、$\angle DCB$ 的平分线上，则 $\angle O_1CO_2 = 45°$. 又由前面知道 $\angle O_1EC = 90°$，那么 $CE = EO_1$. 同理，设直线 OO_2 交 CO_1 于 F，则 $O_2F \perp CF$，$\angle OO_2E = 45°$，$O_2E = EO$. 又 $\angle CEO = \angle O_2EO_1$，则 $\triangle CEO \cong \triangle O_1EO_2$，因此，$CO = O_1O_2$.

说明 直角三角形中，若作斜边上的高，则有多组互余的角，便可推出许多相等的角，这是证题中经常用到的.

例 6 在等腰 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 AB 所在的直线上有一点 P 满足 $s = AP^2 + BP^2$. 试探求 P 点位置变化时，s 与 $2CP^2$ 的大小关系，并证明你所得到的结论.

解 1. 若 P 点与 A 或 B 点重合时，由勾股定理易得 $s = AP^2 + BP^2 = 2CP^2$.

2. 若 P 点在 AB 上（不重合于 A 或 B），如图 16-4 所示，过 P 作 $PD \perp AC$ 于 D，$PE \perp BC$ 于 E. 这时，$AP^2 = 2PD^2$，$BP^2 = 2PE^2$

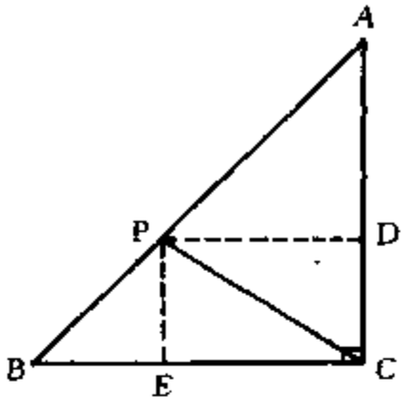


图 16-4

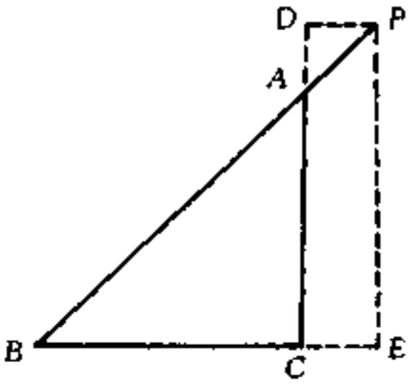


图 16-5

$=2CD^2$. 而 $CP^2=PD^2+CD^2$，即有 $2CP^2=2(PD^2+CD^2)=s$.

3. 若 P 点在 AB 或 BA 延长线上，如图 16-5 所示，仍过 P 点作 $PD\perp AC$ 于 D，$PE\perp BC$ 于 E，同理可得 $s=2CP^2$.

综合上述，不论 P 点在 AB 上的什么位置，都有 $s=2CP^2$.

说明 对于需要自己探求结论的几何问题，可先考虑特殊情形有什么样的结论，再猜想一般情形下是否有相同的结论，并加以论证.

例 7 如图 16-6 所示，P 为 $\triangle ABC$ 边 BC 上一点，且 $PC=2PB$，已知 $\angle ABC=45°$，$\angle APC=60°$. 求 $\angle ACB$ 的度数.

解 过 A 作 $AD\perp BC$ 于 D，过 C 作 $CE\perp AP$ 于 E. 设 $BP=x$，$PD=y$，则 $PC=2x$.

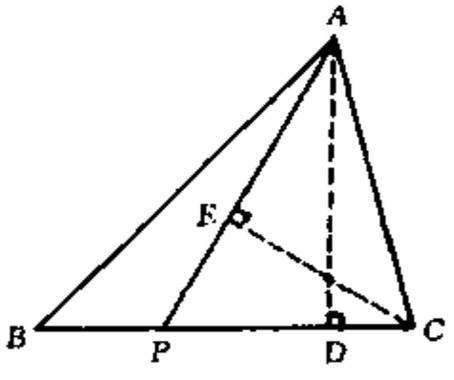


图 16-6

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$BD=x+y$，$\angle ABC=\angle BAD=45°$，则 $AD=BD=x+y$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle APD$ 中，$\angle APC=60°$，则 $\angle PAD=30°$，$AP=2y$. 又 $AP^2=PD^2+AD^2$，即 $(2y)^2=y^2+(x+y)^2$，$3y^2=(x+y)^2$，$\sqrt{3}y=x+y$，$x=(\sqrt{3}-1)y$.

因此，$PC=2x=2(\sqrt{3}-1)y$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle PCE$ 中，$\angle PCE=30°$，则 $PE=\frac{1}{2}PC=(\sqrt{3}-1)y$，$EC=\sqrt{PC^2-PE^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}PC=(3-\sqrt{3})y$，$AE=AP-PE=2y-(\sqrt{3}-1)y=(3-$

$\sqrt{3})y$. 所以，$AE = EC$，$\angle ACE = 45°$. 故 $\angle ACB = \angle ACE + \angle BCE = 75°$.

说明 题中原本没有直角三角形，但通过构造直角三角形，求出有关边之间的关系，从而求出相应角的度数. 这是求角的度数的一条思路.

练 习 题

A 组

一、选择题

1. 如图 16-7 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$AC = AE$，$BF = BC$，则 $\angle ECF$ 的度数是(　　).

(A) 60°　　(B) 45°　　(C) 30°　　(D) 15°

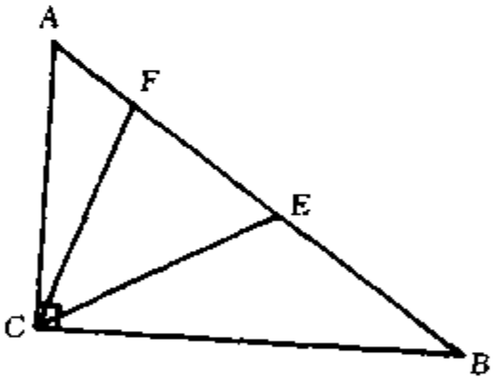


图 16-7

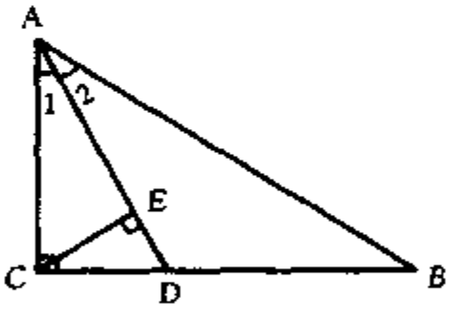


图 16-8

2. 如图 16-8 所示，已知 $\angle 1 = \angle 2$，$AD = BD = 4$，$CE \perp AD$，$2CE = AC$，那么 CD 的长是(　　).

(A) 2　　(B) 3　　(C) 1　　(D) 1.5

3. 如图 16-9 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 120°$，$AB = AC$，MN 垂直平分 AC 交 BC 于 N，且 $NC = 4$，则 BN 的长度是(　　).

(A) 12　　(B) 6

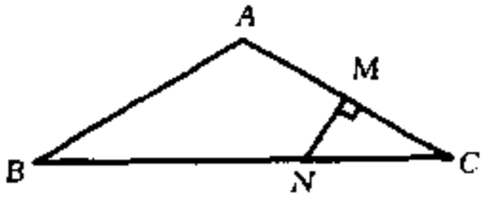


图 16-9

(C) 8　　(D) 10

4. 如图 16-10 所示，$\angle MON = 60°$，OP 是 $\angle MON$ 的平分线，$PA \perp OM$，$PB \perp ON$，垂足分别是 A、B，连结 AB，且 $AB = 10$，则 PA 的长是(　　).

(A) $10\sqrt{3}$　　(B) $5\sqrt{3}$

(C) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$　　(D) $3\sqrt{3}$

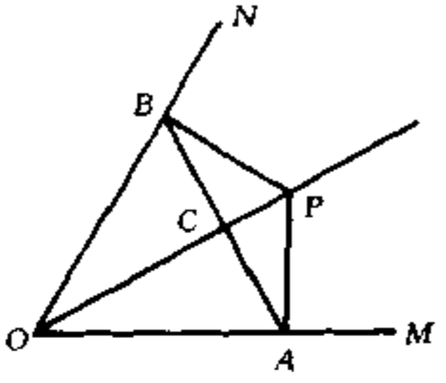


图 16-10

5. 已知 $\triangle ABC$ 是三边为整数的直角三角形，BC 为斜边，且 $2AC = BC + AB$，则 $BC : AC : AB$ 等于(　　).

(A) 13 : 12 : 5　　(B) 6 : 5 : 4

(C) 8 : 7 : 6　　(D) 5 : 4 : 3

二、填空题

6. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\angle A = 30°$，$AB + BC = 6\sqrt{3}$，则 $AC =$ ____.

7. 等腰三角形的底角是 75°，它的腰长为 3，则其面积是____.

8. 如图 16-11 所示，$AB \perp AD$，$AB = 3$，$BC = 12$，$CD = 13$，$DA = 4$，则四边形 $ABCD$ 的面积是____.

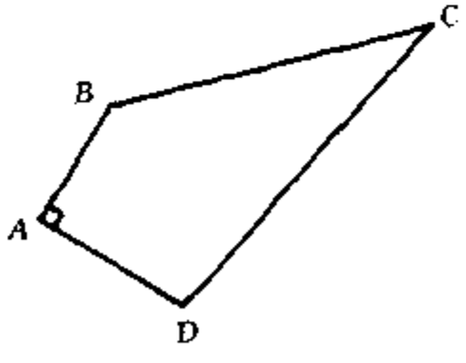


图 16-11

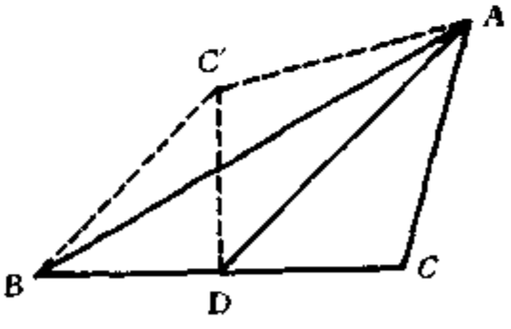


图 16-12

9. 如图 16-12 所示，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，$\angle ADC = 45°$. 把 $\triangle ADC$ 沿直线 AD 折过来，点 C 落在点 C' 的位置上，如果 $BC = 4$，那么 $BC' =$ ____.

10. 有 3 个含 30°角的直角三角形，它们的大小互不相同，但彼此有一条边相等. 这 3 个三角形中，按照从大到小的顺序，其斜边的比为 ____ : ____ : 1.

B 组

11. 如图 16-13 所示，已知△ABC 是等边三角形，边长为 6，$DE \perp BC$ 于 E，$EF \perp AC$ 于 F，$FD \perp AB$ 于 D. 求 AD 的长.

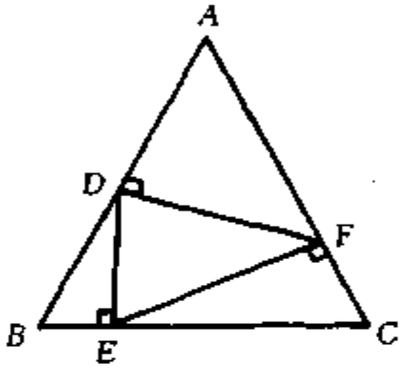


图 16-13

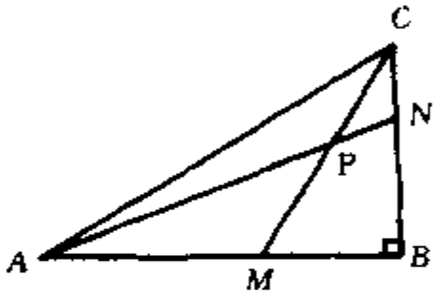


图 16-14

12. 如图 16-14 所示，在△ABC 中，$\angle B = 90°$，M 为 AB 上一点，使得 $AM = BC$，N 为 BC 上一点，使得 $CN = BM$，连结 AN、CM 交于点 P. 试求 $\angle APM$ 的度数，并写出你的推理证明过程.

13. 如图 16-15 所示，在△ABC 中，$AB = 37$，$AC = 58$，D 在线段 BC 上，且 $AD = AB$. 若 BD 和 DC 的长均为整数，求 BC 的长.

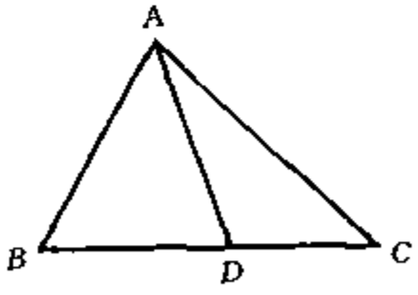


图 16-15

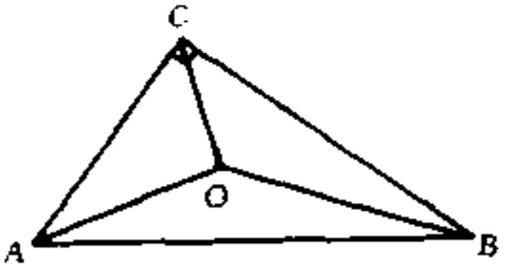


图 16-16

14. 如图 16-16 所示，在△ABC 中，$\angle ACB = 90°$，点 O 是△ABC 内的一点，且 $S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OCA}$. 求证：$OA^2 + OB^2 = 5OC^2$.

15. 将 Rt$\triangle ABC$ 斜边 AB 上满足 $PC^2 = PA \cdot PB$ 的点 P 染上红色. 问斜边上最少有几个红点？最多有几个红点？写出你的推理过程.

测　试　题

一、选择题

1. 已知如下数组：(1) $\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$；(2) $\sqrt{10}-3$，$2\sqrt{2}-\sqrt{5}$，$32-10\sqrt{3}$；(3)12 402，12 240，1 998；(4)1 998，640，2 098. 其中可作直角三角形三边长的数组是(　　).

(A) (1)、(4)　(B) (2)、(4)　(C) (2)、(3)　(D) (3)、(4)

2. 直角三角形有一条直角边是 14，另外两边长也是整数，则它的面积是(　　).

(A) 682.5　(B) 157.5　(C) 336　(D) 168

3. 如图 16-17 所示，已知 $\angle A = \angle B$，AA_1、PP_1、BB_1 均垂直于 A_1B_1，$AA_1 = 17$，$PP_1 = 16$，$BB_1 = 20$，$A_1B_1 = 12$，则 $AP + PB$ 等于(　　).

(A) 12　(B) 13　(C) 14　(D) 15

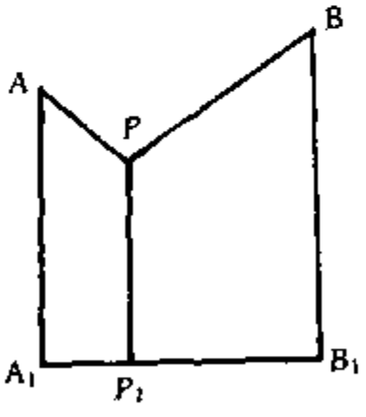


图 16-17

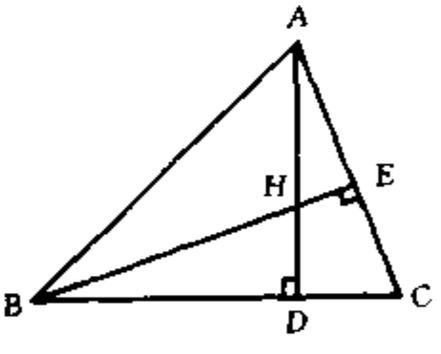


图 16-18

4. 如图 16-18 所示，在$\triangle ABC$ 中，H 是高 AD 和 BE 的交点，且 $BH = AC$，则$\angle ABC$ 的度数是(　　).

(A) 30°　(B) 45°　(C) 60°　(D) 75°

5. 满足 $a^2 + b^2 = c^2$ 和 $1 \leqslant a \leqslant b < c \leqslant 20$ 的正整数$(a, b,$

c)共有(　　).

(A) 3 组　　(B) 4 组　　(C) 5 组　　(D) 6 组

二、填空题

6. 如图 16-19 所示，在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，$\angle ABN = \angle MBC$，$BM = MN$，$BN = a$，则点 N 到边 BC 的距离等于____.

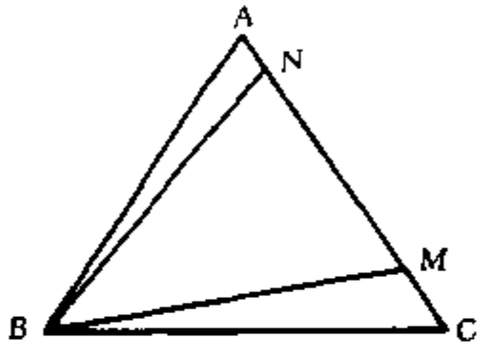


图 16-19

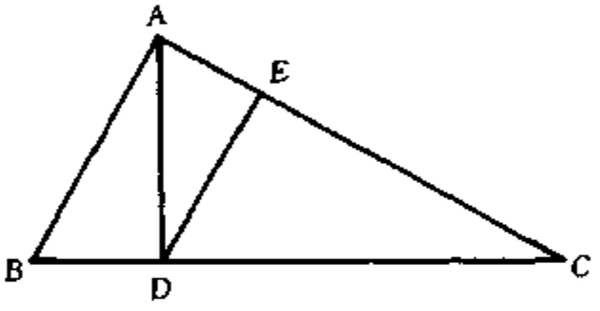


图 16-20

7. 如图 16-20 所示，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC = 90°$，$\angle C = 30°$，$AD \perp BC$于 D，$DE \perp AC$于 E，$AB = a$，则 AE 的长是____.

8. 已知直角三角形的三边长是 a、$a - b$、$a + b$. a、b 为整数，那么它的最小面积是____.

9. 已知$\triangle ABC$中，$\angle BAC = 120°$，$AD \perp BC$于 D，$DE \perp AB$于 E，$DF \perp AC$于 F，$BC = 20$，则 $DE + DF =$ ____.

10. 在凸四边形 $ABCD$ 中，$AB : BC : CD : DA = 2 : 2 : 3 : 1$，且 $\angle ABC = 90°$，则$\angle DAB$ 的度数是____.

三、解答题

11. 如图 16-21 所示，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB = 90°$，$\angle ABC = 30°$，以 AC、BC 为边分别作正$\triangle ACD$、正$\triangle BCE$，连结 AE、BD 相交于 O. 求证：$\angle AOD = 60°$.

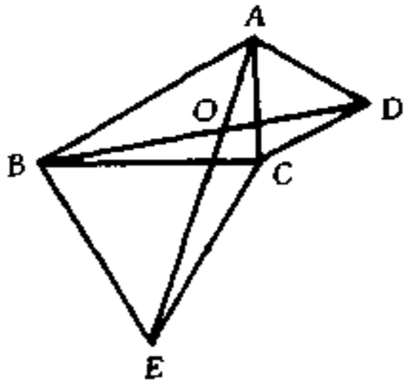


图 16-21

12. 已知$\triangle ABC$中，AD 是高，$AB + CD = AC + BD$. 求证：$AB = AC$.

13. 平面上有 4 个点 A、B、C、D，已知 $AB=1$，$BC=9$，$CA=9$，$AD=7$. 求证：BD、CD 中至少有一条线段的长度不是整数.

第十七讲　多边形的角与对角线

知识要点和基本方法

多边形分为凸多边形和凹多边形，在初中范围内，通常指的多边形是凸多边形.

n 边形的内角和是 $(n-2)\times 180°$，外角和是 $360°$. 若 n 边形的每个内角都相等，则每个内角的度数是 $\frac{(n-2)\times 180°}{n}$，每个外角的度数是 $\frac{360°}{n}$.

n 边形中，不相邻两点连结的线段，称为对角线，共有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线.

求 n 边形的内(外)角度数、边数或对角线条数是十分常见的问题，解决时常用到三角形内角和、不等式及方程的知识.

例题精讲

例 1　如图 17-1 所示，求 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7$ 的度数.

解　在图上另标出 $\angle 8$、$\angle 9$. 则 $\angle 2+\angle 3+\angle 4=360°-\angle 9$，$\angle 5+\angle 6+\angle 7=360°-\angle 8$. 所以 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7=720°+\angle 1-(\angle 9+\angle 8)=720°+\angle 1-(180°+\angle 1)=540°$.

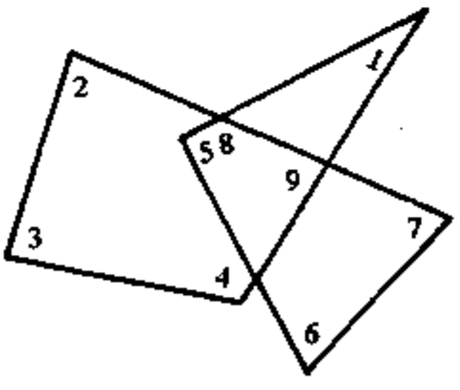


图 17-1

说明　类似于图 17-1 的图形称

为多角形，求它的有关内角和，一般是将所求角转化为四边形或三角形的内角解决. 这就需要我们找准转化到什么样的四边形或三角形中，使求解简便.

例 2 一个凸 n 边形的内角和小于 2 000°. 求 n 的最大值.

解 由 $(n-2)\times 180° < 2\,000°$，解得 $n < 13\frac{1}{9}$. 由于 n 是自然数，则 n 的最大值是 13.

说明 建立关于角度的一个不等式，求出边数 n 的范围，是求解这类题的基本方法.

例 3 一个凸 n 边形，除了一个内角外，其余 $(n-1)$ 个内角和是 2 000°，求 n 的值.

解 设除去的这个内角是 x 度，则 $(n-2)\times 180° - x = 2\,000°$，那么 $(n-2)\times 180° = 2\,000° + x$. 显然 $2\,000° + x$ 应是 180° 的倍数，故 $x = 160°$，这时求得 $n = 14$.

例 4 以正 n 边形中的一边为边，在图形外作 n 个正方形. 已知由 n 个正方形的外围 $2n$ 个顶点构成了一个正 $2n$ 边形. 当 n 为何值时，才有可能？

解 如图 17-2 所示，P、Q、R 为正 n 边形的 3 个顶点，M、N、K、L 为正 $2n$ 边形的 4 个顶点. 由题可知，$MN = NQ$，$QR = KL$，$NK = KL = MN$. 因此，$\triangle NQK$ 为正三角形，则 $\angle NQK = 60°$，故正 n 边形的内角 $\angle PQR = 120°$. 这时，$(n-2)\times 180° = n\times 120°$，$n = 6$.

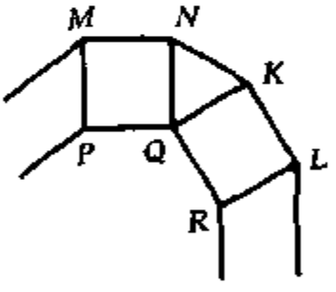


图 17-2

说明 本例亦可先考虑 $n = 4$，5，6 等几种特殊情况，得到一般思路后再论证.

例 5 如图 17-3 是一正 n 角星的一部分，这正 n 角星是一个简单的封闭的多边形，其中 $2n$ 条边相等，$\angle A_1 = \angle A_2 = \cdots = \angle A_n$，$\angle B_1 = \angle B_2 =$

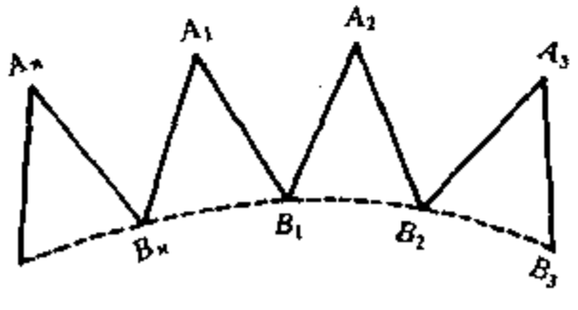


图 17-3

$\cdots = \angle B_n$. 如果锐角 A_1 比锐角 B_1 小 $10°$，求 n 的值.

解 连接 $B_1B_2B_3\cdots B_n$，把正 n 角星划分为正 n 边形 $B_1B_2\cdots B_n$ 和 n 个全等于 $\triangle B_1A_2B_2$ 的三角形.

因为 $\angle A_1B_1A_2 = \angle A_1 + 10°$，$\angle B_nB_1B_2 = 360° - \angle A_1B_1A_2 - (180° - \angle A_1) = 170°$，则 $(n-2)\times 180° = n \times 170°$，$n = 36$.

说明 将多角形转化为多边形是解决这类题的有效方法.

例 6 如图 17-4 所示，$AB = BC = CD = DE = EA$，AD 是最长的对角线，求证：AD 上必存在一点 K，使 $\angle BKA$、$\angle CKD$、$\angle BKC$ 都小于 $90°$.

证明 设 K 是 AD 的中点，连结 KE. 由 $AE = ED$ 得 $KE \perp AD$.

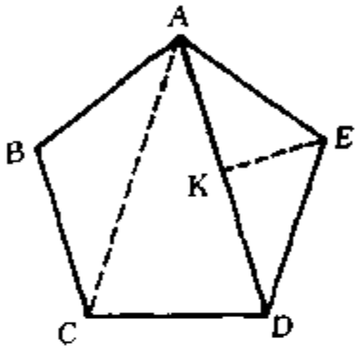


图 17-4

又 $AC \leqslant AD$，则 $\angle BAC \geqslant \angle DAE$，更有 $\angle BAK > \angle KAE$. 那么 A、B 在直线 EK 的同侧，C、D 也在 EK 的同侧. 因而 $\angle BKA < 90°$，且 $\angle CKD < 90°$.

下面证明 $\angle BKC < 90°$.

假设 $\angle BKC \geqslant 90°$，则 $BK < a$（a 为五边形的边长）. 因为 $AK < a$，$KD < a$，所以 $\angle AKB > 60°$，$\angle CKD > 60°$，但这是不可能的. 因为 $\angle AKB + \angle BKC + \angle CKD = 180°$，这说明 $\angle BKC \geqslant 90°$ 不成立. 因此，$\angle BKC < 90°$.

说明 要证明问题的存在性，可以举出在一特殊情况下能够满足结论即可. 例 6 就取了 AD 的中点这个特殊点.

例 7 (1) 计算凸十边形所有对角线的条数，以及以凸十边形顶点为顶点的三角形的个数.

(2) 在凸十边形每个顶点处任意标上一个自然数，在(1)中的三角形中，若三个顶点所标三数之和为奇数，则该三角形为奇三角形；若三数之和为偶数，则称偶三角形. 试判断：奇三角形个数是奇数还是偶数，并证明你的结论.

解 (1) 从每个顶点出发有 7 条对角线，10 个顶点共发出 70 条对角线，每条对角线重复计算了 1 次，故共有 $\frac{70}{2} = 35$ 条对角线.

又因为边与对角线共有 45 条，每条属于 8 个三角形的边，则三角形数为 $\frac{45\times 8}{3}=120$ 个.

(2) 奇三角形个数是偶数.

因为凸十边形每个顶点属于 40 个三角形，也就是说凸十边形每个顶点所写的数在总和中计算了 40 次，那么总和应为十顶点所标数总和的 40 倍，则一定是偶数.

如果奇三角形个数为奇数，则它们顶点之和必为奇数(奇数个奇数之和为奇数). 而偶三角形顶点之和必为偶数. 于是，上述总和 = 奇数 + 偶数 = 奇数，矛盾！因此，奇三角形个数必为偶数.

练　习　题

A　组

一、选择题

1. 如图 17-5 所示，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$ 的度数是(　　).

(A) 180°　　(B) 360°　　(C) 540°　　(D) 720°

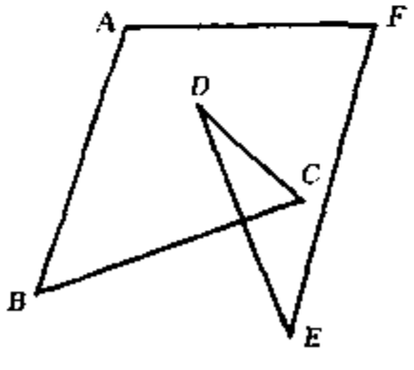


图 17-5

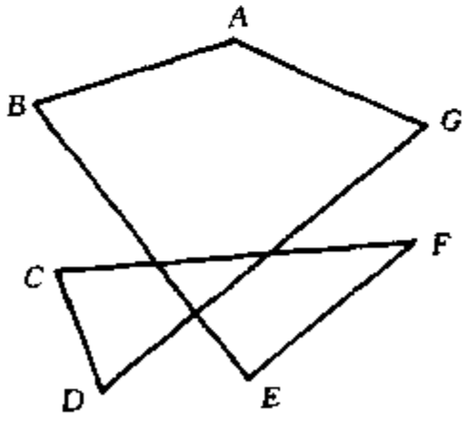


图 17-6

2. 如图 17-6 所示，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G=n\times 180°$，那么 n 等于(　　).

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 1

3. 如果一个多边形的内角和是它的外角和的 5 倍，则这个多边形是(　　).

(A) 八边形　　(B) 十边形

(C) 十二边形　　(D) 七边形

4. 已知多边形内角和与外角和均为 2 160°，则这个多边形的对角线共有(　　).

(A) 54 条　　(B) 65 条

(C) 60 条　　(D) 55 条

5. 一个凸多边形的内角与一个外角的和是 1 999°，则这个外角的度数是(　　).

(A) 30°　　(B) 25°　　(C) 24°　　(D) 19°

二、填空题

6. 一个凸 2000 边形，最多有____个锐角.

7. 已知凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ ($n>4$) 的所有内角都是 15°的整数倍，且 $\angle A_1+\angle A_2+\angle A_3=285°$，那么 $n=$ ____.

8. 一个凸 n 边形中，除去一个内角后，($n-1$) 个内角和是 8 940°，那么除去的这个内角的度数是____.

B　组

9. 已知一个凸 n 边形各内角度数均相等，且度数是奇数. 问这样的多边形有几个？证明你的结论.

10. 如图 17-7 所示，在六边形 $ABCDEF$ 中，$AB=BC=CD=DE=EF=FA$，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E=\angle F$. 一直线截出一个 $\triangle AKN$，且 $AK+AN=AB$. 试求 $\angle KAN+\angle KBN+\angle KCN+\angle KDN+\angle KEN+\angle KFN$ 的度数.

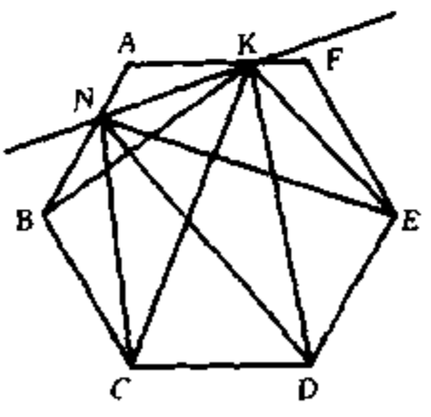


图 17-7

测　试　题

一、选择题

1. 如图 17-8 所示，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G$ 的度数是(　　).

(A) 1 080°　　(B) 540°　　(C) 720°　　(D) 1 260°

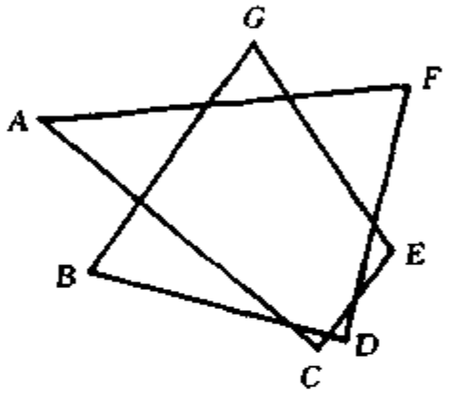


图 17-8

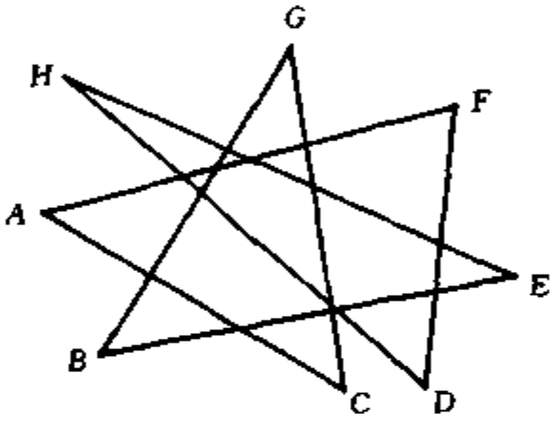


图 17-9

2. 如图 17-9 所示，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G+\angle H$ 的度数是(　　).

(A) 360°　　(B) 450°　　(C) 540°　　(D) 630°

3. 一个凸 n ($n\geqslant 4$) 边形的每一个内角都相等，每个外角的度数均为奇数，则这样的凸多边形共有(　　).

(A) 4 个　　(B) 6 个　　(C) 3 个　　(D) 2 个

4. 一个凸 n 边形最小内角为 95°，其他内角依次增加 10°，则 n 等于(　　).

(A) 6　　(B) 12　　(C) 4　　(D) 10

5. 一个凸 n 边形共有 54 条对角线，则它的内角和是(　　).

(A) 1 080°　　(B) 1 440°　　(C) 1 800°　　(D) 1 620°

二、填空题

6. 凸 n ($n\geqslant 4$) 边形中出现锐角的最大个数为 M，最小个数为

m，则 $M+m$ 的值是____.

7. 以正七边形的 7 个顶点中的任意 3 个为顶点的三角形中，其中锐角三角形的个数是____.

8. 已知 $ABCDE$ 是正五边形，O 是平面上一点，$\triangle DOE$ 是等边三角形，则 $\angle AOC$ 的度数为____.

9. 凸六边形 $ABCDEF$ 中，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E=\angle F$，$EF=1$，$ED=5$，那么 $AB+BC=$____.

三、解答题

10. 如图 17-10 所示，$CD \parallel AF$，$\angle CDE=\angle BAF$，$AB \perp BC$，$\angle C=124°$，$\angle E=80°$，求 $\angle F$ 的度数.

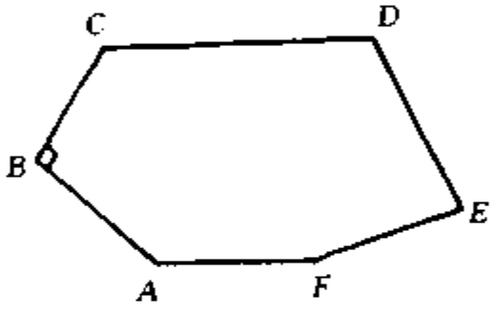


图 17-10

11. 若凸 $4n+2$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{4n+2}$（n 为自然数）的每个内角都是 30°的整数倍，且 $\angle A_1=\angle A_2=\angle A_3=90°$. 求 n 所有可能的值.

12. 平面上给出 4 点，其中任意 3 点不共线，这 4 点组成 4 个三角形. 请判断：这 4 个三角形中最多有几个锐角三角形？证明你的结论.

第十八讲　平行四边形

知识要点和基本方法

平行四边形是一类特殊的四边形，特殊性体现在它的两组对边分别平行且相等、两组对角分别相等、对角线互相平分.

矩形、菱形、正方形又是特殊的平行四边形，它们除拥有平行四边形的所有性质外，各自还有独特的性质. 如矩形的四个角是直角、对角线相等；菱形的四条边相等、对角线互相垂直且平分内角；正方形又包括了矩形和菱形的所有性质.

要证明一个四边形是平行四边形、矩形、菱形或正方形，可采取“层层叠加性质”的办法. 例如，要证一个四边形是矩形，思路之一可以先证其是平行四边形，再证有一个角是直角或对角线相等.

平行四边形有非常丰富的性质，为证明几何问题提供了极大的方便，诸如证角相等、线段相等、直线平行或垂直等，都可以转化为证平行四边形.

同时，三角形中的性质，我们要注意灵活运用；构造平行四边形也是本讲中常用的技巧.

例题精讲

例 1　已知四边形 $ABCD$，从(1) $AB \parallel DC$；(2) $AB = DC$；(3) $AD \parallel BC$；(4) $AD = BC$；(5) $\angle A = \angle C$；(6) $\angle B = \angle D$ 中取两个条件加以组合，能推出 $ABCD$ 是平行四边形的有哪几种情形？请写出这些组合；不能推出 $ABCD$ 是平行四边形的，请举一反例.

解　由题中 6 个条件中任取 2 个，共有 $5+4+3+2+1=15$ 种组合，其中能推出 $ABCD$ 是平行四边形的有下列 9 种情形：

a. 由(1)、(3)知，两组对边分别平行的四边形是平行四边形.

b. 由(1)、(2)或(3)、(4)知，一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

c. 由(2)、(4)知，两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

d. 由(5)、(6)知，两组对角分别相等的四边形是平行四边形.

e. 由(1)、(5)或(1)、(6)或(3)、(5)或(3)、(6)可推出两组对边分别平行的四边形是平行四边形.

下列6种情形不能推出 $ABCD$ 是平行四边形：

a. 由(1)、(4)或(2)、(3)知，$ABCD$ 是等腰梯形.

b. 由(2)、(5)或(2)、(6)或(4)、(5)或(4)、(6)知，一组对边相等，一组对角相等的四边形不是平行四边形，可举出这样的反例：如图18-1所示，$A'B'C'D'$ 是平行四边形，$\angle A'B'C' = \angle A'D'C' =$ 锐角 α，$A'B' = D'C' =$ 常数 a.

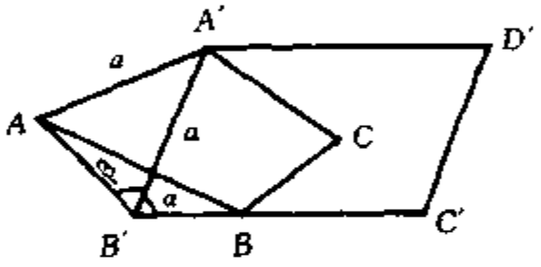


图 18-1

任取一锐角 β，且 $\beta > \alpha$，作 $\angle A'B'A = \beta$，并取 $AA' = a$，即 $\triangle AA'B'$ 是等腰三角形，因而 $\angle A'AB' = \beta$. 由于 $\beta > \alpha$，故可在 $\angle A'AB$ 的内部作 $\angle A'AB = \alpha$，设交 $B'C'$ 于 B 点. 过 B 作 $BC \parallel AA'$ 且 $BC = AA'$，则 $A'ABC$ 是平行四边形，因而 $\angle C = \angle A'AB = \alpha$. 这样就得到了一个四边形 $A'B'BC$，它有一组对边相等（$A'B' = BC$）和一对角相等（$\angle C = \angle A'B'B$），但它显然不是平行四边形.

说明 例1全面反映了平行四边形的性质与判定. 特别举的一个反例，需要深思才能构造出来. 举反例是说明一个命题是否成立的有效方法.

例2 设凸四边形 $ABCD$ 的4个顶点满足条件：每一点到其他3点的距离之和都要相等. 试判断这个四边形是什么四边形？请证明你的结论.

解 这个四边形是矩形.

由已知得 $AB + AC + AD = BA + BC + BD = CA + CB +$

$CD = DA + DB + DC$，变换此式有

$$\begin{cases} AC + AD = BC + BD & ① \\ AB + AD = BC + CD & ② \\ AB + AC = BD + CD & ③ \end{cases}$$

① + ② − ③ 得 $AD = CB$，② + ③ − ① 得 $AB = CD$，故知 $ABCD$ 是平行四边形. 又 ① + ③ − ② 得 $AC = BD$. 因此，$ABCD$ 是矩形.

例 3 如图 18-2 所示，正方形 $ABCD$ 被两条与边平行的线段 EF、GH 分割成 4 个小矩形，P 是 EF 与 GH 的交点，若矩形 $PFCH$ 的面积恰是矩形 $AGPE$ 面积的 2 倍，试确定 $\angle HAF$ 的大小，写出推导的过程.

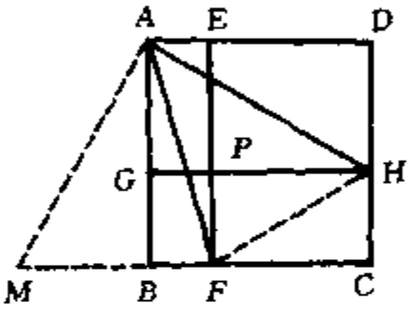


图 18-2

解 $\angle HAF = 45°$，证明如下：

设 $AG = a$，$BG = b$，$AE = x$，$ED = y$，则

$$\begin{cases} a + b = x + y, & ① \\ 2ax = by. & ② \end{cases}$$

由①有 $a - x = y - b$，两边平方得 $a^2 - 2ax + x^2 = b^2 - 2by + y^2$. 把②代入得 $a^2 - 2ax + x^2 = y^2 - 4ax + b^2$，即 $(a + x)^2 = b^2 + y^2$，$a + x = \sqrt{b^2 + y^2}$.

又因为 $b^2 + y^2 = CH^2 + CF^2 = FH^2$，所以 $a + x = FH$，即 $DH + BF = FH$.

延长 CB 到 M，使 $BM = DH$，连结 AM. 因为 $\mathrm{Rt}\triangle ABM \cong \mathrm{Rt}\triangle ADH$，所以 $AM = AH$，$\angle MAB = \angle HAD$，则 $\angle MAH = \angle MAB + \angle BAH = \angle BAH + \angle HAD = 90°$.

又可证 $\triangle AMF \cong \triangle AHF$，则 $\angle MAF = \angle HAF$，即 $\angle HAF = \frac{1}{2}\angle MAH = 45°$.

说明 类似于例 3 的题很多，其证法一般是构造全等三角形，或

者结合勾股定理进行运算证明.下面两道题,可类似证明.

1. 如图 18-3 所示,在正方形 $ABCD$ 中,E、F 分别为 BC、DC 上的点,且 $\angle EAF = 45°$, $AH \perp EF$, 求证: $AH = AB$.

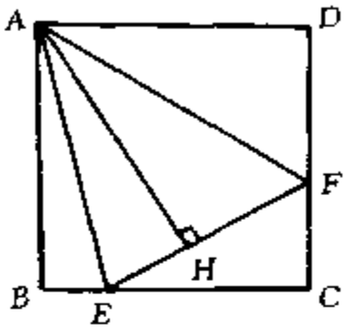


图 18-3

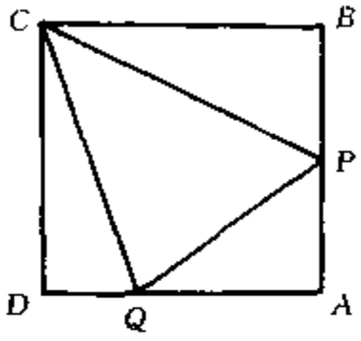


图 18-4

2. 如图 18-4 所示,正方形 $ABCD$ 边长为 1,AB、AD 上各有一点 P、Q,若 $\triangle APQ$ 的周长为 2. 求 $\angle PCQ$ 的度数.

例 4 如图 18-5 所示,在矩形 $ABCD$ 和矩形 $BFDE$ 中,若 $AB = BF$, 求证: $MN \perp CF$.

证明 因为 $AB = BF$, $BF = DE$, 则 $AB = DE$.

又 $\angle A = \angle E = 90°$, $\angle AMB = \angle EMD$, 则 $\triangle AMB \cong \triangle EMD$, $BM = MD$.

易知 $BMDN$ 是平行四边形,而 $BM = MD$, 则 $BMDN$ 是菱形.

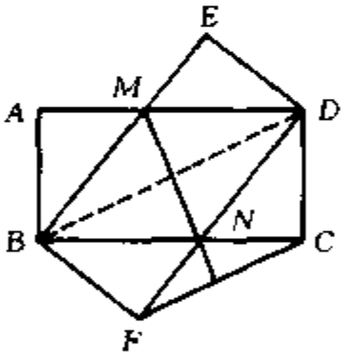


图 18-5

连结 BD,则 $BD \perp MN$, $NB = ND$, 那么, $\angle NBD = \angle NDB$. 又可证 $\triangle BNF \cong \triangle DNC$, 则 $NF = NC$, $\angle NFC = \angle NCF$. 所以 $\angle NFC = \angle NDB$. 故 $BD \parallel FC$, $MN \perp FC$.

说明 证垂直可应用菱形两对角线互相垂直的性质,使问题变得简单.

例 5 如图 18-6 所示,在矩形 $ABCD$ 中,已知 $AD = 12$, $AB = 5$, P 是 AD 边上任意一点, $PE \perp BD$, $PF \perp AC$, E、F 分别是垂足. 求 $PE + PF$ 的值.

解 作 $AG \perp BD$ 于 G, $PM \perp AG$ 于 M, 则 $PE = MG$.

又易证 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$，从而 $\mathrm{Rt}\triangle PAM \cong \mathrm{Rt}\triangle APF$，$AM = PF$. 所以 $PE + PF = MG + AM = AG$.

而 $AD = 12$，$AB = 5$，$\angle BAD = 90°$，则 $BD = 13$.

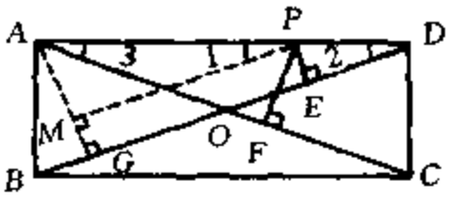


图 18-6

在 $\triangle ABD$ 中，根据面积公式有 $\frac{1}{2}AB \cdot AD = \frac{1}{2}BD \cdot AG$，则 $AG = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13}$，即 $PE + PF = \frac{60}{13}$.

例 6 证明：两个边长不等的正方形一定可以拼成一个大正方形.

证明 如图 18-7 所示，$ABCD$、$BEFG$ 是边长分别为 a、b $(a > b)$ 的正方形.

在 AB 上取 $AP = b$，沿 DP、PF 剪开，把 $\triangle DAP$ 移到 $\triangle DCQ$ 处，再把 $\triangle PEF$ 移到 $\triangle QGF$ 处，则拼成了正方形 $DPFQ$. 证明如下：

由于 $\triangle DAP \cong \triangle DCQ$，则 $DP = DQ = \sqrt{a^2 + b^2}$. 又 $\triangle PEF \cong \triangle QGF$，则 $PF = FQ = \sqrt{a^2 + b^2}$. 因此 $DP = PF = FQ = QD$，$DPFQ$ 是菱形.

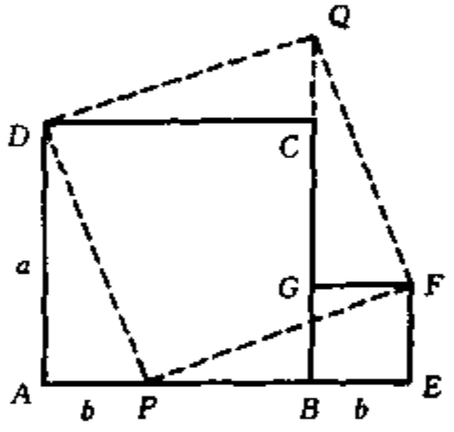


图 18-7

又 $\angle ADP = \angle CDQ$，$\angle ADP + \angle PDC = 90°$，所以，$\angle PDQ = \angle CDQ + \angle PDC = 90°$. 所以 $DPFQ$ 是正方形，且面积 $= a^2 + b^2 = S_{ABCD} + S_{BEFG}$.

说明 由于两个正方形没有规定其位置关系，我们可以取一种便于证明的位置即可. 事实上，两个正方形都可通过平移至图 18-7 所示的位置. 本例可以推广至 n 个正方形可以拼成一个大正方形.

例 7 一张矩形纸，你能折出一个等边三角形吗？请写出你的所有折法，并证明折法的正确性.

解 折法 1 如图 18-8 所示，先把矩形 $ABCD$ 对折，折痕为 MN；再把 B 点叠在折痕 MN 上，得到 $\mathrm{Rt}\triangle AB'E$，沿着 EB' 线折叠，

就得到等边三角形$\triangle EAF$.

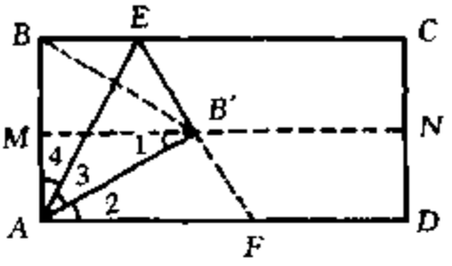


图 18-8

因为$\triangle ABE \cong \triangle AB'E$，则$AB = AB'$，$\angle 4 = \angle 3$. 又$AB' = BB'$，则$AB = AB' = BB'$，$\triangle ABB'$是等边三角形，那么$\angle 4 = \angle 3 = 30°$，$\angle 2 = 30°$，$\angle EAF = 60°$. 又$\angle AEB' = \angle AEB = 60°$，因此$\angle EAF = \angle AEF = \angle AFE = 60°$，所以$\triangle AEF$是等边三角形.

折法 2　在折法 1 中得出B'后，再以AB'和BB'为折痕，得出的$\triangle ABB'$是等边三角形.

折法 3　如图 18-9 所示，先折出适当的折痕AQ(Q须在图 18-9 中的BC上，且保证$\angle QAD \geqslant 60°$)，再折叠出AQ的中垂线MN，进一步把Q点叠在折痕线MN上得$\triangle APQ'$，沿AQ'和QQ'折叠，就得到等边$\triangle AQQ'$.

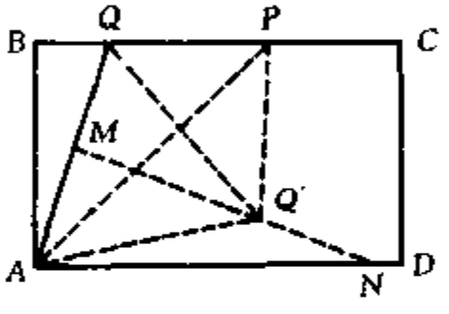


图 18-9

可以由MN和AP分别为AQ和QQ'的中垂线得到证明.

说明　例 7 是《几何》第二册第 178 页上的“做一做”变换叙述形式而得到的. 对这类需要自己给出作图过程再证明的问题，一定要注意每步的作图能否实现.

练　习　题

A　组

一、选择题

1. 如图 18-10 所示，P为正方形$ABCD$内一点，$PA = PB = 10$，并且P点到CD边的距离也等于 10，那么，正方形$ABCD$的面积是(　　).

(A) 196　　(B) 256　　(C) 225　　(D) 169

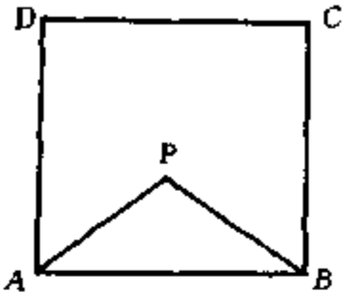


图 18-10

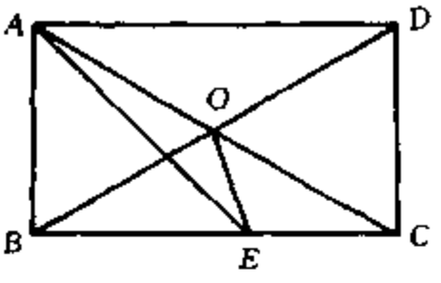


图 18-11

2. 如图 18-11 所示，矩形 $ABCD$ 的对角线相交于 O，AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于 E，$\angle CAE = 15°$，那么 $\angle BOE$ 等于(　　).

(A) 60°　　(B) 45°　　(C) 50°　　(D) 75°

3. 如图 18-12 所示，在菱形 $ABCD$ 中，$AE = AB$，E、F 分别在 BC、CD 边上，且 $\triangle AEF$ 是等边三角形，则 $\angle C$ 的度数是(　　).

(A) 100°　　(B) 120°　　(C) 80°　　(D) 60°

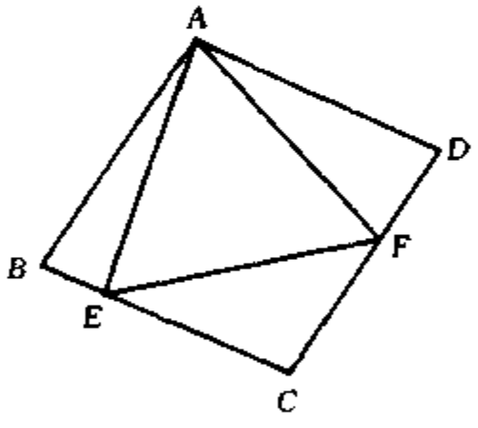


图 18-12

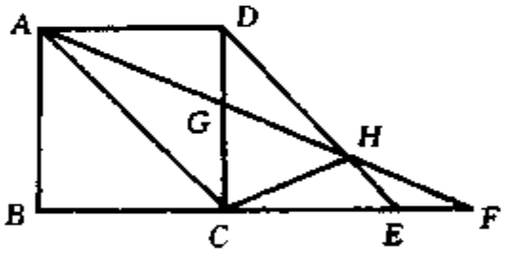


图 18-13

4. 如图 18-13 所示，在正方形 $ABCD$ 中，AC 为对角线，BC 延长线上有两点 E、F，$CE = DC$，$CF = AC$，DE 交 AF 于 H，AF 交 CD 于 G，连接 CH. 图中有非直角的等腰三角形个数为(　　).

(A) 4　　(B) 5　　(C) 6　　(D) 7

二、填空题

5. 如图 18-14 所示，正方形 $ABCD$ 内接于等腰直角三角形 PQR，则 $\dfrac{AQ}{AP} =$ ____.

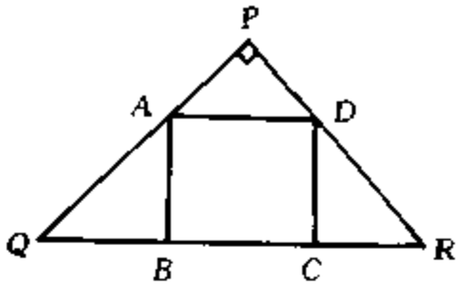


图 18-14

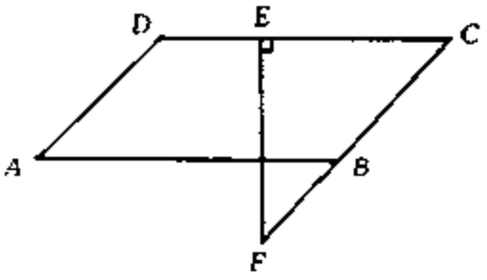


图 18-15

6. 如图 18-15 所示，在$\square ABCD$中，$\angle ABC = 3\angle A$，F在CB的延长线上，$EF \perp DC$于E，$CF = CD$，$EF = 1$. 则DE的长为____.

7. 如图 18-16 所示，在矩形$ABCD$中，$DE \perp AC$于E，$\angle ADE = \frac{1}{3}\angle CDE$. 那么$\angle EDB$的度数是____.

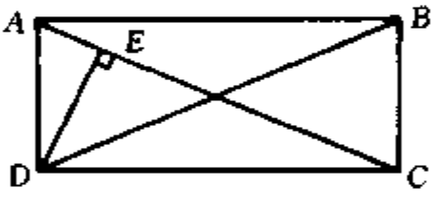


图 18-16

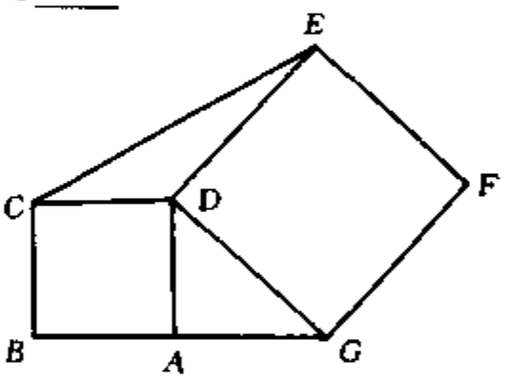


图 18-17

8. 如图 18-17 所示，点A在线段BG上，$ABCD$和$DEFG$都是正方形，其边长分别为 3 cm 和 5 cm. $\triangle CDE$的面积是____cm^2.

B 组

9. 如图 18-18 所示，P为正方形$ABCD$内的一点，且$PA : PB : PC = 1 : 2 : 3$. 求$\angle APB$的度数.

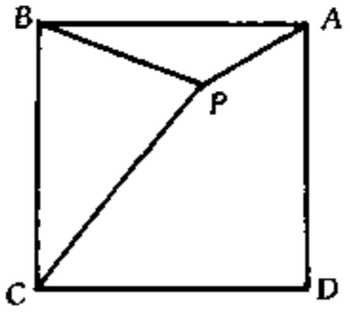


图 18-18

10. 如图 18-19 所示，在$\square ABCD$中，$BE \perp AC$于E，$DF \perp AC$于F，M、N分别为DC、AB的中点. 求证：$EMFN$是平行四边形.

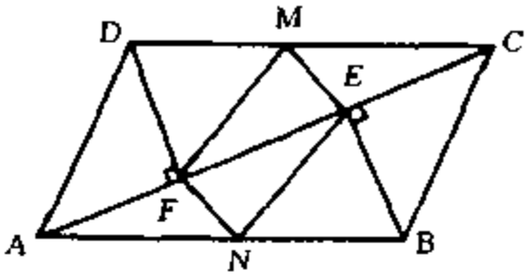


图 18-19

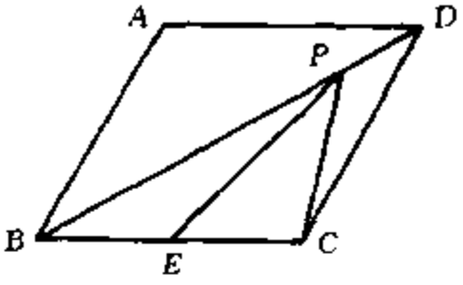


图 18-20

11. 如图 18-20 所示，在菱形 $ABCD$ 中，$AB = 4a$，E 在 BC 上，$EC = 2a$，$\angle BAD = 120°$，P 在 BD 上. 求 $PE + PC$ 的最小值.

12. 如图 18-21 所示，正方形 $ABCD$ 对角线 AC 与 BD 相交于 O，$MN \parallel AB$，且分别与 AO、BO 交于 M、N. 试探讨 BM 与 CN 之间的关系，写出你所得到的结论的证明过程.

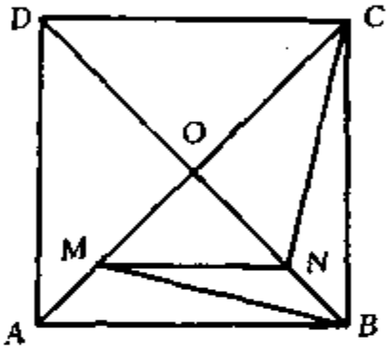


图 18-21

测　试　题

一、选择题

1. (1)两条对角线互相平分且相等的四边形是菱形；(2)两条对角线互相垂直平分且有一组邻边相等的四边形是菱形；(3)两条对角线分别平分两组对角的四边形是菱形；(4)两条对角线互相垂直且有一条对角线平分一组对角的四边形是菱形.

上述 4 个命题正确的有(　　).

(A) (1)、(2)　　(B) (2)、(3)

(C) (3)、(4)　　(D) (2)、(4)

2. 在正三角形、矩形、菱形、正方形、五角星这 5 个图形中，是轴对称图形但不是中心对称图形的有(　　).

(A) 5 个　　(B) 4 个　　(C) 3 个　　(D) 2 个

3. 如图 18-22 所示，在矩形 $ABCD$ 中，$AB = 8$，$BC = 4$，将矩形

沿 AC 折叠，点 D 落在 D' 处，则重叠部分 $\triangle AFC$ 的面积是(　　).

(A) 10　　(B) 16　　(C) 20　　(D) 32

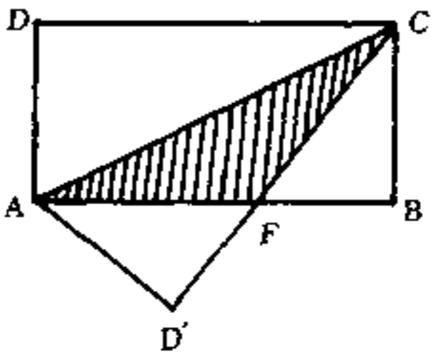


图 18-22

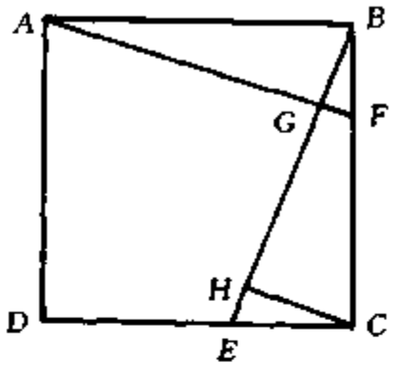


图 18-23

4. 如图 18-23 所示，在正方形 $ABCD$ 中，E 是 CD 上一点，$CH \perp BE$ 于 H，$AG \perp BE$ 于 G 且延长后交 BC 于 F. 那么图中全等形的对数是(　　).

(A) 1 对　　(B) 2 对　　(C) 3 对　　(D) 4 对

5. 在矩形 $ABCD$ 中，M 是 AD 边的中点，N 是 DC 边的中点，AN 与 MC 交于点 P，若 $\angle MCB = \angle NBC + 33°$，那么 $\angle MPA$ 的度数是(　　).

(A) 33°　　(B) 66°　　(C) 45°　　(D) 78°

二、填空题

6. 如图 18-24 所示，已知 $\square ABCD$ 中，$AE \perp BC$，$AF \perp DC$，$BC : CD = 3 : 2$，$AB = EC$，则 $\angle EAF$ 的度数是____.

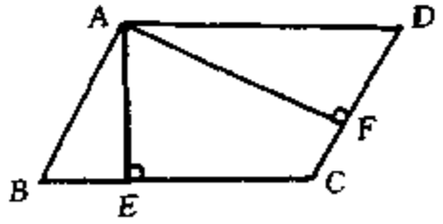


图 18-24

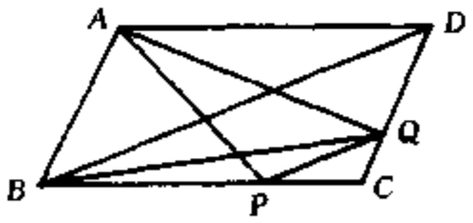


图 18-25

7. 如图 18-25 所示，在 $\square ABCD$ 的 BC 边上，有一点 P(不是 BC 的中点)，过 P 作 $PQ \parallel BD$ 交 CD 于 Q，连结 PA、PD、QA、QB，则

图中与$\triangle ABP$面积一定相等的三角形有____个($\triangle ABP$本身不包括在内).

8. 菱形的一条高等于它的一条对角线的一半,则它最大的一个内角的度数是____.

9. 如图 18-26 所示,已知在边长为 a 的正方形 $ABCD$ 中,E 是 AD 的中点,P 是 CE 的中点,F 是 BP 的中点.那么,$\triangle BFD$ 的面积与正方形 $ABCD$ 的面积之比是____.

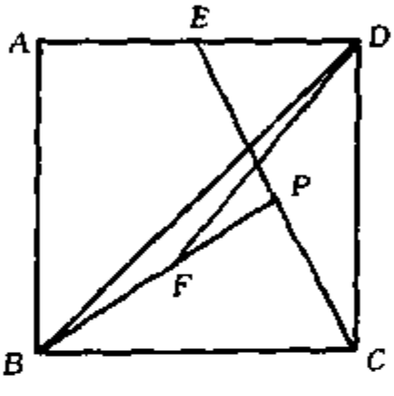


图 18-26

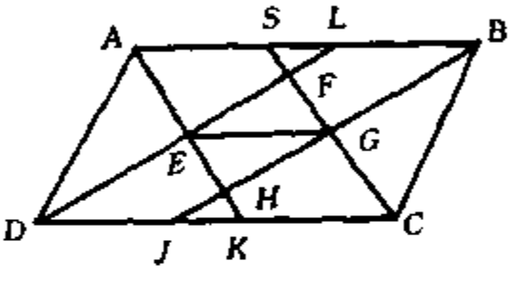


图 18-27

10. 如图 18-27 所示,已知 AK、CS、BJ、DL 为$\square ABCD$ 的内角平分线,E、F、G、H 为它们的交点,$AB = 10$,$AD = 4$,那么 $EG =$ ____.

三、解答题

11. 如图 18-28 所示,Q 是正方形 $ABCD$ 的边 CD 的中点,作 $\angle BAP = 2\angle QAD$,P 在 CD 上.求证:$AP = CP + CB$.

12. 已知 A_1、B_1、C_1、D_1 顺次分别是正方形 $ABCD$ 边上的点,$A_1B_1C_1D_1$ 是矩形,且邻边不相等.求证:$A_1D_1 \parallel BD$.

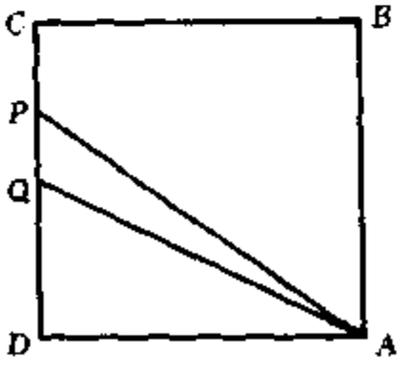


图 18-28

13. 已知有长度分别为 1,2,3,…,1 999 的线段,用这些线段连起来做边,能否构造成一个:(1)正方形?(2)矩形?构造时要求所有这些线段都用到,每条线段不能分断.

第十九讲　梯　　形

知识要点和基本方法

一组对边平行而另一组对边不平行的四边形是梯形.一定要注意“另一组对边不平行”这一限制条件,否则就会误认为“平行四边形是特殊的梯形”.

如果两腰相等或同一底上的两个角相等或对角线相等的梯形是等腰梯形.反之,上述命题也成立.

在解决梯形问题时,常需添辅助线,将梯形转化为三角形或平行四边形问题.图 19-1 至图 19-6 是我们经常需要用到的添辅助线方法.

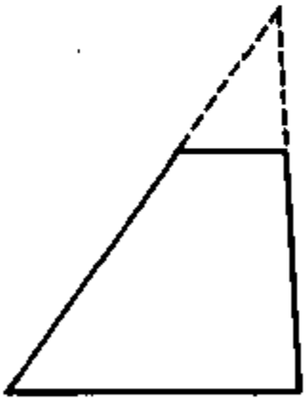


图 19-1

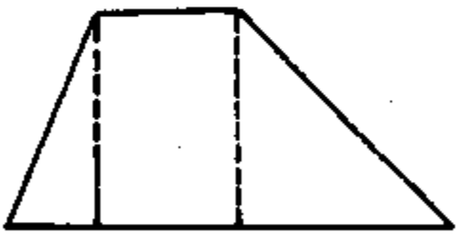


图 19-2

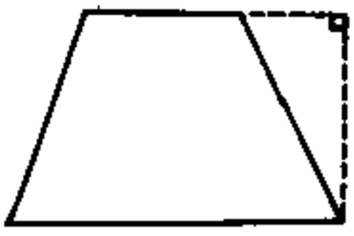


图 19-3

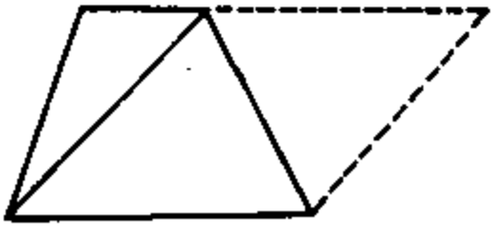


图 19-4

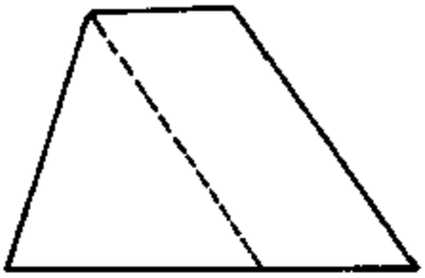


图 19-5

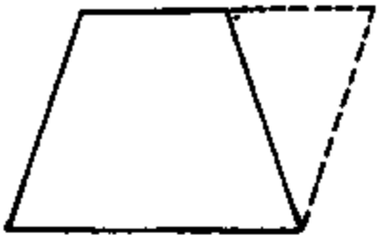


图 19-6

例题精讲

例 1 如图 19-7 所示，在 $Rt\triangle ABC$ 中，E 是斜边 AB 上的中点，$DE \parallel BC$ 交 AC 于 D，$DF \parallel EC$ 交 BC 的延长线于 F. 求证：四边形 $EBFD$ 是等腰梯形.

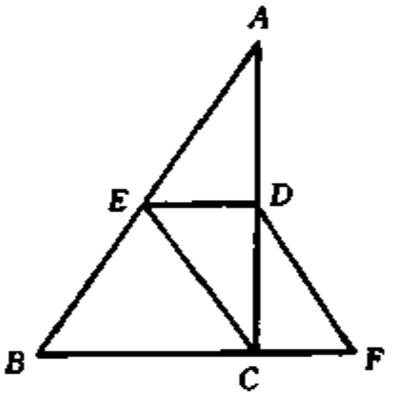


图 19-7

证明 因为 $DE \parallel CF$，$EC \parallel DF$，所以 $ECDF$ 是平行四边形. 则 $DF = EC$.

而 EC 是 $Rt\triangle ABC$ 斜边上的中线，则 $EC = \frac{1}{2}AB = EB$，从而 $DF = EC = EB$.

又由 $EC \parallel DF$，EC 与 EB 相交于 E，可知 EB 与 DF 不平行. 否则过 E 点作 EC、EB 两条直线都与 DF 平行. 这是不可能的.

综上所述，四边形 $EBFD$ 是等腰梯形.

说明 要证明一个四边形是等腰梯形，需证明该四边形满足 3 个条件：1. 一组对边平行；2. 另一组对边不平行；3. 不平行的这组对边相等或平行的这组对边同一底上的两个角相等或两条对角线相等.

例 2 如图 19-8 所示，在直角梯形 $ABCD$ 中，$\angle B = \angle C = 90°$，$AB = BC$. M 为 BC 边上的一点，且 $\angle DMC = 45°$. 求证：$AD = AM$.

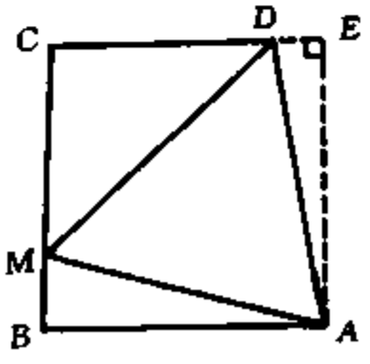


图 19-8

证明 过 A 作 $AE \perp CD$ 交 CD 的延长线于 E. 由 $\angle B = \angle C = \angle E = 90°$，而

$AB = BC$，则 $ABCE$ 是正方形. 那么，$AE = AB = CE$.

又 $\angle DMC = 45°$，则 $\angle CDM = 45°$，$CM = CD$，故有 $BM = DE$. 因此，$\mathrm{Rt}\triangle ABM \cong \mathrm{Rt}\triangle AED$，则 $AM = AD$.

说明 本例也可以过 D 作 $DH \perp AB$ 于 H，转化为证 $\mathrm{Rt}\triangle ABM \cong \mathrm{Rt}\triangle DHA$.

例 3 如图 19-9 所示，在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$AD = BC$，$BD = DC$，$AC \perp BD$ 于 M. 求证：$CM = \frac{1}{2}(AB + DC)$.

证明 作 $BE \parallel AC$ 交 DC 的延长线于 E，作 $BF \perp DC$ 于 F.

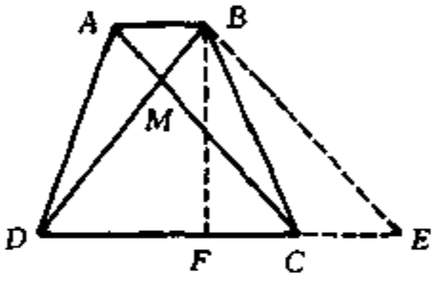


图 19-9

因为 $AB \parallel DC$，所以 $ABEC$ 是平行四边形，则 $AB = CE$，$BE = AC$.

又因为 $AD = BC$，所以 $BD = AC = BE$，则 $DF = FE$.

由于 $AC \perp BD$，$BE \parallel AC$，那么 $BD \perp BE$，且 $BF = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}(DC + CE) = \frac{1}{2}(AB + DC)$.

在 $\triangle DBF$ 和 $\triangle DCM$ 中，$\angle BFD = \angle CMD = 90°$，$\angle BDF$ 公共，$BD = DC$. 因此，$\triangle DBF \cong \triangle DCM$，从而 $CM = BF = \frac{1}{2}(AB + DC)$.

例 4 如图 19-10 所示，在两个直角梯形 $ABPE$ 和 $BCFP$ 中，$\angle A = \angle AEP = \angle C = \angle CFP = 90°$，$BP = PE = PF = 1$，$\angle ABP + \angle CBP = 90°$. 设 $ABPE$ 和 $BCFP$ 的面积分别等于 S_1、S_2. 求证：$1 < S_1 + S_2 < 2$.

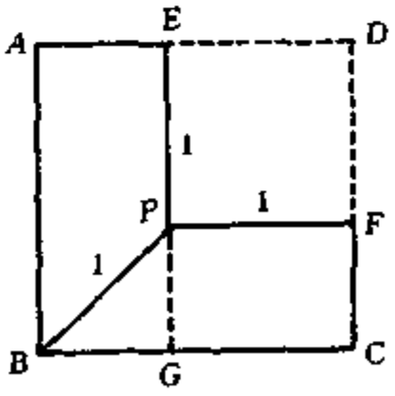


图 19-10

证明 以 PE、PF 为邻边作正方形 $PEDF$，延长 EP 交 BC 于 G.

$$S_1 + S_2 = S_{ABCD} - S_{PEDF} = AB \cdot BC - 1.$$

设 $BG = x$，$PG = y$，则易知 $x + y > 1$. 而 $x^2 + y^2 = 1$，那么

$(x+y)^2=1+2xy\leqslant 2$，$x+y\leqslant\sqrt{2}$.

这时，$S_1+S_2=(1+x)(1+y)-1=(1+x+y+xy)-1=\frac{1}{2}[(1+2xy)+2(x+y)+1]-1=\frac{1}{2}[(x^2+2xy+y^2)+2(x+y)+1]-1=\frac{1}{2}(x+y+1)^2-1$.

而 $x+y>1$，则 $S_1+S_2>\frac{1}{2}(1+1)^2-1=1$. 又 $x+y\leqslant\sqrt{2}$，则 $S_1+S_2\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2-1=\frac{1}{2}+\sqrt{2}<2$.

所以 $1<S_1+S_2<2$.

说明 几何不等式首先是要运用一些几何量建立一些基本不等式，然后对要证的不等式实施变换，转化为代数问题求证.

例 4 如图 19-11 所示，在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AB=a$，$CD=b\,(a>b)$，M 是 DC 延长线上的一点，且 AM 把梯形分成面积相等的两部分. 求 CM 的长.

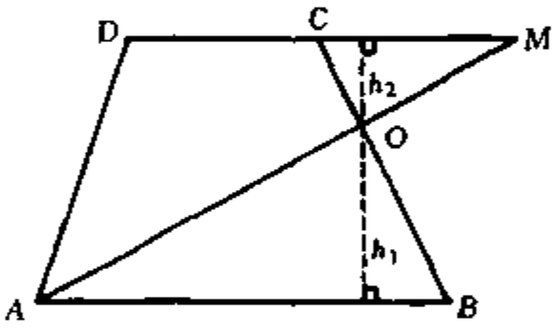


图 19-11

解 设 AM 与 BC 交于 O，O 到 AB、DC 的距离分别为 h_1、h_2. 设 $CM=x$，由题设得

$$\begin{cases}\frac{1}{2}ah_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{2}(h_1+h_2),\\ \frac{1}{2}ah_1+\frac{1}{2}xh_2=\frac{1}{2}(b+x)(h_1+h_2).\end{cases}$$

消去 h_1、h_2 可得 $x=\frac{a(a-b)}{a+b}$，即为 CM 的长.

例 5 如图 19-12 所示，在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AD=DC=BD=a$，$BC=b$，求 AC 的长.

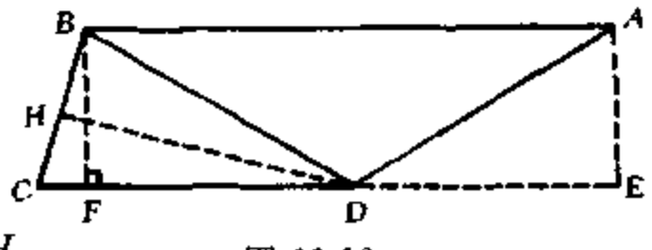


图 19-12

解 过 D 作 $DH\perp BC$ 于 H.

由于 $BD=CD$，则 $BH=\frac{b}{2}$，$HD=\sqrt{BD^2-BH^2}=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$.

又过 B 作 $BF\perp CD$ 于 F. 由于 $\frac{1}{2}BC\cdot HD=\frac{1}{2}CD\cdot BF$，即 $a\cdot BF=b\cdot\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$，$BF=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{1}{4}b^2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{a^2}(a^2-\frac{b^2}{4})}$ $=\frac{2a^2-b^2}{2a}$. 这时 $CE=a+\frac{2a^2-b^2}{2a}=\frac{4a^2-b^2}{2a}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中，$AC=\sqrt{(\frac{4a^2-b^2}{2a})^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-\frac{1}{4}b^2)}=\sqrt{4a^2-b^2}$.

说明 一个几何问题中，若已知了多个几何量，可考虑运用计算的方法解决.

例 6 如图 19-13 所示，在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，记 $S_{\triangle BCD}=S$，$S_{\triangle AOB}=S_1$，$S_{\triangle DOC}=S_2$. 试判断 $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$ 与 $\sqrt{S}$ 的大小，并说明理由.

解 记 $S_{\triangle AOD}=S_3$，$S_{\triangle BOC}=S_4$，则 $S=S_1+S_2+S_3+S_4$.

又 $\frac{S_1}{S_3}=\frac{OB}{OD}$，$\frac{S_4}{S_2}=\frac{OB}{OD}$，则 $\frac{S_1}{S_3}=\frac{S_4}{S_2}$，即 $S_1S_2=S_3S_4$.

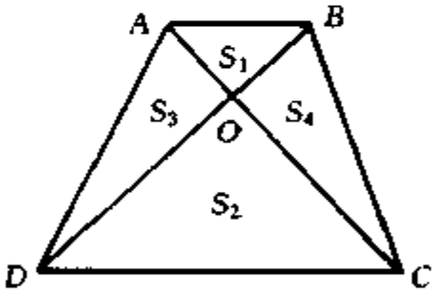


图 19-13

而 $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2-(\sqrt{S})^2=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}-(S_1+S_2+S_3+S_4)=2\sqrt{S_1S_2}-(S_3+S_4)$.

因为 $AB\parallel CD$，则 $S_{\triangle ACD}=S_{\triangle BCD}$，即 $S_2+S_3=S_2+S_4$，那么 $S_3=S_4$.

因此，$2\sqrt{S_1S_2}-(S_3+S_4)=0$，所以 $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}=\sqrt{S}$.

说明 本例若去掉 $AB\parallel CD$，则有 $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\leqslant\sqrt{S}$. 只有

当 $AB \parallel CD$ 时，才能取等号.

练　习　题

A　组

一、选择题

1. 梯形的两条对角线互相垂直，其中一条对角线的长是 5 cm，梯形的高等于 4 cm. 那么，梯形的面积是(　　).

(A) 25 cm^2　　(B) 50 cm^2　　(C) $\frac{50}{3}$ cm^2　　(D) 12.5 cm^2

2. 直角梯形上底是 3，下底是 7，两条对角线中至少有一条长是整数，则这个整数是(　　).

(A) 5　　(B) 7　　(C) 25　　(D) 5 或 25

3. 梯形的高为 12，两条对角线长分别为 15 和 20，则上、下底之和是(　　).

(A) 25　　(B) 16　　(C) 9　　(D) 12.5

4. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，$AB = 5$，$BC = 3\sqrt{2}$，$\angle BCD = 45°$，$\angle CDA = 60°$，则 DC 长度为(　　).

(A) $7 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$　　(B) 8

(C) 9.5　　(D) $8 + \sqrt{3}$

二、填空题

5. 如图 19-14 所示，在梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，$AD = BC$，$AB = 10$，$CD = 4$，延长 BD 到 E，使 $DE = BD$，作 $EF \perp AB$ 交 BA 的延长线于 F，则 $AF =$____.

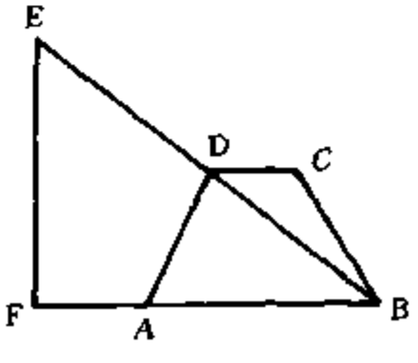


图 19-14

6. 如图 19-15 所示，在梯形 $ABCD$

中，$AD \parallel BC$，$\angle B = 30°$，$\angle C = 60°$，E、F 分别为 BC、AD 的中点，已知 $BC = 7$，$EF = 3$，则 $AD =$ ____.

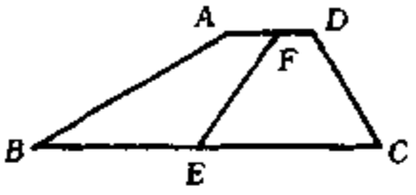


图 19-15

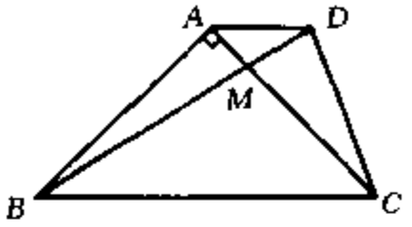


图 19-16

7. 如图 19-16 所示，梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，AC、BD 相交于 M，且 $AB = AC$，$AB \perp AC$，$BC = BD$. 那么，对角线的交角 $\angle AMB$ 的度数是____.

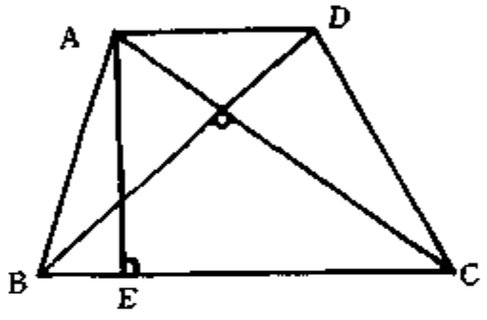


图 19-17

8. 如图 19-17 所示，四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，$AD \parallel BC$，$AC \perp BD$，$AD + BC = 10$，则梯形的高 $AE =$ ____.

B 组

9. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$AC \perp BD$. 求证：$AC^2 + BD^2 = (AB + DC)^2$.

10. 如图 19-18 所示，在直角梯形 $ABCD$ 中，$\angle A = 90°$，$AD \overset{/\!/}{=} \frac{1}{2}BC$，$E$ 为 AB 中点，$DF \perp BC$ 于 F，交 EC 于 G. 问梯形 $ABCD$ 的面积是 $\triangle GFC$ 面积的几倍？证明你的结论.

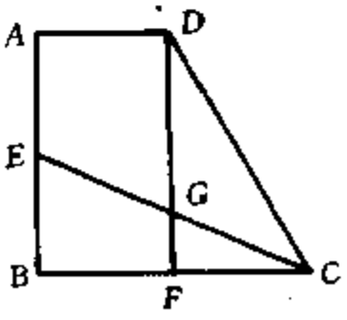


图 19-18

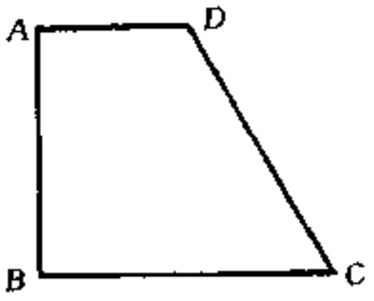


图 19-19

11. 如图 19-19 所示，$ABCD$ 是一块直角梯形的铁板，$AD =$

4 cm，$BC = 10$ cm，$\angle C = 60°$. 问能否将铁板从一个直径为 8.7 cm 的圆洞中穿过？（铁板可任意翻转）

12. 梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AD : BC = 1 : 2$，点 M 在边 AB 上，使 $AM : MB = 3 : 2$，点 N 在边 CD 上，使线段 MN 把梯形分成两部分的面积之比为 3 : 1. 求 $CN : ND$ 的值.

测　试　题

一、选择题

1. 等腰梯形的上底与高的比是 $1 : \sqrt{3}$，下底是上底的 3 倍. 那么，它的下底角度数是(　　).

(A) 30°　　(B) 60°　　(C) 45°　　(D) 75°

2. 如图 19-20 所示，$ABQR$ 是直角梯形，$\angle A = \angle B = 90°$，$P$ 在 AB 上，且 $RP = PQ = a$，$RA = h$，$QB = k$，$\angle RPA = 75°$，$\angle QPB = 45°$，则 AB 等于(　　).

(A) a　　(B) k　　(C) $\dfrac{k+h}{2}$　　(D) h

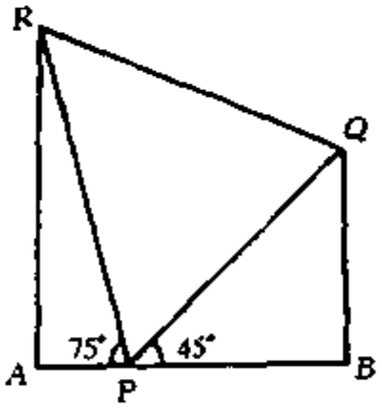


图 19-20

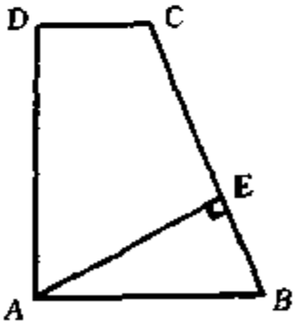


图 19-21

3. 如图 19-21 所示，在直角梯形 $ABCD$ 中，底边 $AB = 13$，$CD = 8$，$AD \perp AB$，且 $AD = 12$. 则 A 到 BC 边的距离为(　　).

(A)12　　(B)13　　(C)10　　(D) $\dfrac{12 \times 21}{13}$

4. 如图 19-22 所示，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$\angle ABC = 60°$，且 $AB = 20$，$AC \perp BD$. 则 $ABCD$ 的周长为(　　).

(A) 100　　(B) $50\sqrt{3}$

(C) $40 + 20\sqrt{3}$　　(D) $60\sqrt{3}$

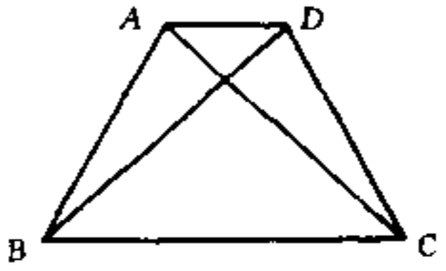


图 19-22

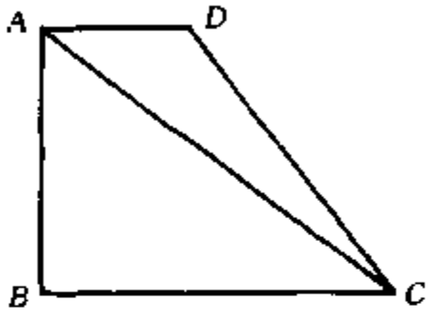


图 19-23

5. 如图 19-23 所示，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB \perp BC$，$BC - AD = 30$，$CD = 50$，$AC = 60$. 则 BC 为(　　).

(A) $10\sqrt{5}$　　(B) $5\sqrt{10}$　　(C) $20\sqrt{5}$　　(D) $20\sqrt{2}$

二、填空题

6. 如图 19-24 所示，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AC \perp CD$，$\angle ABC = 60°$，$CD = 10$，则梯形 $ABCD$ 的面积为____.

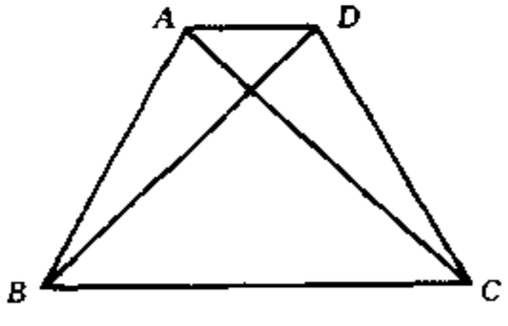


图 19-24

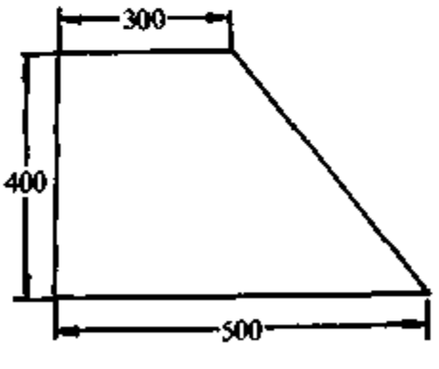


图 19-25

7. 在长为 2.1 m，宽为 1.6 m 的矩形铝板上，要剪出如图 19-25 所示的直角梯形零件(尺寸单位为mm)，则这块铝板最多能剪出这样的零件的个数是____.

8. 直角梯形的一条对角线分得它有一个三角形是等边三角形，

梯形上底长为 a(上底小于下底),那么这个梯形的面积是____.

9. 如图 19-26 所示,在四边形 $ABCD$ 中,$AB \parallel CD$,$\angle C = 75°$,$\angle D = 30°$,$AB = 3$,$AD = 10$,那么 CD 的长是____.

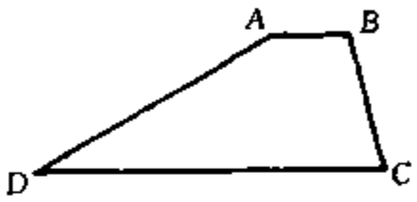


图 19-26

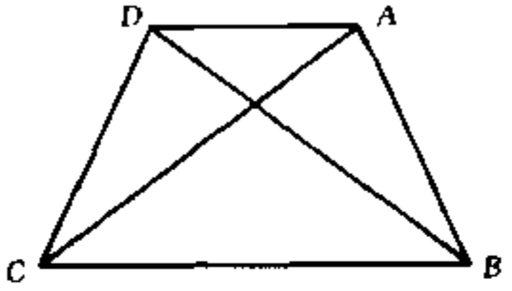


图 19-27

10. 如图 19-27 所示,在梯形 $ABCD$ 中,$AD \parallel BC$,$AC = 6$,$BD = 8$,$AD + BC = 10$,那么梯形的面积是____.

三、解答题

11. 如图 19-28 所示,在梯形 $ABCD$ 中,$AB \parallel CD$,$\angle D = 90°$,E 为 BC 中点,且 $BE = EC = CD$,$\angle AEC = n\angle BAE$. 试求出 n 的大小,并写出推理过程.

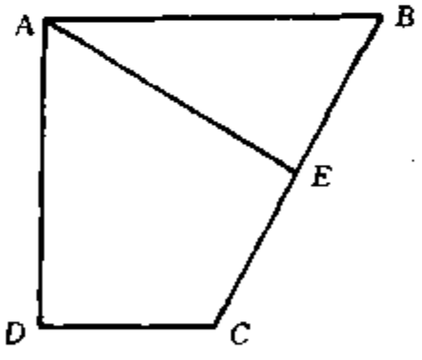


图 19-28

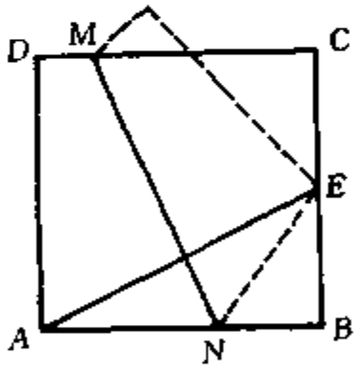


图 19-29

12. 如图 19-29 所示,在正方形 $ABCD$ 中,E 为 BC 中点,折叠正方形,使 A 点与 E 点重合,压平后,得折痕 MN. 设梯形 $ADMN$ 的面积为 S_1,梯形 $BCMN$ 的面积为 S_2,求 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的值.

第二十讲　中位线的应用

知识要点和基本方法

三角形中位线是三角形两边中点的连线，它平行于第三边，且等于第三边的一半. 梯形中位线是梯形两腰中点的连线，它平行于上下两底，且等于上下底和的一半.

三角形中位线和梯形中位线定理都有两个条件和两个结论，条件和结论中的某一个互换，得到的命题都是真命题. 这一点，常用在解题之中.

由已知条件中的中点，可以联想到中位线，则引出相应的辅助线. 这是本讲中作辅助线的特色之一.

例题精讲

例 1　如图 20-1 所示，以 $\triangle ABC$ 的 AB、AC 为斜边向外作直角三角形 ABD 和 ACE，且使 $\angle ABD = \angle ACE$，M 是 BC 的中点. 求证：$DM = EM$.

证明　延长 BD 至 P，使 $DP = DB$；延长 CE 至 Q，使 $EQ = EC$. 连结 AP、AQ、PC、QB.

在 $\triangle ABQ$ 与 $\triangle APC$ 中，易证 $AB = AP$，$AC = AQ$，$\angle PAC = 2\angle DAB + \angle BAC = 2\angle CAE + \angle BAC = \angle BAQ$. 因此 $\triangle ABQ \cong \triangle APC$，则 $PC = BQ$.

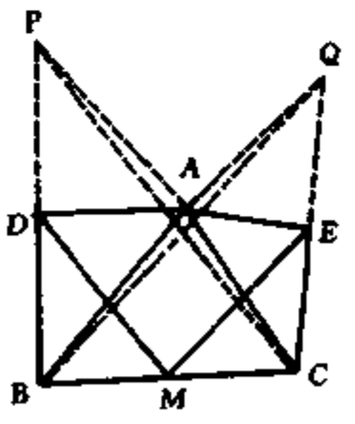


图 20-1

又 MD、ME 分别是 $\triangle BPC$ 与 $\triangle BQC$

的中位线，则 $MD=\frac{1}{2}PC$，$ME=\frac{1}{2}BQ$，故 $MD=ME$.

说明 1. 本例实际是由一道陈述题的条件："以$\triangle ABC$的AB、AC为边向外作等边三角形ABD、ACE"变化而来的. 2. 本例还有很多证法，如取AB的中点R，AC的中点S，连DR、MR、ES、MS，证明$\triangle MDR\cong\triangle EMS$即可.

例2 如图20-2所示，$\angle ABC$的平分线BE与BC边的中线AD垂直且相等. 已知$BE=AD=4$，求$\triangle ABC$的三边.

解 过D作$DF\parallel BE$交AC于F. 由于BE平分$\angle ABC$，$BE\perp AD$，则O是AD的中点. 而D是BC的中点，且$DF\parallel BE$，则F是EC的中点. 那么DF是$\triangle BEC$的中位线，OE是$\triangle ADF$的中位线.

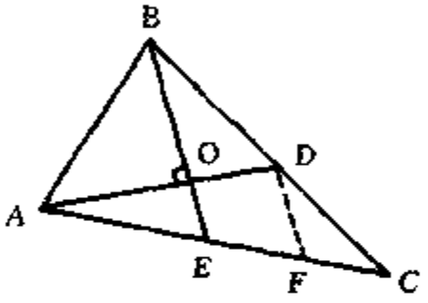


图 20-2

而$BE=4$，则$DF=2$，$OE=1$.

这时$OB=3$，$OD=2$，$BD=\sqrt{OB^2+OD^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，$BC=2\sqrt{13}$.

由于$\triangle ABD$是等腰三角形，$AB=BD=\sqrt{13}$.

在$\mathrm{Rt}\triangle AOE$中，$AE=\sqrt{OA^2+OE^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$. 在$\mathrm{Rt}\triangle ADF$中，$AF=\sqrt{AD^2+DF^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$. 所以$EF=FC=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$，则$AC=3\sqrt{5}$.

因此，$AB=\sqrt{13}$，$AC=3\sqrt{5}$，$BC=2\sqrt{13}$.

说明 由于D是BC的中点，故过D作已知边BE的平行线DF，得出F是EC的中点，使题中的已知条件得到了充分利用.

例3 如图20-3所示，给定凸四边形$ABCD$与形内一点O，且$\angle AOB=\angle COD=120^\circ$，$AO=OB$，$CO=OD$. 设$K$、$L$、$M$为线段$AB$、$BC$、$CD$的中点. 证明：$\triangle KLM$

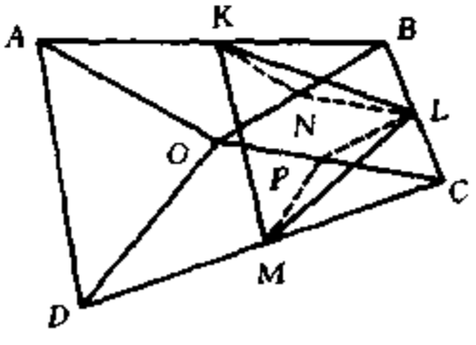


图 20-3

是等边三角形.

证明 取 OB 的中点 N，OC 的中点 P，连结 KN、LN、PM、PL.

因 KN、PL、LN、PM 分别是 $\triangle AOB$、$\triangle BOC$、$\triangle COD$ 的中位线，则 $KN=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}OB=LP$，$LN=\frac{1}{2}CO=\frac{1}{2}DO=MP$，且 $\angle KNL=\angle AOC=120^\circ+\angle BOC=\angle BOD=\angle LPM$，故 $\triangle KNL\cong\triangle LPM$，所以 $KL=LM$.

又 $\angle KLM=\angle KLN+\angle NLP+\angle PLM=\angle KLN+\angle BNL+\angle NKL=180^\circ-\angle BNK=60^\circ$. 因此，$\triangle KLM$ 是顶角为 60° 的等腰三角形，是等边三角形.

例 4 如图 20-4 所示，在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，且 $AB=2CD$. M、N 分别是对角线 AC、BD 的中点. 设梯形 $ABCD$ 的周长为 l_1，四边形 $CDMN$ 的周长为 l_2，且 $l_1=nl_2$，试求出 n 的值.

解 设 MN 所在直线分别交 AD、BC 于 P、Q，延长 DM 交 AB 于 R.

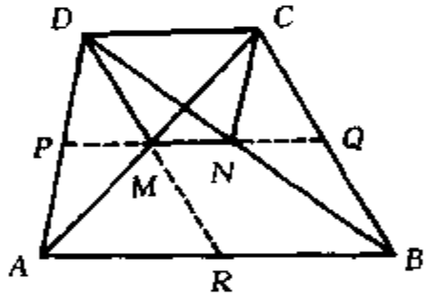


图 20-4

由于 $AB\parallel CD$，M、N 分别是 AC、BD 的中点，则易证 $\triangle AMR\cong\triangle CMD$，那么 M 也是 DR 的中点，MN 是 $\triangle BDR$ 的中位线，则 $MN\parallel AB\parallel CD$. 这时，$PQ$ 是梯形的中位线，PM、NQ 分别是 $\triangle ACD$、$\triangle BCD$ 的中位线，故有 $PM=NQ=\frac{1}{2}CD$，$PQ=\frac{1}{2}(AB+CD)$.

又 $PM=\frac{1}{2}AR=\frac{1}{2}CD$，$AB=2CD$，则 $AR=CD=RB$，那么 $BCDR$ 是平行四边形，从而 $DM=\frac{1}{2}DR=\frac{1}{2}BC$. 同理 $CN=\frac{1}{2}AD$. 所以 $DM+CN=\frac{1}{2}(BC+AD)$. 因此 $l_2=\frac{1}{2}l_1$，即 $l_1=2l_2$，故 $n=2$.

说明 本题是由《几何》第二册第 185 页 B 组第 2 题，挖掘其隐

含的结论得到的，其解法也运用了教材上题目的思路.

例 5 如图 20-5 所示，在四边形 $ABCD$ 中，M、N 分别是对角线 AC、BD 的中点，又 AD、BC 的延长线交于 P. 求证：$S_{\triangle PMN}=\frac{1}{4}S_{四边形ABCD}$.

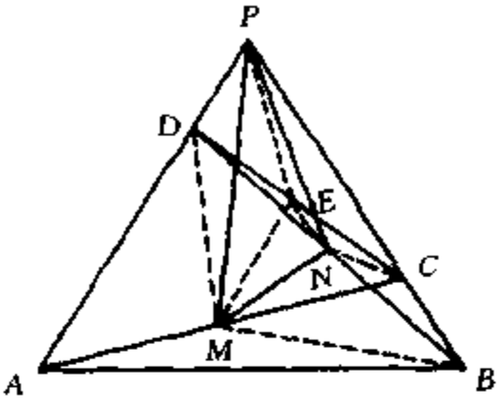


图 20-5

证明 取 CD 的中点 E，连结 PE、EM、EN、DM、CN，则 $EM\ //\ AP$，$EN\ //\ BP$. 这时有 $S_{\triangle EDM}=S_{\triangle PEM}$，$S_{\triangle ECN}=S_{\triangle PEN}$，所以 $S_{\triangle PMN}=S_{四边形DMNC}$ (1).

连接 MB，则 $S_{\triangle DMN}=\frac{1}{2}S_{\triangle DMB}$，$S_{\triangle DNC}=\frac{1}{2}S_{\triangle DCB}$.

因此，$S_{四边形DMNC}=S_{\triangle DMN}+S_{\triangle DNC}=\frac{1}{2}S_{\triangle DMB}+\frac{1}{2}S_{\triangle DCB}=\frac{1}{2}S_{四边形DMBC}$ (2).

又 $S_{\triangle CMD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ACD}$，$S_{\triangle CMB}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，则 $S_{四边形DMBC}=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}$ (3).

由(1)(2)(3)得，$S_{\triangle PMN}=\frac{1}{4}S_{四边形ABCD}$.

说明 等积变形中，较多地要利用中位线的平行性质.

例 6 如图 20-6 所示，在 $Rt\triangle ABC$ 中，D、E、F 分别是三边中点，H 为斜边 AB 上高的垂足，G 是 DH 之中点，设 O 为 AB 上任一点. 求证：$\angle EOF$ 取最大的角便是 $\angle EGF$.

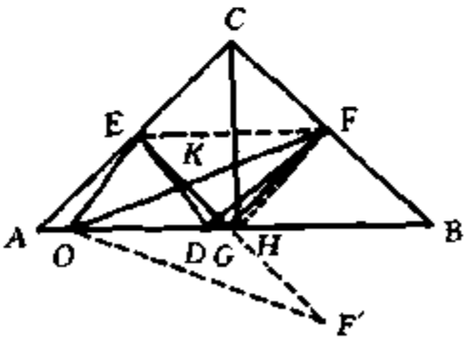


图 20-6

证明 连结 EF，则 $EF\ //\ AB$.

又 $DE\ //\ BC$，则 $\angle EDA=\angle B$，而 $FH=\frac{1}{2}BC=BF$，则 $\angle B=\angle BHF$. 所以 $\angle EDA=\angle BHF$，则 $\angle EDG=\angle FHG$.

又 $DE=\frac{1}{2}BC$，则 $DE=FH$. 且 $DG=GH$，那么 $\triangle DEG\cong\triangle HFG$，所以 $EG=FG$.

延长 EG 至 F'，使 $GF'=GF$，连结 OF'，则易证 $\triangle OFG\cong\triangle OF'G$，$\angle OFG=\angle OF'G$.

在 $\triangle EOF$ 中，$OE<OF'=OF$，那么 $\angle OEG>\angle OF'G=\angle OFG$.

在 $\triangle OEK$ 和 $\triangle GFK$ 中，$\angle EKO=\angle FKG$、$\angle OEG>\angle OFG$，所以 $\angle EOF<\angle EGF$.

练　习　题

A　组

一、选择题

1. 如图 20-7 所示，在四边形 $ABCD$ 中，E、F 分别为对角线 AC、BD 的中点，那么 EF 与 $AB+CD$ 的关系是(　　).

(A) $EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$　　(B) $EF>\frac{1}{2}(AB+CD)$

(C) $EF<\frac{1}{2}(AB+CD)$　　(D) $EF\geqslant\frac{1}{2}(AB+CD)$

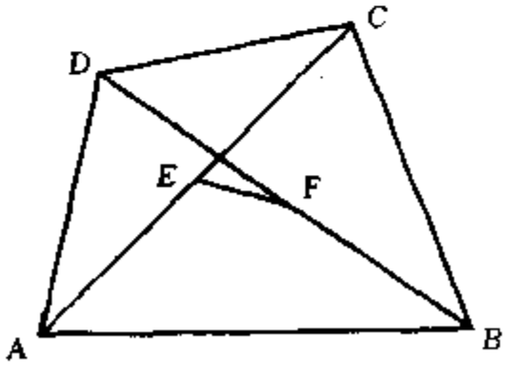


图 20-7

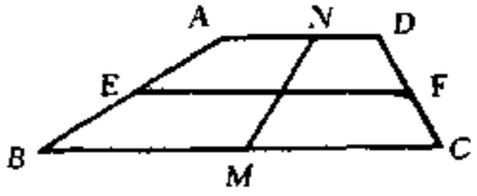


图 20-8

2. 如图 20-8 所示，在梯形 $ABCD$ 中，$AD\ //\ BC$，$\angle B=30°$，$\angle C=60°$，E、M、F、N 分别为 AB、BC、CD、DA 的中点，已知

$BC = 7$，$MN = 3$. 则 EF 的值是(　　).

(A) 4　　(B) $4\frac{1}{2}$　　(C) 5　　(D) 6

3. 如图 20-9 所示，在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$CD = AD + BC$，E、F 分别是 AB、CD 的中点，$\angle DEF = 50°$. 那么 $\angle C$ 的度数是(　　).

(A) 50°　　(B) 60°　　(C) 70°　　(D) 80°

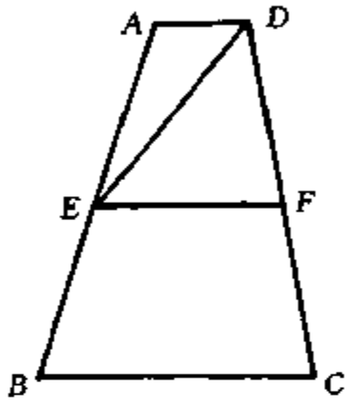


图 20-9

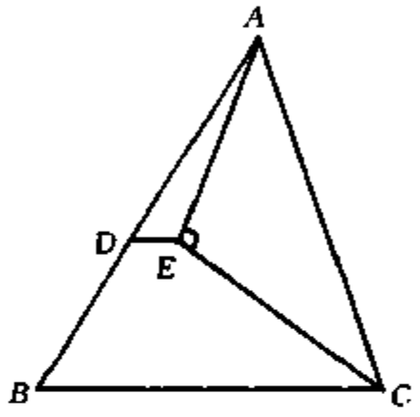


图 20-10

4. 如图 20-10 所示，在△ABC 中，CE 是 $\angle BCA$ 的平分线，D 是 AB 的中点，$AE \perp EC$，$AC = 8$，$BC = 14$. 那么 DE 的长是(　　).

(A) 11　　(B) 5.5　　(C) 3　　(D) 6

二、填空题

5. 如图 20-11 所示，在正方形 $ABCD$ 中，E 是 CD 中点，F 是 AD 中点，连结 BE、CF，它们相交于 P，已知 $\angle CBP = 27°$. 那么 $\angle BAP$ 的度数是____.

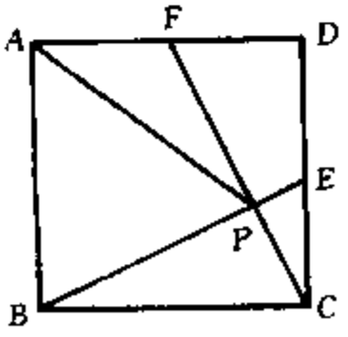


图 20-11

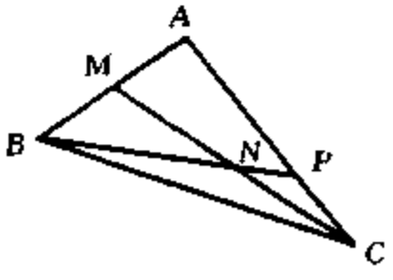


图 20-12

6. 如图 20-12 所示，M、P 分别为$\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上的点，且 $AM = BM$，$AP = 2CP$，BP 与 CM 相交于 N，已知 $PN = 1$. 则 BP 的长是____.

7. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$AD \perp AC$，$AC = 6$，$BD = 8$，则梯形中位线 EF 的长是____.

8. AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线，过 B、C 分别作 AD 的平行线，分别交 CA、BA 的延长线于 E、F，已知$\triangle ABC$ 的面积是 3，则$\triangle DEF$ 的面积是____.

B 组

9. 如图 20-13 所示，已知 M、N 分别是等腰梯形 $ABCD$ 的两底 AD、BC 的中点，E、F 分别是 BM、CM 的中点，且已知 $AD = 4\,\text{cm}$，$BC = 10\,\text{cm}$，$AB = 5\,\text{cm}$. 求四边形 $MENF$ 的面积.

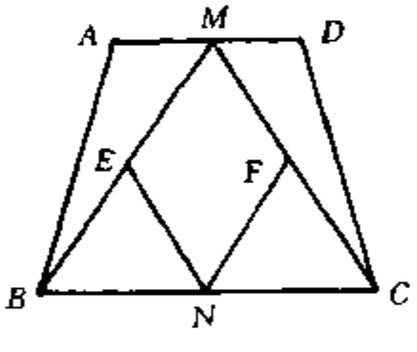


图 20-13

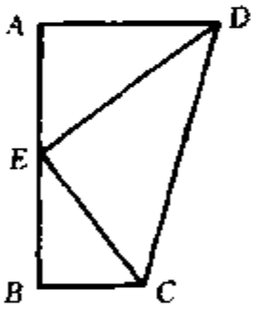


图 20-14

10. 如图 20-14 所示，在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$\angle A = 90°$，E 是 AB 的中点，且 $\angle CED = 90°$. 求证：E 到 CD 的距离等于 EA.

11. 已知 E、G、F、H 分别是凸四边形 $ABCD$ 的边 AD、BC 及对角线 BD、AC 的中点. 问当 $ABCD$ 的边或对角线满足什么条件时，$EFGH$ 是菱形？证明你的结论.

12. 在五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 中，B_1、B_2、B_3、B_4、B_5 分别为 A_1A_2、A_2A_3、A_3A_4、A_4A_5、A_1A_5 的中点，M 为 B_1B_3 的中点，N 为 B_2B_4 的中点. 若 $A_1A_5 = a$，求线段 MN 的长.

测 试 题

一、选择题

1. 如果等腰梯形底角是 45°，高等于上底的 2 倍，那么梯形中位线与高之比为(　　).

(A) 3 : 1　　(B) 3 : 2　　(C) 2 : 3　　(D) 1 : 3

2. 已知梯形两对角线中点连线长 5 cm，梯形下底长 20 cm，则上底长为(　　).

(A) 15 cm　　(B) 30 cm

(C) 10 cm　　(D) 20 cm

3. 如图 20-15 所示，E 是 AC 的中点，D 在边 BC 上，且 $CD = 2BD$，AD 与 BE 相交于 F，$\triangle BDF$ 的面积是 1. 那么，$\triangle ABC$ 的面积是(　　).

(A) 6　　(B) 12　　(C) 5　　(D) 10

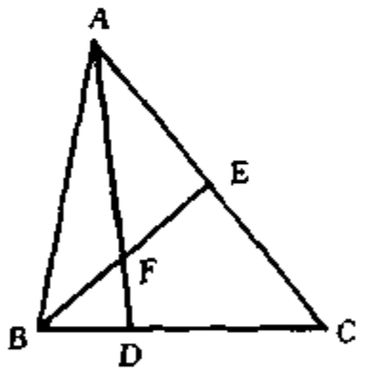


图 20-15

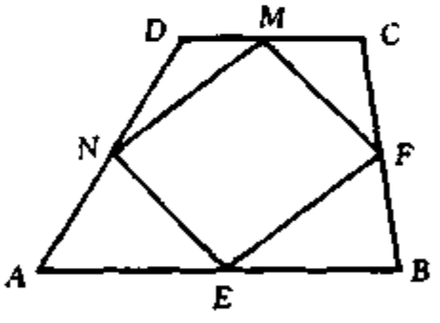


图 20-16

4. 如图 20-16 所示，梯形 $ABCD$ 的面积为 12，则以此梯形四边的中点为顶点的四边形 $EFMN$ 的面积是(　　).

(A) 6　　(B) 8　　(C) 10　　(D) 7

5. 已知梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，对角线 AC 把中位线 EF(E 在 AB 上)分成 1 : 3 两部分，则 $S_{ADFE} : S_{BCFE}$ 为(　　).

(A) 5 : 3　　(B) 4 : 5　　(C) 2 : 3　　(D) 3 : 5

二、填空题

6. 如图 20-17 所示，在梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，EF 是中位线，EF 与 AC 相交于 G，且 $EF = 16\text{ cm}$，$EG - GF = 4\text{ cm}$，则 AB 的长是____cm.

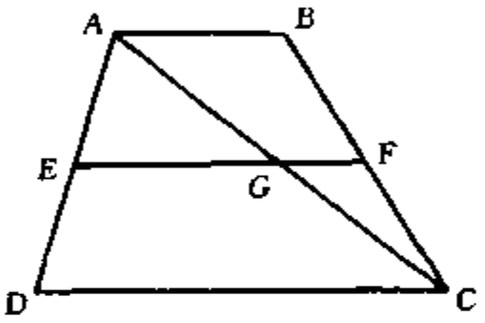


图 20-17

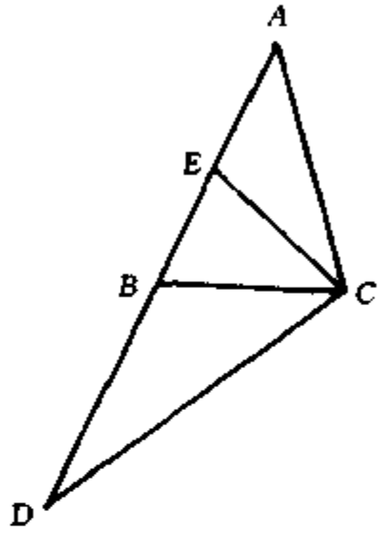


图 20-18

7. 如图 20-18 所示，已知$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，延长 AB 至 D，使 $BD = AB$，E 是 AB 的中点，$CD = 4$，则 $CE =$ ____.

8. 如图 20-19 所示，在$\triangle ABC$ 中，E、F 分别为 AB、AC 上的点，且 $BE = CF$. M、N 分别为 BF、CE 的中点，过 M、N 的直线交 AB 于 P，交 AC 于 Q. 已知 $\angle A = 70°$，那么，$\angle APQ$ 的度数是____.

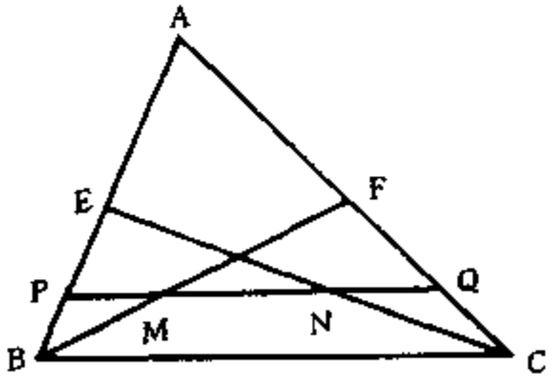


图 20-19

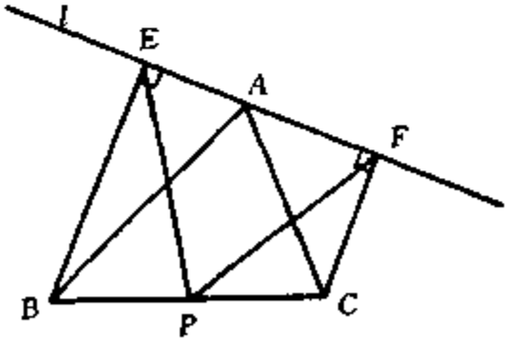


图 20-20

9. 如图 20-20 所示，过$\triangle ABC$ 的顶点 A 作直线 l，过 B、C 引 l 的垂线，垂足分别为 E、F，P 为 BC 的中点，$\triangle PEF$ 的面积是 $\sqrt{2}$，

那么四边形 $BCFE$ 的面积是____.

10. 在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$\angle ABC = 60°$，AC 平分 $\angle DAB$，E、F 分别是对角线 AC、BD 的中点，且 $EF = a$，则梯形的面积是____.

三、解答题

11. 如图 20-21 所示，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC = 2\angle C$，AD 平分 $\angle BAC$，过 BC 的中点 M 作 AD 的垂线，交 AD 的延长线于 F，交 AB 的延长线于 E，求证：$BE = \frac{1}{2}BD$.

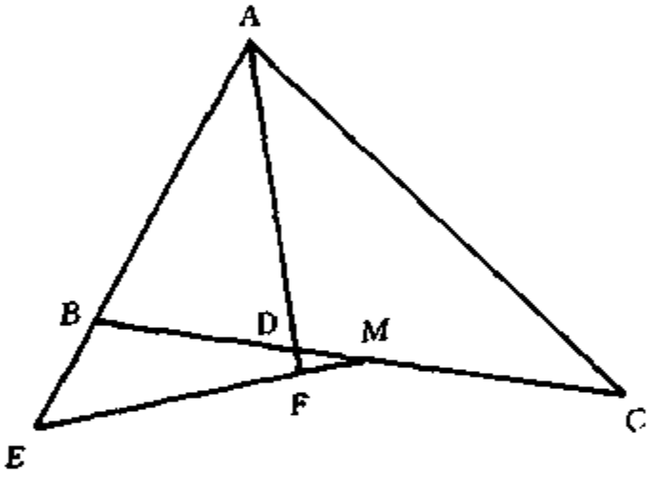


图 20-21

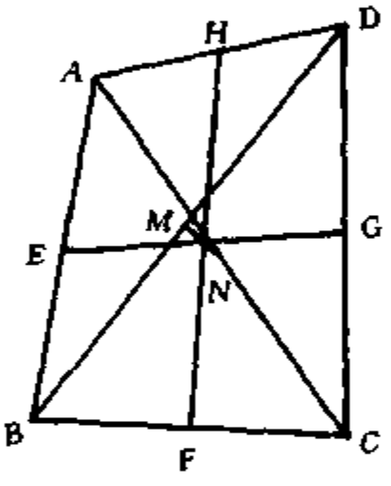


图 20-22

12. 如图 20-22 所示，在四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H、M、N 分别是 AB、BC、CD、DA和 BD、AC 的中点. 求证：EG、HF、MN 三线共点.

13. 如图 20-23 所示，在梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，CE 是$\angle BCD$ 的平分线，$CE \perp AD$，$DE = 2AE$，CE 把梯形分成面积为 S_1、S_2 两部分，求$\frac{S_1}{S_2}$的值.

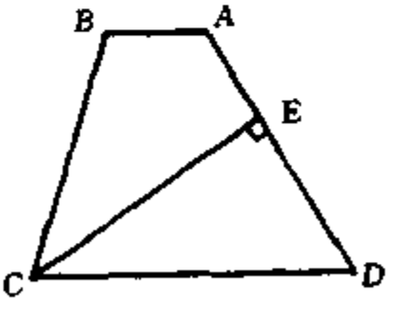


图 20-23

第二十一讲　比例线段

知识要点和基本方法

本讲知识要点包括代数比例式和几何线段比例式两大部分，后者的变换以前者为基础.

若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则 $ad=bc$，这个命题称为比例的基本性质. 它是一切比例性质和比例变换的依据. 由它可变出许多种比例形式.

由 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 可以推出合分比性质：$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$，$\frac{a}{b\pm a}=\frac{c}{d\pm c}$.

由 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$，可以推得 $\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}=\frac{a}{b}(b+d+f+\cdots\neq 0)$，称为等比性质.

如图 21-1 所示，$l_1 // l_2 // l_3$，则 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$. 由此运用比例的性质，结合线段的加减法，可推出一系列的比例式.

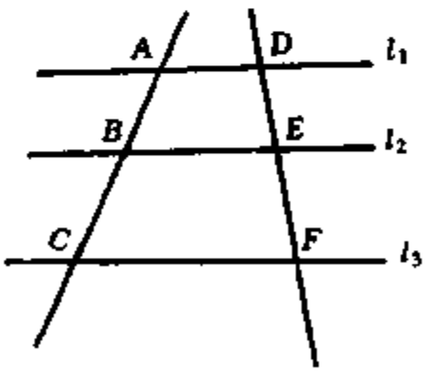


图 21-1

我们将图 21-1 变换为图 21-2，即在 $\triangle ABC$ 中，$DE // BC$，则 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$.

如图 21-3 所示，AD 是 $\triangle ABC$ 的内角 BAC 的平分线，则 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

上述3个几何线段比例式命题，它们的逆命题也成立.

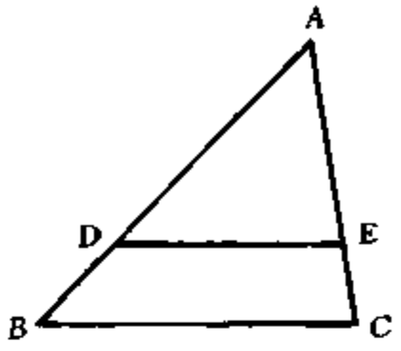


图 21-2

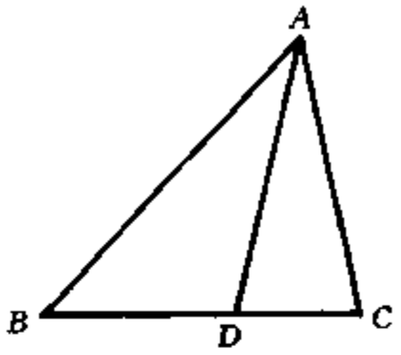


图 21-3

在求比例式中有关值或证明有关问题时，较多地要运用方程解决；而对几何线段比例式，一般要构造有平行线的图形.

例题精讲

例 1 已知 $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$，求 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ 的值.

解 当 $a+b+c=0$ 时，则 $a+b=-c$，$b+c=-a$，$c+a=-b$. 这时 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{-abc}{abc}=-1$.

当 $a+b+c\neq 0$ 时，运用等比性质得：$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$，即 $a+b=2c$，$a+c=2b$，$b+c=2a$，所以：

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{8abc}{abc}=8.$$

说明 也可设 $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}=k$，然后转化为方程组，求出 k 值. 对于已知条件是连比问题，均可设其比值为 k，建立方程解决.

例 2 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，a、b、c 表示各边的长，其中 c 为斜边. 若

$\frac{b}{c+a}+\frac{a}{c+b}=\frac{17}{20}$，求 $a:b:c$.

解 由 $a^2+b^2=c^2$ 得 $c^2-a^2=b^2$.

而 $(c+a)(c-a+b)=c^2-a^2+b(c+a)=b^2+b(c+a)$ $=b(a+b+c)$，那么，$\frac{b}{c+a}=\frac{c-a+b}{a+b+c}$.

同理，$\frac{a}{c+b}=\frac{c-b+a}{a+b+c}$，故 $\frac{b}{c+a}+\frac{a}{c+b}=\frac{2c}{a+b+c}=\frac{17}{20}$，即 $17(a+b)=23c$，两边平方得 $289(a+b)^2=529c^2=529(a^2+b^2)$，即 $120a^2-289ab+120b^2=0$. 分解因式有 $(15a-8b)\cdot(8a-15b)=0$，那么 $\frac{a}{b}=\frac{8}{15}$ 或 $\frac{a}{b}=\frac{15}{8}$.

又因为 $8^2+15^2=17^2$，所以 $a:b:c=8:15:17$ 或 $15:8:17$.

例 3 如图 21-4 所示，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，$\angle B$、$\angle C$ 的平分线相交于 F，且分别交对边于 D、E. 求 $S_{四边形BCDE}:S_{\triangle BFC}$.

解 设 $AB=c$，$AC=b$，$BC=a$. 由内角平分线性质有：$\frac{AE}{EB}=\frac{b}{a}$，则 $\frac{AE}{c}=\frac{b}{a+b}$，$AE=\frac{bc}{a+b}$，$BE=c-AE=\frac{ac}{a+b}$.

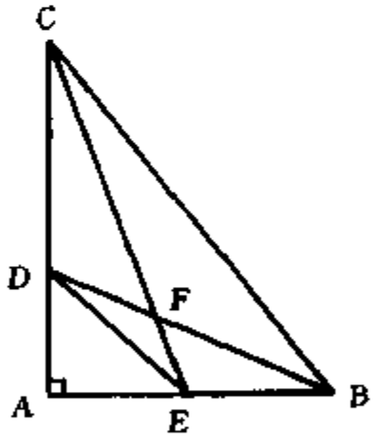


图 21-4

于是，$S_{\triangle CBE}=\frac{1}{2}BE\cdot b=\frac{abc}{2(a+b)}$.

又因为 $\frac{CF}{FE}=\frac{b}{AE}=\frac{a+b}{c}$，$\frac{CF}{CE}=\frac{a+b}{a+b+c}$，所以 $S_{\triangle BCF}=\frac{a+b}{a+b+c}\cdot S_{\triangle CBE}=\frac{abc}{2(a+b+c)}$.

同理，$AD=\frac{bc}{a+c}$，则 $S_{四边形BCDE}=\frac{1}{2}bc-\frac{1}{2}\cdot\frac{bc}{a+c}\cdot\frac{bc}{a+b}=\frac{abc(a+b+c)}{2(a+b)(a+c)}$.

因此，$S_{四边形BCDE}:S_{\triangle BCF}=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(a+c)}$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{a^2+ab+ac+bc}=2 \quad (\text{因为 } b^2+c^2=a^2).$$

说明 运用内角平分线性质，常要结合合比性质，求有关线段的长度.

例 4 如图 21-5 所示，在△ABC 中，$AB=AC$，AD 是高，E 是 AB 上一点，$CF\perp BC$ 交 ED 的延长线于 F，M、N 分别是 DE、DF 的中点. 求证：$\angle MAD=\angle NAD$.

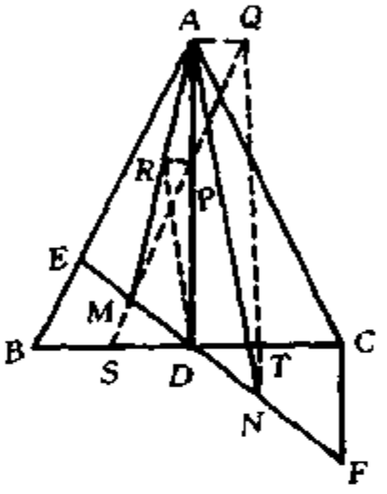


图 21-5

证明 分别取 BD、CD 的中点 S、T，连结 SM、NT，并延长交于点 Q. 设 SQ 交 AD 于 P，连结 AQ.

因为 $AB=AC$，$AD\perp BC$，$CF\perp BC$，所以 $BD=DC$，$AD\parallel CF$，$SD=DT$.

又因为 M、N 分别是 DE、DF 的中点，所以 $SM\parallel AB$，$NT\parallel CF$，这时 $AP=PD$，$NQ\parallel PD$. 那么 $PS=PQ$，$\dfrac{MD}{DN}=\dfrac{MP}{PQ}$.

由 $\dfrac{PA}{PD}=\dfrac{PQ}{PS}=1$ 知道，$AQ\parallel BC$，即 $AQ\perp AD$.

过 P 作 $PR\perp AD$，交 AM 于点 R，连结 RD，则 $PR\parallel AQ$，$RA=RD$. 那么 $\angle MAD=\angle ADR$，$\dfrac{MR}{RA}=\dfrac{MP}{PQ}$，则有 $\dfrac{MD}{DN}=\dfrac{MR}{RA}$，$RD\parallel AN$. 从而 $\angle ADR=\angle NAD$，故 $\angle MAD=\angle NAD$.

例 5 △ABC 中，AD 是角平分线，且 $\angle BAC=120^\circ$. 求证：$\dfrac{1}{AD}=\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}$.

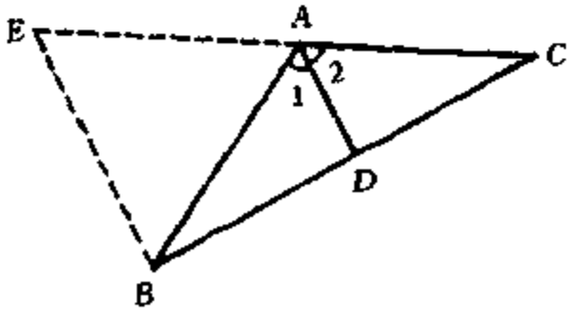


图 21-6

证明 如图 21-6 所示，过 B 作 $BE\parallel AD$，交 CA 的延长线于 E.

由已知条件易知△ABE 是等边三角形，则 $BE=AB$.

因为 $BE \parallel AD$，则 $\frac{AD}{BE}=\frac{CD}{BC}$，$\frac{1}{AD}=\frac{BC}{BE\cdot CD}$.

又因为 AD 平分 $\angle BAC$，则 $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$，即 $\frac{AB+AC}{AC}=\frac{BD+CD}{CD}$，那么 $AB+AC=\frac{BC\cdot AC}{CD}$.

而 $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{AB+AC}{AB\cdot AC}=\frac{BC\cdot AC}{CD}\cdot\frac{1}{AB\cdot AC}=\frac{BC}{CD\cdot AB}=\frac{BC}{BE\cdot CD}$.

因此，$\frac{1}{AD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$.

说明 把结论“$\frac{1}{AD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$”与已知条件“$\angle BAC=120°$”互换，命题成立.

例6 如图 21-7 所示，在$\triangle ABC$中，D、E、F 分别是 AB、BC、AC 的中点，DM、DN 分别是$\angle CDB$和$\angle CDA$的角平分线，MN 交 CD 于 O，EO、FO 的延长线分别交 AC、BC 于 Q、P. 求证：$PQ=CD$.

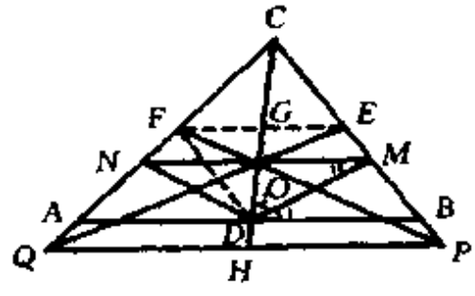


图 21-7

证明 连结 EF，则 $EF \parallel AB$，设 EF 交 CD 于 G，易知 $EG=FG$.

因为 DM 和 DN 是角平分线，所以 $\frac{CM}{BM}=\frac{CD}{BD}=\frac{CD}{AD}=\frac{CN}{AN}$，则有 $MN \parallel AB \parallel EF$，且 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$.

又由平行线知，$MO=NO$ 且 $MO=DO$.

又因为 $\frac{PO}{PF}=\frac{MO}{EF}=\frac{NO}{EF}=\frac{QO}{QE}$，所以 $PQ \parallel EF \parallel AB$. 设 PQ 交 CD 于 H，则 $QH=PH$.

因为 $\frac{CD}{EF}=\frac{CD}{BD}=\frac{CO}{OM}=\frac{CO}{OD}$，$\frac{PQ}{EF}=\frac{PH}{FG}=\frac{PO}{OF}$，连接 DF，则 $DF \parallel BC$，故 $\frac{CO}{OD}=\frac{PO}{OF}$，$\frac{CD}{EF}=\frac{PQ}{EF}$，即 $CD=PQ$.

说明 本例反复运用平行线的分线段成比例定理，同时，证明中

提供了用比例线段证两线段相等的方法.

例 7 如图 21-8 所示,在△ABC 中,AD 与 CF 交于 E,D 在 BC 上,F 在 AB 上,且 $AE \cdot BF = 2AF \cdot DE$. 试判断 AD 是△ABC 的中线、高或角平分线,并说明理由.

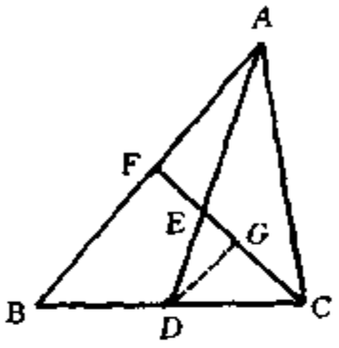


图 21-8

解 AD 是△ABC 的中线. 证明如下:

过 D 作 $DG \parallel AB$ 交 CF 于 G,那么 $\frac{AE}{ED} = \frac{AF}{DG}$.

而由已知 $AE \cdot BF = 2AF \cdot DE$ 得 $\frac{AE}{ED} = \frac{2AF}{FB}$. 因此有:$\frac{AF}{DG} = \frac{2AF}{FB}$,即 $\frac{DG}{FB} = \frac{1}{2}$.

又 $\frac{CD}{BC} = \frac{DG}{FB}$,则 $\frac{CD}{BC} = \frac{1}{2}$,即 D 为 BC 的中点,AD 是△ABC 的中线.

练 习 题

A 组

一、选择题

1. 若 $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$, $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$, $\frac{c}{d} = \frac{4}{5}$. 则 $\frac{ac}{b^2 + d^2}$ 等于(　　).

(A) $\frac{19}{60}$　　(B) $\frac{18}{61}$　　(C) $\frac{7}{54}$　　(D) $\frac{11}{54}$

2. 如图 21-9 所示,在△ABC 中,D、E 是 BC 上的三等分点,点 M 是 AC 上的中点,BM 交 AD 于 G,交 AE 于 H. 则 $BH : GH : HM$ 等于(　　).

(A) 3 : 2 : 1　　(B) 4 : 2 : 1

(C) 5 : 4 : 3　　(D) 5 : 3 : 2

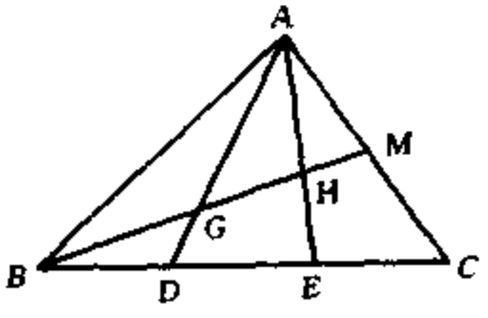


图 21-9

3. 如图 21-10 所示，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle BAD$ 的平分线交 BD 于 E，交 CD 于 F，交 BC 的延长线于 G. 则下列结论中正确的是(　　).

(A) $AE^2 = EF \cdot FG$

(B) $AE^2 = EF \cdot EG$

(C) $AE^2 = EG \cdot FG$

(D) $AE^2 = EF \cdot AG$

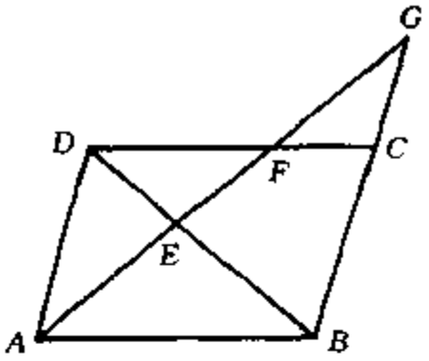


图 21-10

4. 如图 21-11 所示，设 $AF = 10$，$FB = 12$，$BD = 14$，$DC = 6$，$CE = 9$，$EA = 7$，且 $KL \parallel DF$，$LM \parallel FE$，$MN \parallel ED$. 那么 $KD : DN$ 等于(　　).

(A) 5 : 2　　(B) 2 : 5　　(C) 10 : 7　　(D) 7 : 10

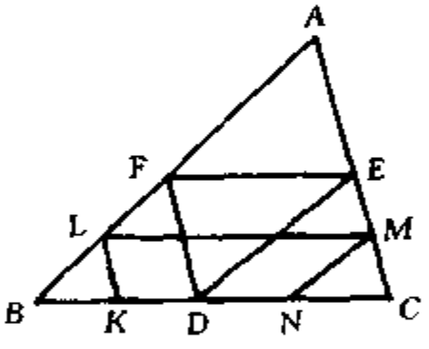


图 21-11

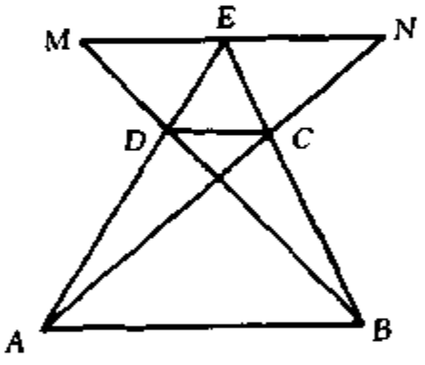


图 21-12

5. 如图 21-12 所示，已知在梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，且 $AB = 7$，$CD = 4$. 延长 AD、BC 交于点 E，过 E 作平行于 AB 的直线，分别交 AC、BD 的延长线于 N、M. 则 MN 等于(　　).

(A) $\frac{32}{9}$　　(B) $18\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{25}{3}$　　(D) $17\frac{3}{4}$

二、填空题

6. 若 a、b、c 为实数，且 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$，则 $\frac{a+b-c}{a-b+c}$ 的值是_____.

7. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，AC 与 BD 交于 O，过 O 作平

行于 AB 的直线交 AD、BC 于 M、N. 若 $AB=5$，$CD=3$，则 $MN=$ _____.

8. 如图 21-13 所示，在 $\triangle ABC$ 中，CD 是 $\angle ACB$ 的平分线，$DE \parallel BC$，若 $BC=a$，$AC=b$，则 $DE=$ _____.

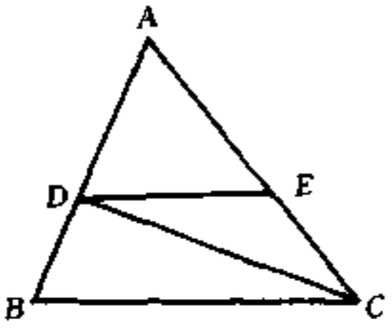


图 21-13

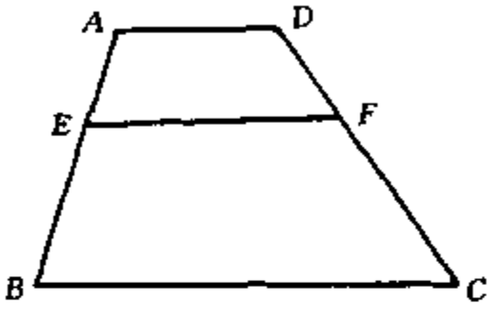


图 21-14

9. 如图 21-14 所示，在梯形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别在腰 AB、CD 上，$EF \parallel AD$，且 $AE:EB=3:5$，$BC=16$，$AD=8$，那么 $EF=$ _____.

B 组

10. 若 $\dfrac{x}{y+z+t}=\dfrac{y}{z+t+x}=\dfrac{z}{t+x+y}=\dfrac{t}{x+y+z}$，记 $f=\dfrac{x+y}{z+t}+\dfrac{y+z}{t+x}+\dfrac{z+t}{x+y}+\dfrac{t+x}{y+z}$. 证明：$f$ 是一个整数.

11. 如图 21-15 所示，在 $\triangle ABC$ 中，D、E 为 AC、AB 上的点，BD、CE 相交于 O，取 AB 的中点 F，连结 OF. 若 $AD=\dfrac{1}{2}CD$，$AE=\dfrac{1}{2}BE$. 求证：$OF \parallel BC$.

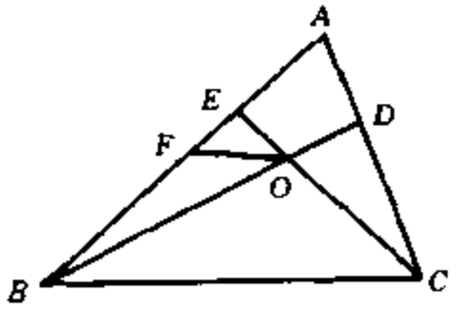


图 21-15

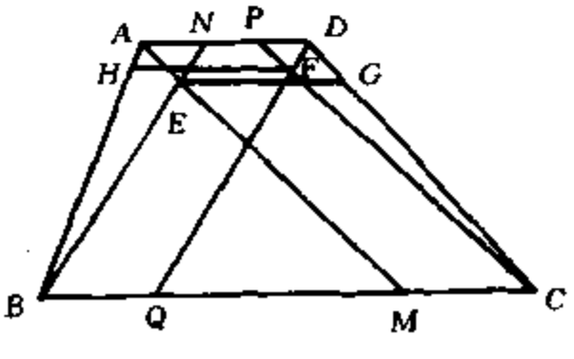


图 21-16

12. 如图 21-16 所示，在梯形 $ABCD$ 中，N、P 和 Q、M 分别是底 AD 和 BC 上的点，有 $CP \parallel AM$，$BN \parallel DQ$，AM、BN 相交于 E，CP、DQ 相交于 F，过 E、F 分别作 AD 的平行线交 CD、AB 于 G、H. 求证：$EG = FH$.

测　试　题

一、选择题

1. 设 a，b，c 是三个互不相同的正数，已知 $\frac{a-c}{b} = \frac{c}{a+b} = \frac{b}{a}$，那么有(　　).

(A) $3b = 2c$　(B) $3a = 2b$　(C) $2b = c$　(D) $2a = b$

2. 如图 21-17 所示，已知△ABC 中，$\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$，$\frac{AE}{EC} = \frac{3}{4}$，$AD$、$BE$ 相交于 F. 则 $\frac{AF}{FD} \cdot \frac{BF}{FE}$ 的值是(　　).

(A) $\frac{7}{3}$　(B) $\frac{14}{9}$　(C) $\frac{35}{12}$　(D) $\frac{56}{15}$

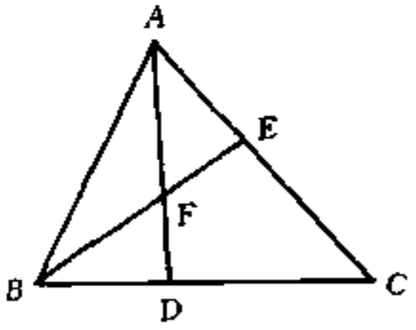


图 21-17

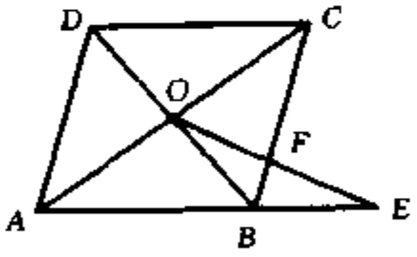


图 21-18

3. 如图 21-18 所示，□$ABCD$ 的对角线 AC、BD 交于点 O，点 E 是 AB 延长线上一点，OE 交 BC 于 F，$AB = a$，$BC = b$，$BE = c$，则 BF 等于(　　).

(A) $\frac{b+c}{a+2c}$　(B) $\frac{bc}{a+2c}$　(C) $\frac{bc}{a+c}$　(D) $\frac{b+c}{a+c}$

4. 如图 21-19 所示，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 在 AB 上，E 在 AC 的延长线上，$BD=3CE$，DE 交 BC 于 F，则 $DF:FE$ 等于(　　).

(A) 5∶2　　(B) 2∶1　　(C) 3∶1　　(D) 4∶1

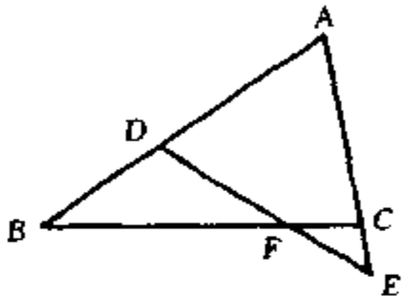


图 21-19

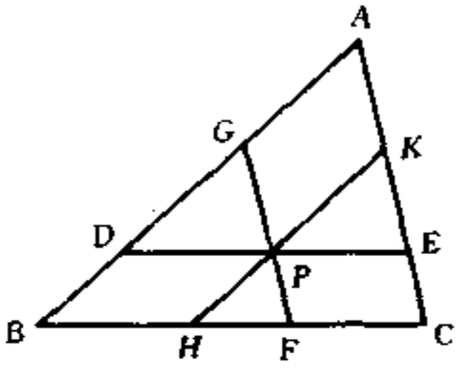


图 21-20

5. 如图 21-20 所示，过$\triangle ABC$ 内任一点 P，作 $DE \parallel BC$，$GF \parallel AC$，$KH \parallel AB$，则$\dfrac{DE}{BC}+\dfrac{FG}{CA}+\dfrac{KH}{AB}$ 的值是(　　).

(A) $\dfrac{3}{2}$　　(B) 2　　(C) $\dfrac{4}{3}$　　(D) $\dfrac{5}{3}$

二、填空题

6. 已知 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\dfrac{2}{3}$，

则$\dfrac{a^{-2}+2^{-2}\cdot c^{-2}+3^{-3}\cdot e^{-2}+4^{-4}\cdot 2^{-2}}{b^{-2}+2^{-2}\cdot d^{-2}+3^{-3}\cdot f^{-2}+4^{-4}\cdot 3^{-2}}$ 的值是_____.

7. 如图 21-21 所示，$ABCD$ 为正方形，A、E、F、G 在同一条直线上，并且 $AE=5$ cm，$EF=3$ cm. 那么 $FG=$ _____cm.

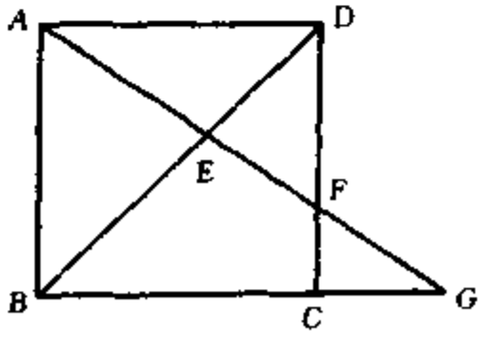


图 21-21

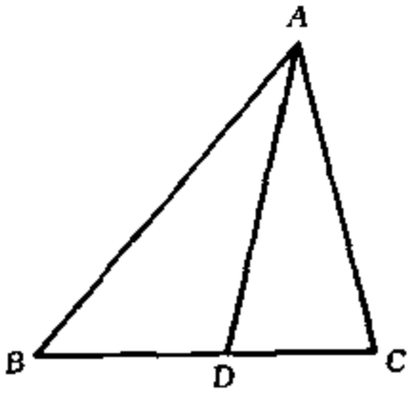


图 21-22

8. 如图 21-22 所示，在△ABC 中，AD 是角平分线，若 $AB+BD=25$，$AC-CD=4$，则 $AD=$_____.

9. 如图 21-23 所示，在△ABC 中，P、Q 分别是 AB 和 AC 边上的点，中线 AM 与 PQ 交于 N. 若 $AB:AP=5:2$，$AC:AQ=4:3$，则 $AM:AN=$_____.

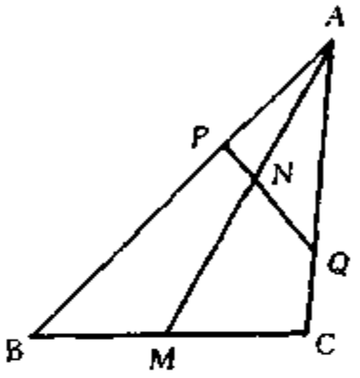


图 21-23

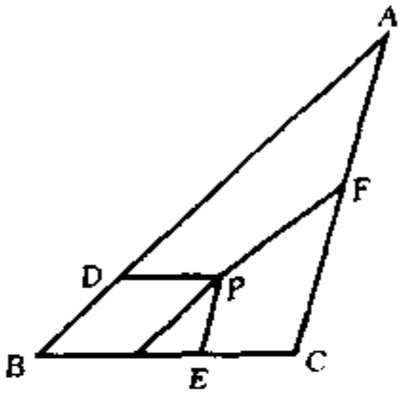


图 21-24

10. 如图 21-24 所示，在△ABC 中，$BC=2$，$CA=3$，$AB=4$，P 是△ABC 内一点，D、E、F 分别在 AB、BC、CA 上，且 $PD\parallel BC$，$PE\parallel AC$，$PF\parallel AB$. 若 $PD=PE=PF=l$，则 $l=$_____.

三、解答题

11. 已知线段 $a=4$，$b=6$，$c=2$，请另确定一条线段 d 的长度，使它们能够构成比例式.

12. 如图 21-25 所示，P 是△ABC 内的一点，等长的三条线段 DE、FG、HI 分别平行于边 AB、BC 和 CA，并且都过 P 点. 已知 $AB=12$，$BC=8$，$CA=6$，求 $AI:IF:FB$ 的值.

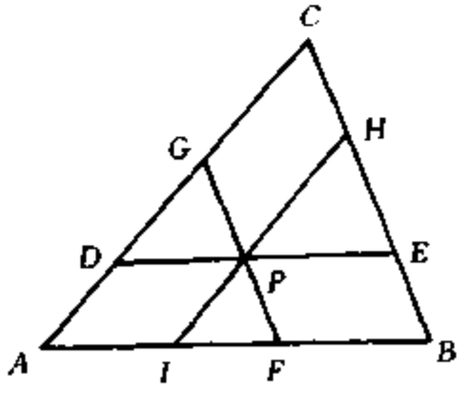


图 21-25

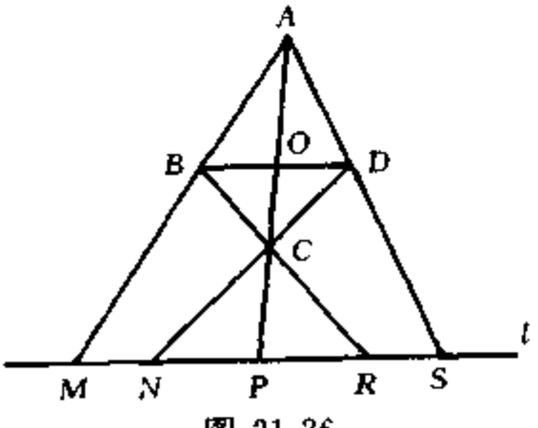


图 21-26

13. 如图 21-26 所示，在四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 相交于 O，直线 l 平行于 BD，且与 AB、DC、BC、AD 及 AC 的延长线分别交于 M、N、R、S 及 P. 求证：$PM \cdot PN = PR \cdot PS$.

第二十二讲　相似三角形

知识要点和基本方法

判定两个三角形相似的主要方法有：两边对应成比例且夹角相等；两角对应相等；三边对应成比例. 如果两个三角形是直角三角形，还可运用“斜边与一直角边对应成比例”的方法.

三角形三中线的交点是它的重心，重心将任一条中线分为 2∶1 两部分，即三角形顶点到重心的距离是重心到相应边中点距离的2倍.

相似三角形的相似比等于它们周长的比、对应中线、高、角平分线的比；相似比的平方等于它们的面积比.

两个多边形相似，必须满足对应角相等、对应边成比例. 有时，可以把两个多边形分割为三角形，它们所有的三角形对应相似，那么这两个多边形也相似.

相似三角形中，较多的问题是证线段成比例，或运用相似三角形作桥梁，证有关角相等、线垂直或平行、求面积等. 解决这些问题的主要方法是要善于分析题中条件和结论特征，发现要证哪两个三角形相似或添置什么样的辅助线，转化为相似三角形.

例题精讲

例 1　已知$\triangle ABC$中，高 AD 在其内部，过$\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的内角平分线的交点 I_1、I_2 引直线分别交 AB、AC 于 E、F. 若 $\angle BAC = 90°$，求证：$AE = AF$.

证明　如图 22-1 所示，连结 DI_1、DI_2，延长 DI_1 交 AB 于 G.

因为 $\angle BAC = 90°$，$AD \perp BC$ 于 D，则 $\mathrm{Rt}\triangle ABD \backsim \mathrm{Rt}\triangle CAD$.

而 I_1、I_2 分别是$\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 内角平分线的交点，故 $\angle I_1DI_2 = 90°$，且 $\frac{DI_1}{DI_2} = \frac{AB}{AC}$，那么 $\triangle DI_1I_2 \backsim \triangle ABC$，所以 $\angle 1 = \angle 2 = \angle B$. 这时，$\angle B + \angle DI_1E = 180°$，则 $\angle BEI_1 + \angle BDI_1 = 180°$. 而 $\angle BDI_1 = 45°$，因此 $\angle BEI_1 = 135°$，$\angle GEI_1 = 45°$，从而 $\angle AFE = 45°$. 故 $\angle AEF = \angle AFE$，所以 $AE = AF$.

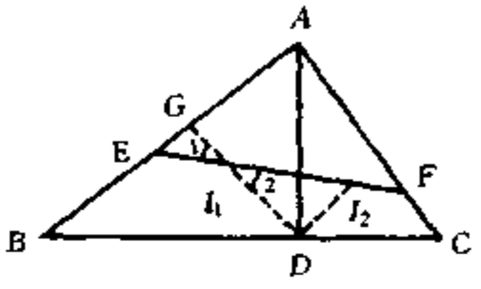


图 22-1

说明 本例的思路是从 Rt$\triangle AEF$ 开始，由于要证 $AE = AF$，则只要证 $\angle AEF = \angle AFE = 45°$，而由 I_1、I_2 是两个三角形内角平分线想到了 $\angle BDI_1 = \angle ADI_1 = 45°$，从而运用了 $\frac{DI_1}{DI_2} = \frac{AB}{AC}$，使 $\triangle DI_1I_2 \backsim \triangle ABC$ 得出结论.

例 2 如图 22-2 所示，P、Q 是矩形 $ABCD$ 的边 BC 和 CD 延长线上的两点，AP 与 CQ 相交于点 E，且使 $\angle PAD = \angle QAD$. 求证：$S_{矩形ABCD} = S_{\triangle APQ}$.

证明 因为 $\angle PAD = \angle QAD$，$AD \perp CQ$，$AD = AD$，所以 $\triangle EAD \cong \triangle QAD$，且 $DQ = DE$.

过 E 作 $EF \parallel BC$ 交 AB 于 F，那么 $\triangle AEF \cong \triangle ADE$，这时 $S_{\triangle ADQ} = S_{\triangle EFA}$.

因为 $AD \parallel PC$，所以 $\triangle AED \backsim \triangle PEC$，则有 $\frac{AD}{PC} = \frac{DE}{CE}$，即 $AD \cdot CE = PC \cdot DE$.

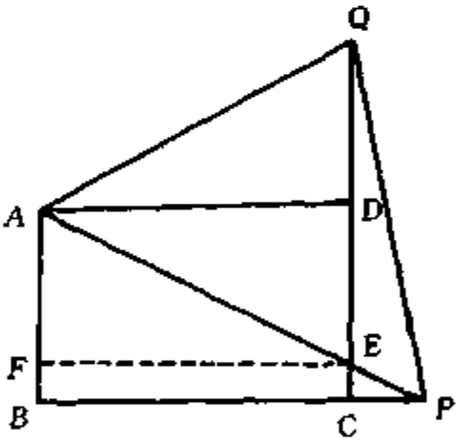


图 22-2

而 $S_{\triangle PEQ} = \frac{1}{2}PC \cdot EQ = PC \cdot ED$，$S_{矩形BCEF} = BC \cdot CE = AD \cdot CE$，所以 $S_{\triangle PEQ} = S_{矩形BCEF}$，因此，$S_{矩形ABCD} = S_{\triangle APQ}$.

说明 运用三角形相似，得出线段间的关系，实现了面积之间相等的沟通.

例 3 如图 22-3 所示，已知 P 为$\square ABCD$ 内一点，O 为 AC 与 BD 的交点，M，N 分别为 PB，PC 的中点，Q 为 AN 与 DM 的交点，求证：(1)P、Q、O 三点在一条直线上；(2) $PQ = 2OQ$.

证明 连结 PO，设 PO 与 AN、DM 分别交于点 Q'，Q''.

在$\triangle PAC$ 中，因为 $AO = OC$，$PN = NC$，则 Q'为重心，$PQ' = 2OQ'$.

在$\triangle PDB$ 中，因为 $DO = BO$，$BM = MP$，则 Q''为重心，$PQ'' = 2OQ''$.

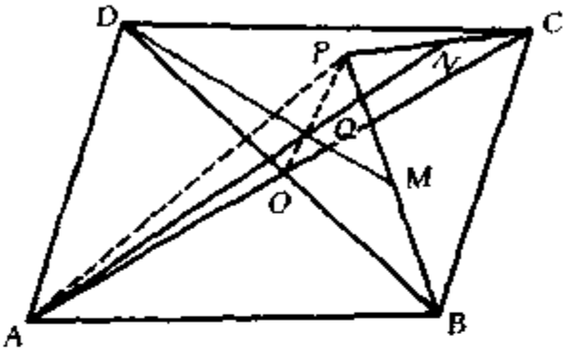


图 22-3

这样 Q'与 Q''重合，并且 Q'、Q''就是 AN、DM 的交点，那么 P、Q、O 在一条直线上，且 $PQ = 2OQ$.

说明 本例证法称为同一法，同一法在证多点共线或多线共点的问题中，比较有效.

例 4 如图 22-4 所示，在$\triangle ABC$ 中，$AB = 2$，$AC = \sqrt{3}$，$\angle A = \angle BCD = 45°$，求 BC 的长及$\triangle BDC$ 的面积.

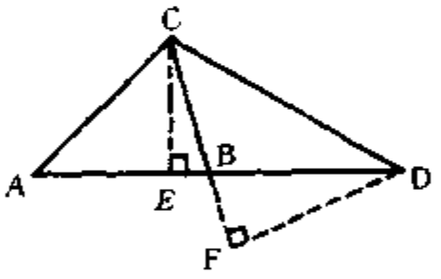


图 22-4

解 过 C 作 $CE \perp AB$ 交 AB 于 E，则 $CE = AE = \frac{\sqrt{2}}{2}AC = \frac{\sqrt{6}}{2}$，那么 $BE = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{4 - \sqrt{6}}{2}$.

又 $BC^2 = CE^2 + BE^2$，则 $BC = \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{6} - 1$.

再过 D 作 $DF \perp BC$ 交 CB 的延长线于 F，并设 $DF = CF = x$，则 $BF = x - BC = x - \sqrt{6} + 1$.

易知 $\mathrm{Rt}\triangle DFB \backsim \mathrm{Rt}\triangle CEB$，则 $\frac{DF}{BF} = \frac{CE}{BE}$，即 $\frac{x}{x - \sqrt{6} + 1} =$

$\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{4-\sqrt{6}}{2}}$，$x=\frac{3+2\sqrt{6}}{2}$. 因此，$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot DF=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-1)\times\frac{3+2\sqrt{6}}{2}=\frac{9+\sqrt{6}}{4}$.

例 5 如图 22-5 所示，在锐角$\triangle ABC$中，BD是AC边上的高，E是AB边上一点，满足$\angle AEC=45°$，$BD=2CE$，$CE=AC+AD$，求证：$DE\parallel BC$.

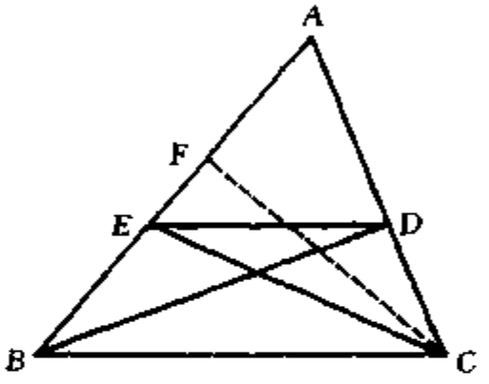


图 22-5

证明 设$AD=x$，$CE=a(0<x<a)$，则$BD=2a$.

在 Rt$\triangle ABD$中，$AB=\sqrt{4a^2+x^2}$.

过C作$CF\perp AB$于F，由$\triangle ABC$是锐角三角形知$\triangle ACE$也是锐角三角形，F必在A、E之间，则$AE=AF+FE$，且$CF=FE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

易知 Rt$\triangle ACF\backsim$Rt$\triangle ABD$得$\frac{AF}{AD}=\frac{AC}{AB}=\frac{CF}{BD}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，故$AF=\frac{\sqrt{2}}{4}AD=\frac{\sqrt{2}}{4}x$，所以$AC=\frac{\sqrt{2}}{4}AB=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{4a^2+x^2}$.

而$CE=AC+AD$，则$AC=CE-AD=a-x$. 因此，$\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{4a^2+x^2}=a-x$，即$7x^2-16ax+4a^2=0$，$(7x-2a)(x-2a)=0$，因$x<a$，故$x=\frac{2}{7}a$. 这时$AF=\frac{\sqrt{2}}{4}x=\frac{\sqrt{2}}{14}a$，$AE=AF+FE=\frac{4\sqrt{2}}{7}a$，$\frac{AD}{AE}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，因此，$\frac{AD}{AE}=\frac{AC}{AB}$，$DE\parallel AB$.

说明 若把结论“$DE\parallel AB$”与条件“$CE=AC+AD$”交换，命题亦成立.

例 6 如图 22-6 所示，在$\triangle ABC$的AB边上取一点D，连接

CD，过 D 作 $DE \parallel BC$ 交 AC 于 E，过 E 作 $EF \parallel CD$ 交 AB 于 F，求证：$AB \geqslant 4DF$.

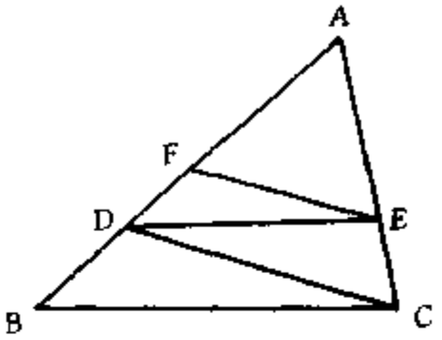


图 22-6

证明 由 $DE \parallel BC$ 得 $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$，且 $\angle EDF = \angle CBD$.

又由 $EF \parallel CD$ 得 $\angle EFD = \angle CDB$，从而 $\triangle DEF \backsim \triangle BCD$，故有 $\frac{DF}{DB} = \frac{DE}{BC}$，那么 $\frac{DF}{DB} = \frac{AD}{AB}$，即 $\frac{DF}{AB-AD} = \frac{AD}{AB}$，$AD^2 - AB \cdot AD + AB \cdot DF = 0$，配方有 $(AD - \frac{1}{2}AB)^2 = \frac{1}{4}AB^2 - AB \cdot DF$.

因为 $(AD - \frac{1}{2}AB)^2 \geqslant 0$，即有 $\frac{1}{4}AB^2 - AB \cdot DF \geqslant 0$，所以 $AB \geqslant 4DF$.

说明 本题建立 AB 与 DF 之间的关系式是解决问题的前提，在建立关系式 $AD^2 - AB \cdot AD + AB \cdot DF = 0$ 后，运用代数分析方法得出结论，又是本题的关键，所以，本例给我们的启示是，几何证明中，不能忽视代数方法的灵活运用.

例 7 如图 22-7 所示，在梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$AB = 125$，$CD = DA = 80$. 问对角线 BD 能否把梯形分成两个相似的三角形？若不能，给出证明；若能，求出 BC、BD 的长.

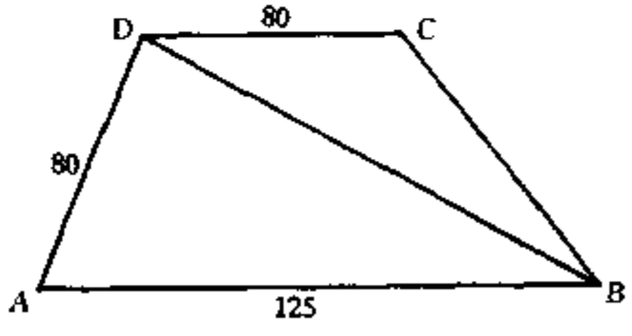


图 22-7

解 首先假定两个三角形相似，看哪条边是 AD 的对应边.

(1) 若 AD 与 DC 成对应边，则相似比为 1，两个三角形全等，其

对应角 $\angle ABD=\angle DBC$，但由 $AB\parallel CD$ 知道，$\angle ABD=\angle BDC$，故 $\angle CBD=\angle CDB$，$\triangle CDB$ 是等腰三角形，从而 $\triangle ABD$ 也是等腰三角形，BD 或为 80 或为 125，这两种情况下均与两三角形全等矛盾，故 AD 与 DC 不能成对应边.

(2) 若 AD 与 BD 成对应边，则 $\angle ABD=\angle BCD$，但 $\angle ABD=\angle BDC$，故 $\angle BCD=\angle BDC$，$\triangle CDB$ 是等腰三角形，从而 $\triangle ABD$ 也是等腰三角形，BD 或为 80 或为 125. 若 $BD=80$，则 $\triangle BCD$ 为正三角形，不可能与 $\triangle ABD$ 相似；若 $BD=125$，则 $BC=125$，与 AD、BD 成对应边矛盾.

(3) 若 AD 与 BC 成对应边，则只有 $\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{BD}{AB}$，即 $\dfrac{BC}{80}=\dfrac{80}{BD}=\dfrac{BD}{125}$，解得 $BD=\sqrt{80\times 125}=100$，$BC=\dfrac{80^2}{BD}=64$.

综上所述，对角线 BD 可以把梯形分成两个相似三角形，此时有惟一解 $BC=64$，$BD=100$.

说明 判定两个三角形是否相似时，一定要考虑对应边能否成比例. 本例中，分情况讨论找出 AD 的对应边，是十分必要的. 若没有(1)(2)，则不能确定本例只有惟一解.

例 8 如图 22-8 所示，AB、CD 交于 E，$DA\parallel EF\parallel BC$，且 $AE:EB=1:2$，$S_{\triangle ADE}=1$. 求 $S_{\triangle AEF}$.

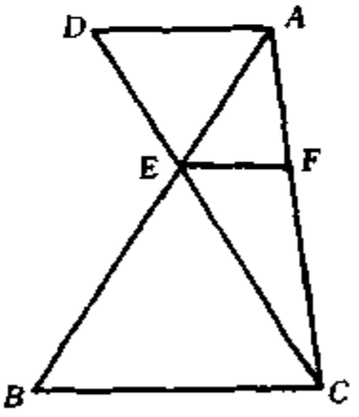


图 22-8

解 因为 $AD\parallel BC$，所以 $\triangle AED\backsim\triangle BEC$，则 $S_{\triangle BEC}:S_{\triangle AED}=4:1$.

设 $S_{\triangle AEF}=m$，由 $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，$AE:AB=1:3$ 得，$m:S_{\triangle ABC}=1:9$，$m:S_{梯形EFCB}=1:8$. 而 $S_{梯形EFCB}=4+S_{\triangle CEF}$. 又 $S_{\triangle CEF}:S_{梯形ADEF}=4:5$，$S_{梯形ADEF}=1+m$. 所以 $8m=S_{梯形EFCB}=S_{\triangle BEC}+S_{\triangle CEF}=4+\dfrac{4}{5}(1+m)$，即 $40m=20+4+4m$，$m=\dfrac{2}{3}$，故 $S_{\triangle AEF}=\dfrac{2}{3}$.

练　习　题

A　组

一、选择题

1. 在直角梯形 $ABCD$ 中，上底 $AD=\sqrt{3}$，下底 $BC=3\sqrt{3}$，与两底垂直的腰 $AB=6$，在 AB 上选取一点 P，使 $\triangle PAD$ 和 $\triangle PBC$ 相似. 这样的点 P（　　）.

(A) 有 1 个　　(B) 有 2 个　　(C) 有 3 个　　(D) 不存在

2. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A=2\angle B$，边 $b=4$，$c=5$，则边 a 等于（　　）.

(A) 6　　(B) 7　　(C) $3\sqrt{5}$　　(D) 5

3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 BD 和 CE 分别是两边上的中线，并且 $BD\perp CE$，$BD=4$，$CE=6$，那么，$\triangle ABC$ 的面积等于（　　）.

(A) 12　　(B) 14　　(C) 16　　(D) 18

4. 梯形 $ABCD$ ($AB\parallel CD$) 的对角线 AC、BD 相交于 O，分别记 $\triangle AOB$、$\triangle BOC$、$\triangle COD$、$\triangle DOA$ 的面积为 S_1、S_2、S_3、S_4，下面结论一定正确的是（　　）.

(A) $S_1+S_3>S_2+S_4$　　(B) $S_1+S_3<S_2+S_4$

(C) $S_1\cdot S_3>S_2\cdot S_4$　　(D) $S_1\cdot S_3<S_2\cdot S_4$

二、填空题

5. 如图 22-9 所示，$EFGH$ 是矩形 $ABCD$ 的内接矩形，且 $EF:FG=3:1$，$AB:BC=2:1$，则 $AH:AE=$ _____.

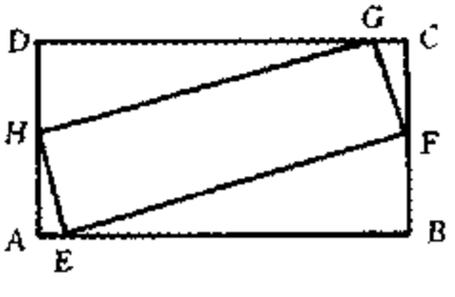


图 22-9

6. 如图 22-10 所示，已知 $\square ABCD$ 中，E 是 AB 的中点，$AB=$

10，$AC=9$，$DE=12$，则$\square ABCD$的面积$S=$_____.

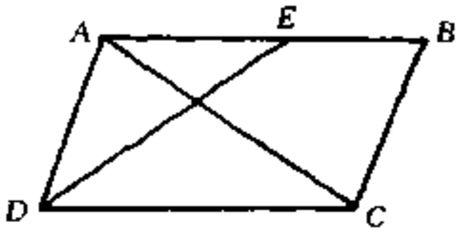


图 22-10

7. 在Rt$\triangle ABC$中，两条直角边AB、AC的长分别为1 cm、2 cm. 那么，直角的角平分线的长度等于_____cm.

8. $\triangle ABC$的三边长为4、5、6. $\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$，且$\triangle A'B'C'$的最长边与最短边之差是1，则$\triangle A'B'C'$的面积为_____.

三、解答题

9. 如图22-11所示，正方形$EFGH$内接于$\triangle ABC$，设$BC=\overline{ab}$（这是一个两位数），$EF=c$，三角形的高$AD=d$. 已知a、b、c、d恰好是从小到大的四个连续整数，试求$\triangle ABC$的面积.

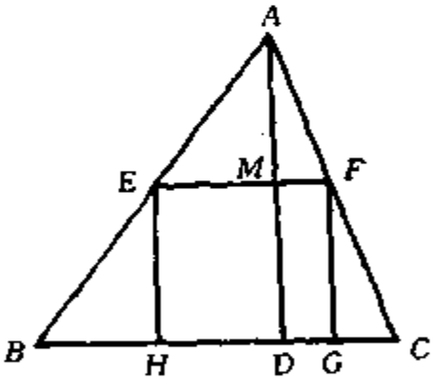


图 22-11

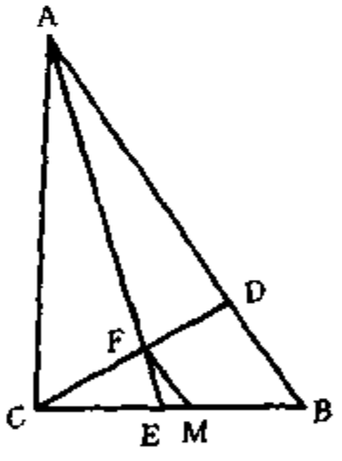


图 22-12

10. 如图22-12所示，AB是Rt$\triangle ABC$的斜边，AE是$\angle CAB$的平分线，$CD\perp AB$于D，交AE于F，$FM\parallel AB$交CB于M. 求证：(1) $\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AB}{AC}$；(2) $CM=EB$.

11. 如图22-13所示，O是四边形$ABCD$对角线的交点，已知$\angle BAD+\angle BCA=180°$，$AB=5$，$AC=4$，$AD=3$，$\dfrac{BO}{OD}=\dfrac{7}{6}$，求$BC$的长.

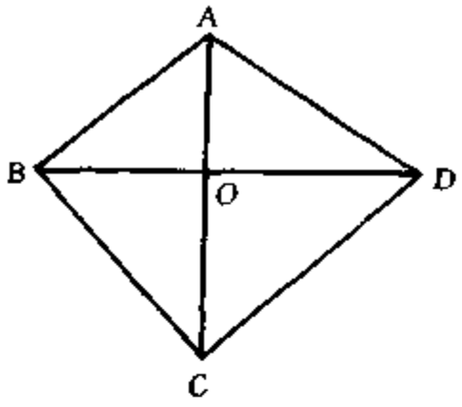


图 22-13

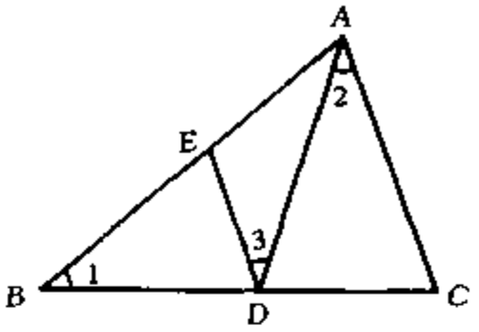


图 22-14

12. 如图 22-14 所示，$\triangle ABC$ 中，D 在 BC 上，E 在 AB 上，且 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$，如果$\triangle ABC$、$\triangle EBD$、$\triangle ADC$ 的周长依次为 m、m_1、m_2，$BD = 6$，$DC = 2$. 求 $\dfrac{m_1 + m_2}{m}$ 的值.

测　试　题

一、选择题

1. 如图 22-15 所示，$\square ABCD$ 中，直线 PS 分别交 AB、CD 的延长线于 P、S，交 BC、AC、AD 于 Q、E、R，图中相似三角形的对数(不含全等三角形)为(　　).

(A) 6　　(B) 7　　(C) 8　　(D) 9

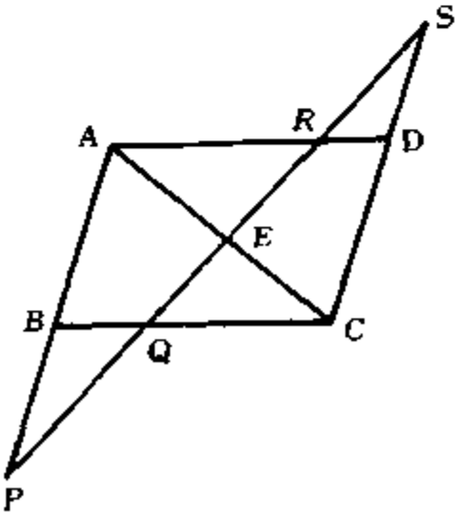


图 22-15

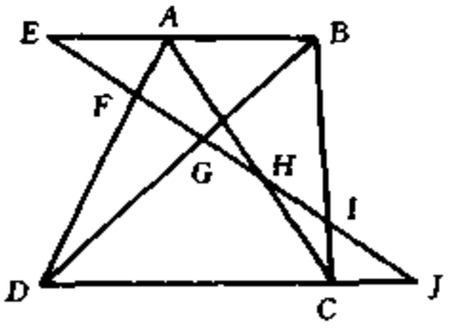


图 22-16

2. 如图 22-16 所示，在梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$AB < CD$，一直线交 BA 的延长线于 E，交 DC 延长线于 J，交 AD 于 F，BD 于 G，AC 于 H，BC 于 I，已知 $EF = FG = GH = HI = IJ$. 则 $DC : AB$ 的值是(　　).

(A) 3 : 1　　(B) 2 : 1　　(C) 3 : 2　　(D) 2 : 3

3. 在等腰△ABC 中，$AB = AC = 6$，P 为 BC 边上一点，且 $PA = 4$，则 $PB \cdot PC$ 等于(　　).

(A) 10　　(B) 15　　(C) 20　　(D) 25

4. 如图 22-17 所示，在△ABC 中，$FM \parallel AB$，$EH \parallel BC$，$DG \parallel AC$，$AD : DE : EB = 3 : 2 : 1$，那么 $S_{\triangle HMP} : S_{\triangle PDE} : S_{\triangle PGF}$ 等于(　　).

(A) 9 : 4 : 1　　(B) 3 : 2 : 1

(C) 4 : 2 : 1　　(D) 6 : 4 : 1

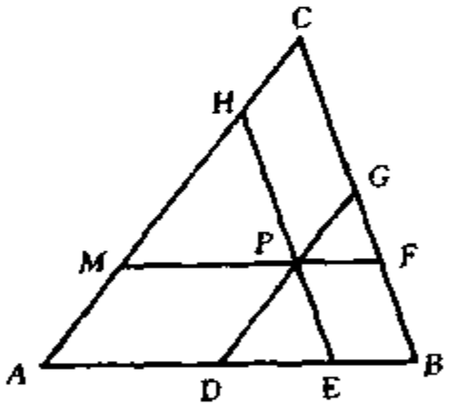


图 22-17

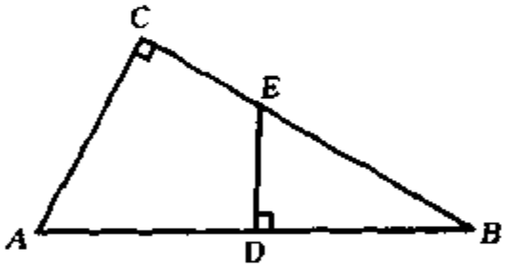


图 22-18

5. 如图 22-18 所示，在△ABC 中，$\angle C = 90°$，$ED \perp AB$ 于 D，$AD = DB$，$AB = 20$，$AC = 12$，则 DE 的长是(　　).

(A) 10　　(B) 8.5　　(C) 9.5　　(D) 7.5

二、填空题

6. 如图 22-19 所示，在 Rt△ABC 中，CD 为斜边 AB 上的高，DE 为 Rt△CDB 斜边 BC 上的高. 若 $BE = 6$，$CE = 4$，则 AD 的长为_____.

7. 如图 22-20 所示，已知 D 是△ABC 的边 AB 上任意一点，

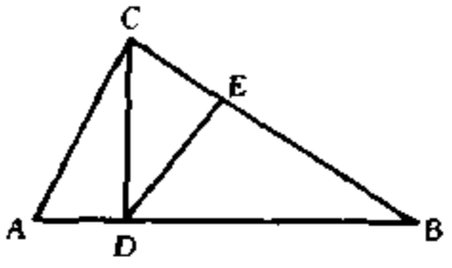


图 22-19

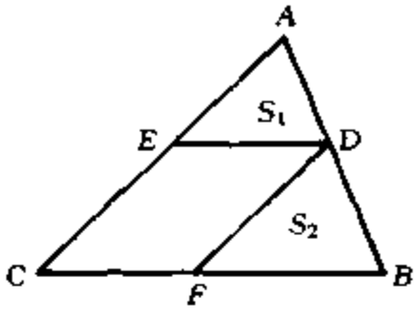


图 22-20

$DE \parallel BC$ 交 AC 于 E，$DF \parallel AC$ 交 BC 于 F. 设$\triangle ADE$ 的面积为 S_1，$\triangle DBF$ 的面积为 S_2. 则$\square DFCE$ 的面积为_____.

8. 如图 22-21 所示，E 是正方形 $ABCD$ 的边 CD 上一点，且 $DE = 2$，点 B 到线段 AE 的距离 $BF = 3$. 则正方形 $ABCD$ 的边长为_____.

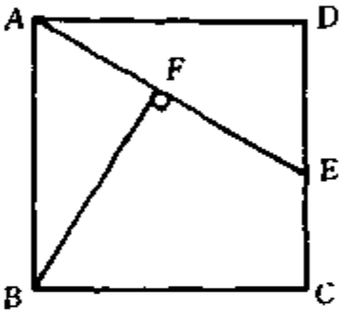


图 22-21

9. 如图 22-22 所示，AD 为$\triangle ABC$ 的角平分线，AD 的垂直平分线交 BC 的延长线于 F，交 AB、AC 于 E、G，若 $AC : AB = 3 : 4$，则 $CF : BF =$ _____.

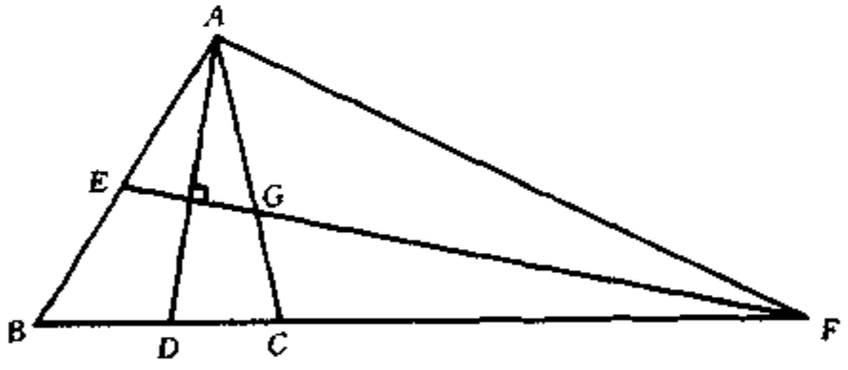


图 22-22

10. 设 $ABCD$ 是边长为 1 的正方体，M 分 AB 之比为 $1 : 2$，N 分 AD 之比为 $2 : 1$. 作正方形 $ABCD$ 外接正方形 $A'B'C'D'$，使其四边分别过 A、B、C、D 四点，且 $A'D' \parallel MN$. 则正方形 $A'B'C'D'$ 的面积为_____.

三、解答题

11. 等腰$\triangle ABC$的顶角$\angle A = 108°$，$BC = m$，$AB = AC = n$，记$x = \frac{m+n}{m-n}$，$y = \frac{(m+n)^2}{mn}$，$z = \frac{m^3}{n^3}$. 试比较x、y、z之间的大小关系.

12. 如图22-23所示，在$\triangle ABC$的中位线DE上任取一点P，射线BP、CP分别交AC、AB于M、N. 求证：$\frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC} = 1$.

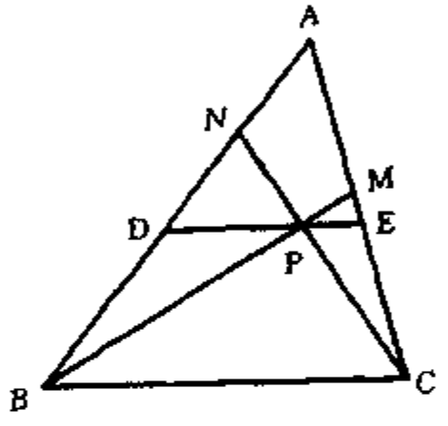


图 22-23

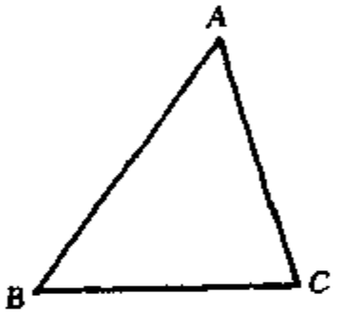


图 22-24

13. 请将图22-24中的$\triangle ABC$剪成6个三角形，使每一个都与原三角形相似(写出剪法，并在图上画出剪切的痕迹).

第二十三讲　平移、对称和旋转

知识要点和基本方法

平移、对称和旋转是解决平面几何问题常用的三种图形变换方法，它们零散地分布在初中几何教材之中. 例如，平行四边形的对边可以看成是平行移动而形成，这里的平行移动，就是平移变换.

一般地，把图形 F 上的所有点都按照一定的方向移动一定距离形成图形 F'. 则由 F 到 F' 的变换叫做平移变换，简称平移. 由此可知，线段平移可以保持长短、方向不变，角、三角形等图形平移保持大小不变. 将平面图形 F 变到关于直线 l 成轴对称的图形 F'，这样的几何变换简称为对称，它可使线段、角大小不变.

将平面图形 F 绕这平面内的一个定点 O 旋转一个定角 α 到图形 F'，由 F 到 F' 的变换简称为旋转. 旋转变换下两点之间的距离不变，两直线的夹角不变，且对应直线的夹角等于旋转角.

运用平移、对称或旋转变换，能够集中图形中的已知条件，沟通各条件间的联系.

例题精讲

例 1　如图 23-1 所示，分别以 $\triangle ABC$ 的边 AB，AC 为边，作正 $\triangle ABG$ 和正 $\triangle ACH$，D、E 分别是 AG、CH 的中点，且 $BF = 3FC$. 求证：$DE = 2EF$.

证明　取 AC 的中点 I 与 BC 的中点 K，连接 AE、KI、IH、KH.

在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle IKH$ 中，$AD = IK$，且 AD 与 IK 的夹角为

60°；$AE=IH$，且 AE 与 IH 的夹角为 60°. 因此，$\triangle ADE \cong \triangle IKH$，$DE=KH$.

又因为 $EF=\frac{1}{2}KH$，所以 $DE=2EF$.

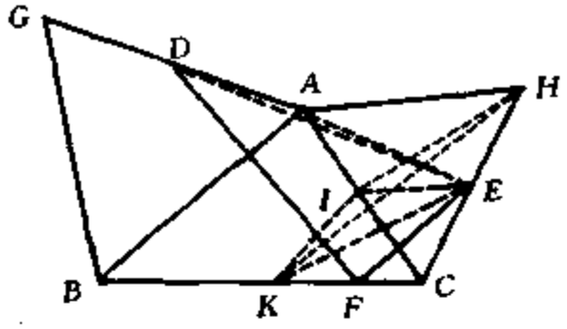


图 23-1

说明 作平行线是平移变换中的一种简单形式. 通过平移，把似乎不相干的角、线段移在一起，便于发现它们之间的联系，为解题架设桥梁.

例 2 已知$\triangle ABC$ 内有一点 M，沿着平行于边 BC 的直线运动到 CA 边上时，再沿着平行于 AB 的直线运动到 BC 边时，又沿着平行于 AC 直线运动到 AB 边时，再重复上述运动. 试证：点 M 最后必能再经过原来的出发点.

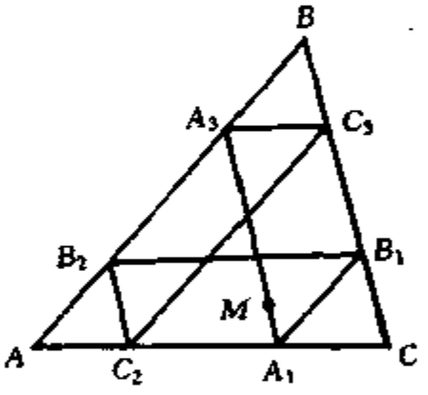


图 23-2

证明 设点 M 运动过程中依次与三角形的边相遇于点 A_1，B_1，B_2，C_2，C_3，A_3，A_4，B_5，…. 易知 $\triangle AC_2B_2 \cong \triangle A_1CB_1 \cong \triangle A_3C_3B$. 按点 M 平移的路线，$\triangle AC_2B_2$ 可由 $\triangle A_1CB_1$ 平移得到；$\triangle A_3C_3B$ 可由$\triangle AC_2B_2$ 平移得到；$\triangle A_1CB_1$ 可由$\triangle A_3C_3B$ 平移得到. 此时，A_3 应平移至 A_4，所以 A_4 与 A_1 重合. 而这时的平移方向恰与点 M 开始平移时的方向一致，因此从 A_3 平移到 A_1 的过程中必经过点 M，这表明在第七步时，点 M 又回到了原来的出发点.

例 3 已知在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle A=20°$，D、E 分别为 AC、AB 上的点，$\angle DBC=60°$，$\angle ECB=50°$. 求$\angle BDE$ 的度数.

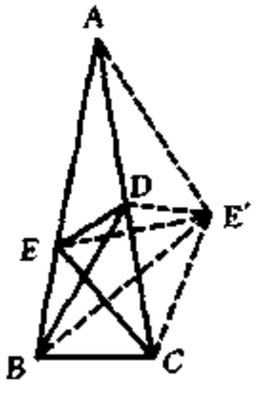


图 23-3

解 如图 23-3 所示，设 E' 为 E 关于 AC 的对称点，连结 $E'A$、$E'B$、$E'C$、$E'D$、$E'E$，可知 $\triangle E'EC$ 是正三角形，BE' 为 EC 的中垂线，D 为

$\triangle ABE'$三内角平分线的交点. 因此，$\angle AE'D = \frac{1}{2}\angle AE'B = 50°$，所以，$\angle AED = 50°$. 所以，$\angle BDE = \angle AED - \angle ABD = 30°$.

说明 在求角的度数问题中，一般运用作点的对称点，构造特殊三角形(正三角形、直角三角形)求解.

例 4 已知$\triangle ABC$中，$AD \perp BC$于D，E为BC中点，且$\angle BAE = \angle EAD = \angle CAD$. 求证：$\triangle ABC$是直角三角形.

证明 如图 23-4，延长AD至A'，使$AD = DA'$.

因为$\angle EAD = \angle CAD$，则$ED = DC$，且$BE = 2ED$，那么E为$\triangle ABA'$的重心.

设F为AE的延长线与BA'的交点. 由于$\angle BAF = \angle FAA'$，所以AF在$\triangle ABA'$中既是角平分线又是中线，则$AB = AA'$，又因为$AB = BA'$，所以$\triangle ABA'$为正三角形. 故$\angle BAC = 60° \times \frac{3}{2} = 90°$，$\triangle ABC$是直角三角形.

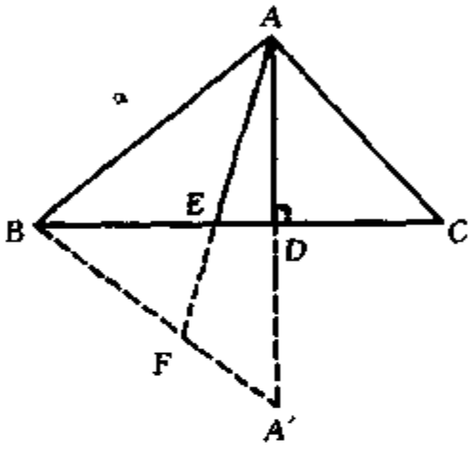


图 23-4

例 5 如图 23-5 所示，$\triangle ABC$是等腰三角形，$AB = AC$，$\angle BAC = 120°$，$\triangle ADE$是正三角形，点D在BC边上，且$BD : DC = 2 : 3$. 若$\triangle ABC$的面积为 50 cm^2，求$\triangle ADE$的面积.

解 将$\triangle ABC$以A为旋转中心逆时针转 120°到$\triangle ACP$的位置，这时，正$\triangle ADE$也旋转到正$\triangle AD_1E_1$位置，且有$CD_1 : D_1P = 2 : 3$，$\triangle D_1AE$也是正三角形，再将$\triangle ABC$沿顺时针方向绕A旋转 120°到APB位置，那么正$\triangle ADE$转到正$\triangle AD_2E_2$的位置，$PD_2 : D_2B = 2 : 3$. 连接E_1D_2、E_2D. 因此$\triangle AE_1D_2$、$\triangle AE_2D$

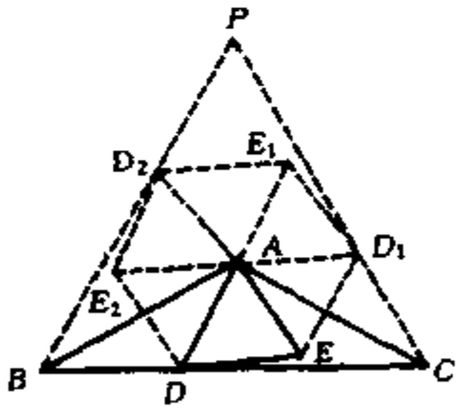


图 23-5

都是正三角形. 这时 $DED_1E_1D_2E_2$ 是正六边形，其面积是 $\triangle ADE$ 的 6 倍，连结 DD_1、D_1D_2、D_2D，正 $\triangle DD_1D_2$ 的面积恰是正六边形 $DED_1E_1D_2E_2$ 面积的一半，那么正 $\triangle BCP$ 的面积为 150 cm^2，$\triangle PBD$ 的面积为 $\frac{2}{5}\times 150 = 60 cm^2$，$\triangle BDD_2$ 面积为 $\frac{3}{5}S_{\triangle PDB} = \frac{3}{5}\times 60 = 36 cm^2$，同样 $\triangle DCD_1$、$\triangle D_2D_1P$ 的面积都是 36 cm^2，所以 $\triangle DD_1D_2$ 面积为 $150 - 3\times 36 = 42 cm^2$. 正六边形 $S_{DED_1E_1D_2E} = 84 cm^2$，$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{6}S_{DED_1E_1D_2E} = 14 cm^2$.

说明 将图形按什么方向旋转多少度，这需要根据题中条件而定，一般说来，旋转之后，要使一些角为特殊角（如 60°、120°、90°等），图形变为特殊图形（如正三角形、正方形等），将分散的已知条件集中起来.

例 6 定点 P 到等边 $\triangle ABC$ 的顶点距离为 $AP = 2$，$BP = 3$. 当此三角形边长、位置都可改变时，求 PC 的最大值，并证明之.

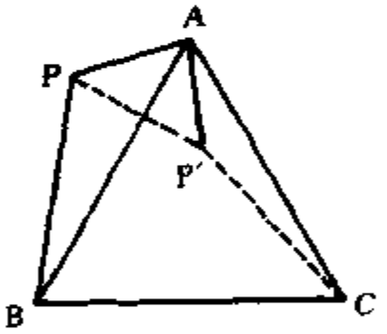


图 23-6

解 如图 23-6 所示，旋转 $\triangle APB$，使 AB 与 AC 重合，P 点到达 P'.

由于 $\angle PAB = \angle P'AC$，因此 $\angle PAP' = \angle BAC = 60°$，$\triangle PAP'$ 是正三角形，$P'C = BP = 3$，所以仅当 P、P'、C 三点共线时，P 与 C 间的距离有最大值，且最大值等于 5.

练 习 题

1. 如图 23-7 所示，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\angle ABC = 66°$，$\triangle ABC$ 以 C 为中心旋转到 $\triangle A'B'C'$ 的位置，顶点 B 在斜边 $A'B'$ 上，$A'C$ 与 AB 相交于 D. 求 $\angle BDC$.

2. 如图 23-8 所示，长为 1 的两条线段相交于点 O，且 $\angle AOC = 60°$. 证明：$AC + BD \geqslant 1$.

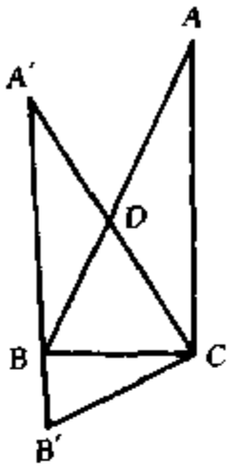


图 23-7

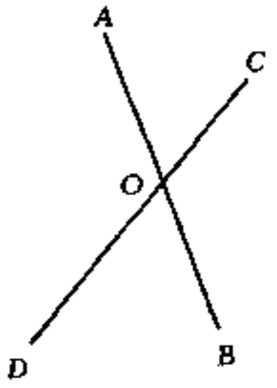


图 23-8

3. 如图 23-9 所示，在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，O为图形内一点，$\angle BAC = 80°$，$\angle OBC = 10°$，$\angle OCB = 20°$，求$\angle CAO$的度数.

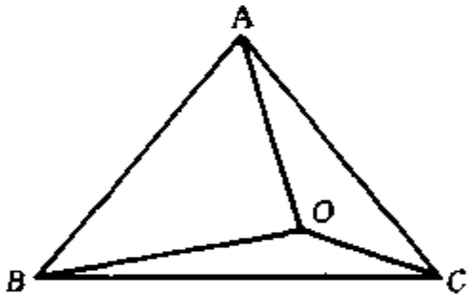


图 23-9

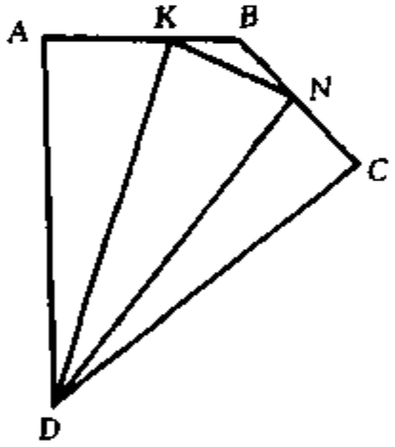


图 23-10

4. 如图 23-10 所示，在四边形$ABCD$中，$AB = BC$，$\angle A = \angle C = 90°$，$\angle B = 135°$，$K$为$AB$上一点，$N$为$BC$上一点. 若$\triangle BKN$的周长等于$AB$的 2 倍，求$\angle KDN$的度数.

5. 如图 23-11 所示，在$\triangle ABC$中，AT平分$\angle BAC$，$BE \perp AT$于E，$CF \perp AT$于F，且M是BC的中点，求证：$ME = MF$.

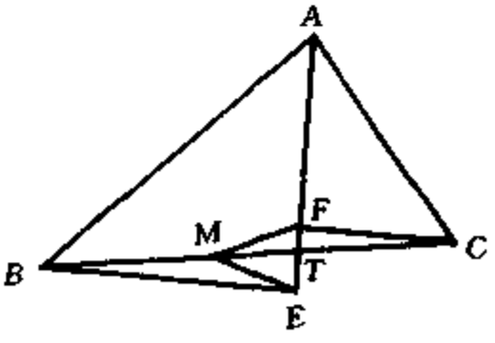


图 23-11

6. 如图 23-12 所示，已知 P 为正方形 $ABCD$ 内一点，且 $PA:PB:PC=1:2:3$. 求 $\angle APB$ 的度数.

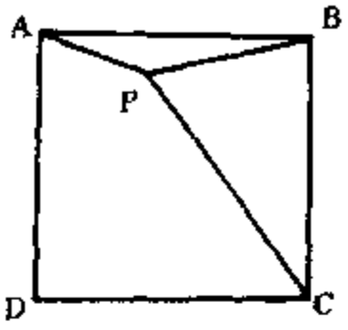


图 23-12

7. 如图 23-13 所示，已知等边三角形 ABC，在边 AC 的延长线上取一点 E，以 CE 为边作等边三角形 CDE，它与 $\triangle ABC$ 位于直线 AE 的同一侧，点 M 为线段 AD 的中点，点 N 为线段 BE 的中点. 求证：$\triangle CMN$ 为等边三角形.

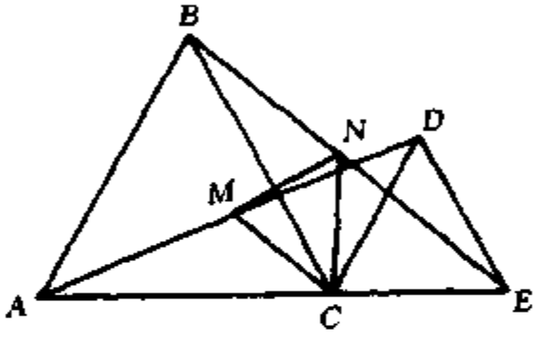


图 23-13

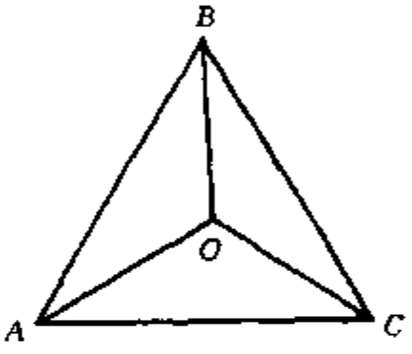


图 23-14

8. 如图 23-14 所示，设 O 是等边 $\triangle ABC$ 内一点，已知 $\angle AOB=115°$，$\angle BOC=125°$，求以线段 OA、OB、OC 为边构成的三角形的各角大小.

测 试 题

1. 在矩形 $ABCD$ 内任取一点 M，求证：存在一个四边形，它的边长等于 MA、MB、MC、MD，且它的对角线互相垂直且长度分别等于 AB、BC.

2. 如图 23-15 所示，E、F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上的点，且 $BE+DF=EF$. 求 $\angle EAF$ 的度数.

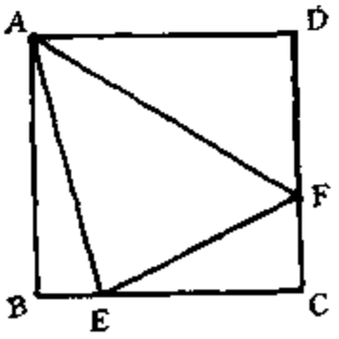


图 23-15

3. 如图 23-16 所示，在 $\square ABCD$ 中，$BC=2AB$，$CE\perp AB$，F 为 AD 的中点，且

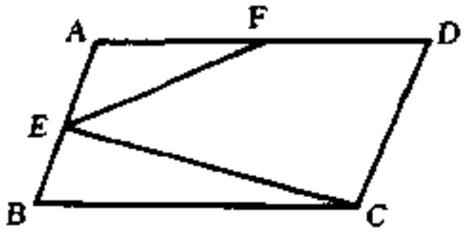


图 23-16

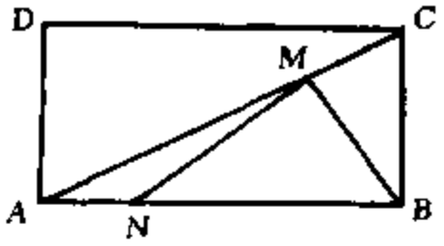


图 23-17

$\angle DFE = n\angle AEF$. 求 n 的值.

4. 矩形 $ABCD$ 中，$AB = 20\text{cm}$，$BC = 10\text{cm}$. 若在 AC、AB 上各取一点 M、N，如图 23-17 所示，若使 $BM + MN$ 的值最小，求这个最小值.

5. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 20°$，$AB = AC = a$，$BC = b$. 求证：$a^3 + b^3 = 3a^2b$.

第二十四讲　同　　余

基本要点和基本方法

所谓同余，顾名思义，就是“相同的余数”. 即两个整数被同一个正整数除所得的余数相同. 由此，我们可以这样来定义同余的概念：

设 m 是一个给定的正整数，把它称为模. 如果两个整数 a 与 b 用 m 除所得的余数相同，则称 a 与 b 对模 m 同余，记作

$$a \equiv b(\mathrm{mod}\ m).$$

这个符号读作“a 与 b 模 m 同余”. 例如：$64 \equiv 4(\mathrm{mod}\ 3)$，$-19 \equiv 7(\mathrm{mod}\ 3)$，$5 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 5)$ 等等. 若 a 与 b 对模 m 不同余，则记做 $a \not\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$. 例如：$12 \not\equiv 13(\mathrm{mod}\ 4)$.

同余这一概念也可用下面两种方式之一来叙述，三种说法是等价的.

(1) 若 $m \mid a-b$，则 a 与 b 对模 m 同余；

(2) 若 $a = b + mt$（t 为整数），则 a 与 b 对模 m 同余.

对这三种等价的定义，运用时可以根据问题研究叙述的方便进行选择.

根据同余的定义，容易得到同余的一些性质，最常用的有下列这些性质：

(1) 反身性　$a \equiv a(\mathrm{mod}\ m)$；

(2) 对称性　$a \equiv b(\mathrm{mod}\ m) \Rightarrow b \equiv a(\mathrm{mod}\ m)$；

(3) 传递性　$\left.\begin{array}{l} a \equiv b(\mathrm{mod}\ m) \\ b \equiv c(\mathrm{mod}\ m) \end{array}\right\} \Rightarrow a \equiv c(\mathrm{mod}\ m)$；

(4) 可加性

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b(\bmod m) \\ c \equiv d(\bmod m) \end{array}\right\} \Rightarrow a \pm c \equiv (b \pm d)(\bmod m);$$

推论 1 $\left.\begin{array}{l} a \equiv b(\bmod m) \\ c \text{ 为整数} \end{array}\right\} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c(\bmod m).$

推论 2 $a + b \equiv c(\bmod m) \Rightarrow a + b - c \equiv 0(\bmod m)$ 或 $a \equiv c - b(\bmod m)$.

推论 3 $a_k \equiv b_k(\bmod m) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \equiv \sum_{k=1}^{n} b_k(\bmod m)$. (其中 $k = 1, 2, \cdots, n$).

(5) 可乘性

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b(\bmod m) \\ c \text{ 为整数} \end{array}\right\} \Rightarrow ac \equiv bc(\bmod m).$$

推论 1 $\left.\begin{array}{l} a \equiv b(\bmod m) \\ c \equiv d(\bmod m) \end{array}\right\} \Rightarrow ac \equiv bd(\bmod m).$

推论 2 $a \equiv b(\bmod m) \Rightarrow a^n \equiv b^n(\bmod m)$.

(其中 n 为自然数).

从上面列出的同余性质可以看出,同余式具有一些与等式类似的性质.利用同余概念解决问题的主要方法是,借助这些同余式的性质,有机结合代数恒等变形技巧进行变通.有时根据问题解决的需要,将同余定义与整除定义相互变通,才能达到灵活处理问题的目的.还有分类讨论思想常常用到.

例题精讲

例 1 求证: $11 \mid 10^{1999} + 23^{1999}$.

证明 因为

$$10 \equiv -1(\bmod 11) \Rightarrow 10^{1999} \equiv -1(\bmod 11),$$

$$23 \equiv 1(\bmod 11) \Rightarrow 23^{1999} \equiv 1(\bmod 11),$$

所以

$$10^{1999} + 23^{1999} \equiv (-1 + 1)(\bmod 11) \equiv 0(\bmod 11).$$

因此，$11 \mid 10^{1999} + 23^{1999}$.

例 2 求证：对于任意奇数 n，数 $1^{1995} + 2^{1995} + 3^{1995} + \cdots + n^{1995}$ 不能被 $n + 2$ 整除.

证明 因为 $n \equiv -2 (\mathrm{mod}\ n+2)$，$n-1 \equiv -3 (\mathrm{mod}\ n+2)$，$n-2 \equiv -4 (\mathrm{mod}\ n+2)$，$\cdots$，$2 \equiv -n (\mathrm{mod}\ n+2)$，所以 $n^{1995} \equiv (-2)^{1995} (\mathrm{mod}\ n+2)$，$(n-1)^{1995} \equiv (-3)^{1995} (\mathrm{mod}\ n+2)$，$(n-2)^{1995} \equiv (-4)^{1995} (\mathrm{mod}\ n+2)$，$\cdots$，$2^{1995} \equiv (-n)^{1995} (\mathrm{mod}\ n+2)$. 以上 $(n-1)$ 个等式两边分别相加，移项得

$$2(2^{1995} + 3^{1995} + \cdots + n^{1995}) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n+2),$$

即 $$2(1^{1995} + 2^{1995} + 3^{1995} + \cdots + n^{1995}) \equiv 2 (\mathrm{mod}\ n+2).$$

又由于 n 为奇数，则 $(2, n+2) = 1$. 于是

$$1^{1995} + 2^{1995} + 3^{1995} + \cdots + n^{1995} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n+2).$$

因此，$1^{1995} + 2^{1995} + 3^{1995} + \cdots + n^{1995}$ 不能被 $n + 2$ 整除.

说明 例 1 和例 2 是整除性问题或不能整除性问题的证明，其问题解决的关键是，将整除转化为同余，借助同余的性质有效地进行变通.

例 3 a 除以 5 余 1，b 除以 5 余 4. 且 $3a > b$，求 $3a - b$ 除以 5 的余数.

分析 将已知条件转化为同余式，由同余式的性质变导出 $3a - b$.

解 由于 $a \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5) \Rightarrow 3a \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 5)$，

$$b \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 5) \Rightarrow -b \equiv -4 (\mathrm{mod}\ 5),$$

故 $$3a - b \equiv -1 \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 5).$$

例 4 求 $(257^{33} + 46)^{26}$ 被 50 除所得的余数.

解 因为 $257 \equiv 7 (\mathrm{mod}\ 50) \Rightarrow 257^{33} \equiv 7^{33} (\mathrm{mod}\ 50)$，

$$7^2 = 49 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 50) \Rightarrow 7^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 50),$$

所以 $$257^{33} \equiv 7 (\mathrm{mod}\ 50).$$

从而 $$257^{33} + 46 \equiv (7 + 46) (\mathrm{mod}\ 50) \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 50),$$

于是 $$(257^{33} + 46)^{26} \equiv 3^{26} (\mathrm{mod}\ 50).$$

又 $$3^5 \equiv -7 (\mathrm{mod}\ 50),$$

所以 $$3^{10} \equiv (-7)^2 \equiv -1 \pmod{50},$$

$$3^{20} \equiv 1 \pmod{50},$$

故 $3^{26} = 3^{20+5+1} \equiv 3^5 \cdot 3 \equiv -7 \cdot 3 = -21 \equiv 29 \pmod{50}$.

因此，$(257^{33} + 46)^{26}$ 被 50 除所得的余数为 29.

说明 例 3 和例 4 是求余数问题. 其问题解决的关键，是充分利用同余的性质和定义.

例 5 $1\,986^n + 1\,987^n + 1\,988^n + 1\,989^n$ 的个位不是 0，求 n 的条件.

分析 设 $s = 1\,986^n + 1\,987^n + 1\,988^n + 1\,989^n$. 因为 $1\,986^n \equiv 6^n \pmod{10}$，$1\,987^n \equiv 7^n \pmod{10}$，…所以 $s \equiv 6^n + 7^n + 8^n + 9^n \pmod{10}$. 由于自然数的正整数次方的个位数字对于指数是周期变化，且周期的最小公倍数是 4，因此本题可把 n 以模 4 的余数分类讨论.

解 若 $n = 4k$，则

$$\begin{aligned} s &\equiv 6^{4k} + 7^{4k} + 8^{4k} + 9^{4k} \\ &\equiv 6 + 1 + 6 + 1 \\ &\equiv 4 \pmod{10}. \end{aligned}$$

若 $n = 4k + 1$，则

$$\begin{aligned} s &\equiv 6^{4k+1} + 7^{4k+1} + 8^{4k+1} + 9^{4k+1} \\ &\equiv 6 + 7 + 8 + 9 \equiv 0 \pmod{10}. \end{aligned}$$

若 $n = 4k + 2$，则

$$\begin{aligned} s &\equiv 6^{4k+2} + 7^{4k+2} + 8^{4k+2} + 9^{4k+2} \\ &\equiv 6 + 9 + 4 + 1 \equiv 0 \pmod{10}. \end{aligned}$$

若 $n = 4k + 3$，则

$$\begin{aligned} s &\equiv 6^{4k+3} + 7^{4k+3} + 8^{4k+3} + 9^{4k+3} \\ &\equiv 6 + 3 + 2 + 9 \equiv 0 \pmod{10}. \end{aligned}$$

综上所述，因为 $s \not\equiv 0 \pmod{10}$，所以满足题意的条件是 $n = 4k$，k 为正整数.

例 6 求 $A = 14^{14^{14}}$ 的末两位数.

分析 某数的末两位数就是它除以 100 的余数，由于

$a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1 \equiv a_2 a_1 (\mathrm{mod}\ 100)$ 或(mod 25)或(mod 4)，因此常以较小的模人手解决问题.

解 因偶数的 n 次幂 ($n \geqslant 2$) 是 4 的倍数，则

$$A \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4).$$

又因 $14^2 = 196 \equiv 6(\mathrm{mod}\ 10)$，则

$$14^{14} \equiv 6^7 \equiv 6(\mathrm{mod}\ 10).$$

于是 $14^{14} = 10t + 6$ (t 为正整数).

因此，$A = 14^{14^{14}} = 14^{10a+6} = (14^{10})^t \cdot 14^5 \cdot 14$

$$\equiv 1 \cdot (-1) \cdot 14 \equiv -14 \equiv 11(\mathrm{mod}\ 25).$$

下面解同余式组

$$\begin{cases} A \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4), & ① \\ A \equiv 11(\mathrm{mod}\ 25). & ② \end{cases}$$

由②得 $A = 25k + 11$ (k 为整数) ③

代入①得 $25k + 11 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4).$

两边同时加 $(-24k - 8)$ 得

$$k + 3 \equiv -24k - 8 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4),$$

$$k \equiv -3 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4).$$

则可令 $k = 4p + 1$ (p 为整数)，代入③式得

$$A = 25(4p + 1) + 11 = 100p + 36,$$

$$A \equiv 36(\mathrm{mod}\ 100).$$

即 A 的末两位数为 36.

说明 例 5 和例 6 是与某数的末几位数有关的问题. 一般来说求某数的末 n(n 为自然数)位数，就是求它除以 10^n 的余数.

例 7 证明方程 $5m^2 - 6mn + 7n^2 = 1\,987$ 无整数解.

分析 如果对任意的整数，方程的两边对某一特定的模不同余，则方程就必然没有整数解，可以用此法试一试.

证明 若有整数 m、n 满足方程，可改写为

$$4m^2 + (m - 3n)^2 - 2n^2 = 1\,987,$$

因右边为奇数，$4m^2 - 2n^2$ 为偶数，故 $m - 3n$ 必为一奇数.

若 n 为奇数，则由 $m - 3n$ 为奇数知 m 为偶数，于是有

$$4m^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 8),\ (m - 3n)^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 8),$$

$$2n^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 8).$$

所以 $4m^2 + (m - 3n)^2 - 2n^2 \equiv 0 + 1 - 2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 8)$.

而 $$1\,987 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 8).$$

两边对模 8 不同余，矛盾.

因此，没有整数 m、n 满足原方程.

例 8 如图 24-1 所示，一枚棋子放在五角棋盘的 0 位上，现依逆时针方向按下列规律移动：第 1 次移动一格，第 2 次移动二格，…，第 n 次移动 n 格.

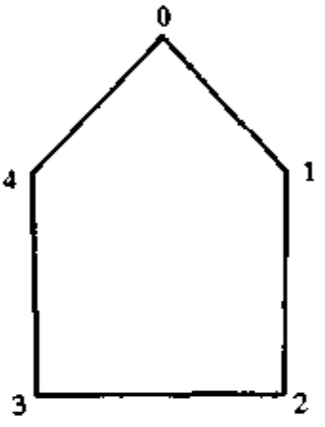


图 24-1

求证： 不论棋子连续移动多少次，在第 2、第 4 格上总没有停棋的可能.

证明 如图 24-1，设在 0 号位上的棋子连续移动了 n 次，这时棋子共走了

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{（格）}.$$

不论连续走多少次，棋子所在位置应是所走格数被 5 除的余数，因此问题即为 $\frac{n(n+1)}{2}$ 被 5 除时，余数不可能为 2 和 4.

由于 $n \equiv r (\mathrm{mod}\ 5)$ $0 \leqslant r \leqslant 4$，那么

$$\frac{n(n+1)}{2} \equiv \frac{r(r+1)}{2} (\mathrm{mod}\ 5).$$

当 r 分别取 0，1，2，3，4 时，

$$\frac{r(r+1)}{2} \equiv 0, 1, 3\ (\mathrm{mod}\ 5),$$

即第 2，第 4 格上总没有停棋的可能.

练　习　题

A　组

1. 设 a，b 都是正整数，且 a 被 7 除余数是 2，b 被 7 除余数是 5，求 a^2+4b 和 a^2-4b 被 7 除的余数.

2. 求 2^{1000} 除以 13 的余数.

3. 求 777^{777} 的个位数的值.

4. 求证：$7\mid(2\,222^{5\,555}+5\,555^{2\,222})$.

5. 求使 2^n+1 能被 3 整除的一切自然数 n.

6. 一个正整数的个位数是 7，如果把个位数移到首位，所得到的数是原数的 5 倍，求满足上述条件的最小正整数.

7. 求证 $8n+7$ 的数不可能是三个整数的平方和.

B　组

8. 证明：一个正整数能被 9 整除的充要条件是它的各位数字之和能被 9 整除.

9. 求 2^{999} 的最后两位数字.

10. 求 $47^{37^{27}}$ 被 7 除的余数.

11. 求 $1^4+2^4+3^4+\cdots+1\,990^4+1\,991^4$ 的个位数.

12. A 为任意 n 位数，将组成 A 的各位数字任意重新排列后得到一个新数 B（如 $A=8\,423$，则 B 可以是 3 428），如果 $A>B$，证明 $A-B$ 是 9 的倍数.

测　试　题

一、选择题

1. 若正整数 m 和 1 995 对于模 6 同余，则 m 的值可以是（　　）.

(A) 25　　(B) 26　　(C) 27　　(D) 28

2. 设 n 为自然数，若 $19n + 14 \equiv 10n + 3 (\mathrm{mod}\ 83)$，则 n 的最小值是(　　).

(A) 4　　(B) 8　　(C) 16　　(D) 32

3. $64^{325} + 1$ 被 13 除的余数是(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 62

二、填空题

4. 如果 m 是大于 1 的整数，69，90，125 对于 m 同余，那么 m 的值是_____.

5. $1\,990^{1\,990}$ 化为七进制数后的个位数字是____.

三、解答题

6. 对于十进制整数 $N = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$，若 $8 \mid (4a_2 + 2a_1 + a_0)$，求证：$8 \mid N$.

7. 求 $N = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 1\,997 \times 1\,999$ 的末三位数.

8. 把 1，2，3，…，81，这 81 个数任意排列为：a_1，a_2，a_3，…，a_{81}，计算出 $|a_1 - a_2 + a_3|$、$|a_4 - a_5 + a_6|$、…、$|a_{79} - a_{80} + a_{81}|$，再将这 27 个数任意排列为 b_1、b_2、b_3、…、b_{27}，再计算 $|b_1 - b_2 + b_3|$、$|b_4 - b_5 + b_6|$、…、$|b_{25} - b_{26} + b_{27}|$. 如此继续下去，最后得到一个数 x. 问 x 是奇数还是偶数？

第二十五讲　梅涅劳斯定理与塞瓦定理

基本要点和基本方法

梅涅劳斯定理和塞瓦定理在平面几何解题中扮演着重要的角色.

梅涅劳斯定理：在$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB或其延长线上有点D、E、F，若D、E、F共线，则

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

证明　如图25-1所示，过C点作$CG\parallel DF$交AB于G，有

$$\frac{BD}{DC}=\frac{BF}{FG},\ \frac{CE}{EA}=\frac{GF}{FA},$$

因此，$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{BF}{FG}\cdot\frac{GF}{FA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$

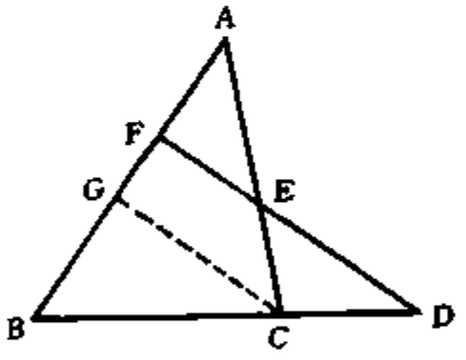


图 25-1

梅涅劳斯定理的逆定理：在$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB或其延长线上有点D、E、F，若$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$，则$D$、$E$、$F$三点共线.

证明略.

塞瓦定理：设O是$\triangle ABC$内任意一点，AO、BO、CO分别交对边于N、P、M，则

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1.$$

证明 如图 25-2 所示，$\triangle CAM$ 被直线 POB 所截，得

$$\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AB}{MB}\cdot\frac{MO}{OC}=1. \qquad ①$$

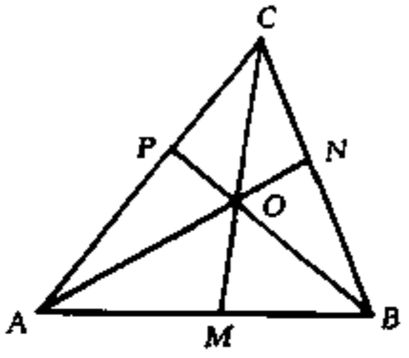


图 25-2

又由于 $\triangle CMB$ 被直线 AON 所截，得

$$\frac{CO}{OM}\cdot\frac{AM}{AB}\cdot\frac{BN}{NC}=1. \qquad ②$$

① × ② 得 $\dfrac{CP}{PA}\cdot\dfrac{AM}{MB}\cdot\dfrac{BN}{NC}=1.$

塞瓦定理的逆定理：设 M、N、P 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB、BC、CA 上，且满足

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1,$$

则 AN、BP、CM 相交于一点.

证明略.

恰当地选择三角形的截线或作出截线，是应用梅涅劳斯定理的关键.

恰当地选择三角形所在平面上的一点，是应用塞瓦定理的关键.

例题精讲

例 1 如图 25-3 所示，设 AD 为 $\triangle ABC$ 的一条中线，作任一直线 CF 交 AD 于 E，交 AB 于 F，求证：

$$\frac{AE}{ED}=\frac{2AF}{FB}.$$

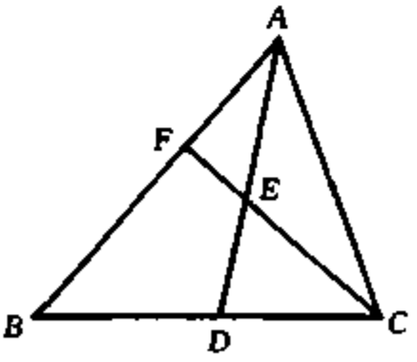


图 25-3

证明 将直线 CEF 看作是 $\triangle ABD$ 的截线，由梅涅劳斯定理知，

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DE}{EA}=1.$$

又 $BC=2CD$，

所以
$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{2CD}{CD}\cdot\frac{DE}{EA}=1,$$

即 $\frac{AE}{ED}=\frac{2AF}{FB}$.

例 2 如图 25-4 所示，已知$\triangle ABC$的$\angle A$的外角平分线与边BC的延长线交于P，$\angle B$的平分线与边CA交于Q，$\angle C$的平分线与边AB交于R. 求证：P、Q、R三点共线.

证明 AP是$\angle BAC$的外角平分线，则

$$\frac{BP}{PC}=\frac{AB}{CA}. \qquad ①$$

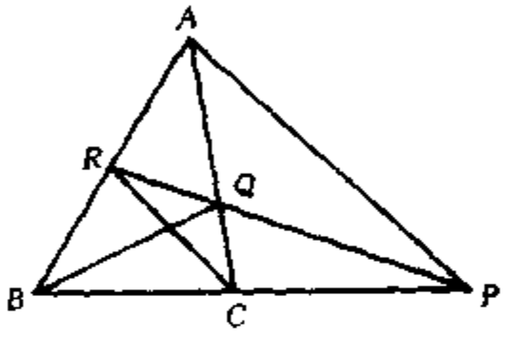


图 25-4

BQ是$\angle ABC$的平分线，则

$$\frac{CQ}{QA}=\frac{BC}{AB}. \qquad ②$$

CR是$\angle ACB$的平分线，则

$$\frac{AR}{RB}=\frac{CA}{BC}. \qquad ③$$

①×②×③得

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{AB}{CA}\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{CA}{BC}=1.$$

因R在AB上，Q在CA上，P在BC的延长线上，则根据梅涅劳斯定理的逆定理得：P、Q、R三点共线.

例 3 设凸四边形$ABCD$的对角线AC、BD的交点为M，过点M作AD的平行线分别交AB、CD于点E、F，交BC的延长线于点O，P是以O为圆心，OM为半径的圆上一点(如图 25-5 所示)求证：$\angle OPF=\angle OEP$.

证明 根据梅涅劳斯定理，以$\triangle DMF$为基础三角形，直线OCB为截线，则有

$$\frac{MO}{OF}\cdot\frac{CF}{CD}\cdot\frac{BD}{BM}=1.$$

以$\triangle AME$为基础三角形，直线OCB为截线，则有

$$\frac{OE}{OM}\cdot\frac{CM}{AC}\cdot\frac{AB}{BE}=1.$$

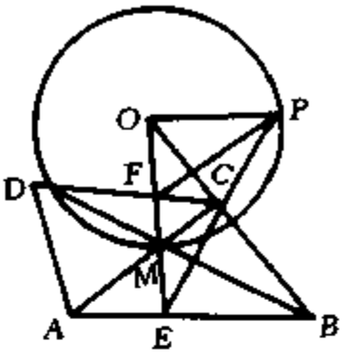


图 25-5

因$OE\ //\ AD$，则有

$$\frac{CF}{CD}=\frac{CM}{CA},\ \frac{BD}{BM}=\frac{AB}{BE}.$$

于是 $\dfrac{OM}{OF}=\dfrac{OE}{OM}.$

又 $OM=OP$，

则有 $\dfrac{OE}{OP}=\dfrac{OP}{OF}.$

又 $\angle POF=\angle EOP$，

于是 $\triangle OPF\backsim\triangle OEP.$

因此 $\angle OPF=\angle OEP.$

例 4 在面积为 1 的$\triangle ABC$的三边上分别取点D、E、F，如图 25-6 所示，使$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{AF}{FB}=k>1$，连接$AD$、$BE$、$CF$交出$\triangle MNP$，试求$S_{\triangle MNP}$.

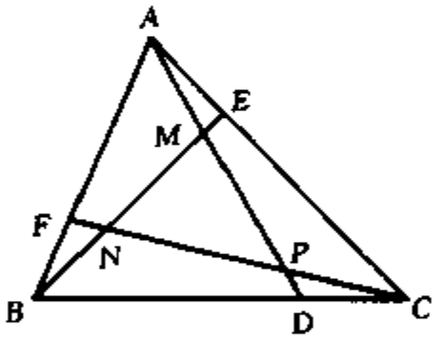


图 25-6

解 在图 25-6 中有

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{BD}{BC},\ S_{\triangle ABC}=1,\ \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{AM}{AD},$$

于是 $$S_{\triangle ABM}=\frac{AM}{AD}\cdot\frac{BD}{BC}=\frac{k}{k+1}\cdot\frac{AM}{AD}.\qquad①$$

把直线BME看成$\triangle ACD$的截线，则有

$$\frac{AE}{EC}\cdot\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DM}{MA}=1,$$

从而 $$\frac{DM}{MA}=\frac{EC}{AE}\cdot\frac{BD}{BC}=\frac{k^2}{k+1},$$

$$\frac{AD}{AM}=1+\frac{DM}{AM}=\frac{k^2+k+1}{k+1}.$$

代入①式得

$$S_{\triangle ABM}=\frac{k}{k^2+k+1}.$$

同理可得

$$S_{\triangle BCN}=S_{\triangle ACP}=\frac{k}{k^2+k+1}.$$

因此

$$S_{\triangle MNP}=S_{\triangle ABC}-(S_{\triangle ABM}+S_{\triangle BCN}+S_{\triangle ACP})=\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}.$$

例 5 如图 25-7 所示，在$\triangle ABC$中，D、E分别在边AB、AC上，且$DE\parallel BC$，设BE与CD交于S，求证：AS通过BC边的中点M.

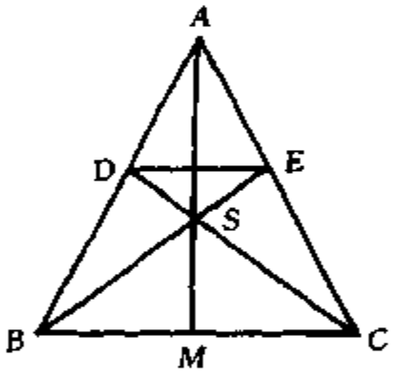


图 25-7

证明 因$DE\parallel BC$，则

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

由塞瓦定理，得

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

由上面二式得

$$\frac{BM}{MC}=1,$$

即 $BM=MC$.

因此，M是BC的中点.

例 6 如图 25-8 所示，已知$\triangle ABC$中，M是BC的中点，AD平分$\angle A$，B在AD上的射影为E，BE交AM于N，求证：$DN\parallel AB$.

证明 连接EM并延长交AB于G，延长BE、AC交于F.

因$AE\perp BF$，AD平分$\angle BAC$，则$\triangle ABF$为等腰三角形.

从而 $AB=AF$，$BE=EF$.

因 $BM=MC$，则 $ME\ //\ CF$，$BG=GA$.

在$\triangle ABE$中，AN，BD，EG相交于一点M，由塞瓦定理得

$$\frac{BN}{NE}\cdot\frac{ED}{DA}\cdot\frac{AG}{GB}=1,$$

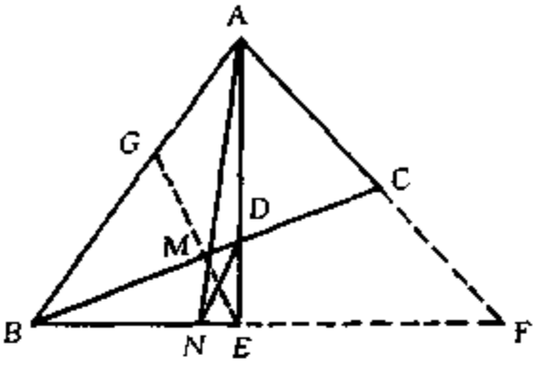


图 25-8

于是 $\dfrac{EN}{NB}=\dfrac{ED}{DA}$，

因此 $DN\ //\ AB$.

例 7 在$\triangle ABC$的各边上向外侧分别作三个等边三角形，即$\triangle BCA'$、$\triangle CAB'$、$\triangle ABC'$，如图 25-9 所示，求证：AA'、BB'、CC'三线共点.

证明 当$\triangle ABC$中一角，例如$\angle A$，为 120°时，则结论成立是显然的，这时$C'C$与$C'AC$重合，BB'与$B'AB$重合，A点即为AA'，BB'，CC'的交点.

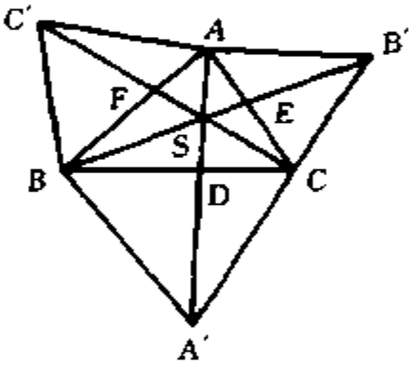


图 25-9

下面我们考虑$\triangle ABC$中无一角为120°的情况，设AA'、BB'、CC'分别交BC、CA、AB于D、E、F于是

$$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{S_{\triangle A'BD}}{S_{\triangle A'CD}},$$

即

$$\begin{aligned}\frac{BD}{DC}&=\frac{S_{\triangle ABD}+S_{\triangle A'BD}}{S_{\triangle ACD}+S_{\triangle A'BC}}=\frac{S_{\triangle ABA'}}{S_{\triangle ACA'}}\\&=\frac{AB\cdot A'B\cdot\sin(60^\circ+\angle ABC)}{AC\cdot A'C\cdot\sin(60^\circ+\angle ACB)}.\end{aligned}$$

同理有

$$\frac{CE}{EA}=\frac{BC\cdot B'C\cdot\sin(60^\circ+\angle ACB)}{AB\cdot AB'\cdot\sin(60^\circ+\angle BAC)},$$

$$\frac{AF}{FB}=\frac{AC\cdot AC'\cdot\sin(60^\circ+\angle BAC)}{BC\cdot BC'\cdot\sin(60^\circ+\angle ABC)}.$$

由于$A'B=A'C$，$B'C=B'A$，$C'A=C'B$，

于是 $$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

因此，三线 AA'，BB'，CC' 共点于 S.

顺便指出，点 S 称为$\triangle ABC$ 的正等角中心，当$\triangle ABC$ 各角均小于 120°时，该点即为$\triangle ABC$ 的费尔马点；该点至三角形各顶点距离之和为最小.

例 8 如图 25-10 所示，在$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，G 为 AB 上给定的一点(G 不是线段 AB 的中点). 设 D 为直线 GC 上的任意一点，并且直线 AD、BC 交于 E，直线 BD、AC 交于 F，直线 EF、AB 交于 H，试证明交点 H 与 D 在直线 CG 上的位置无关.

证明 如图 25-10 所示，设 G 分线段 AB 为定比 λ_1，H 分线段 AB 为定比 λ_2，下面证明 λ_2 由 λ_1 确定，即当 A，B 给定后，点 H 的位置由点 G 唯一确定. 在$\triangle ABC$ 中，由 AE、BF、CG 交于一点 D，由塞瓦定理得

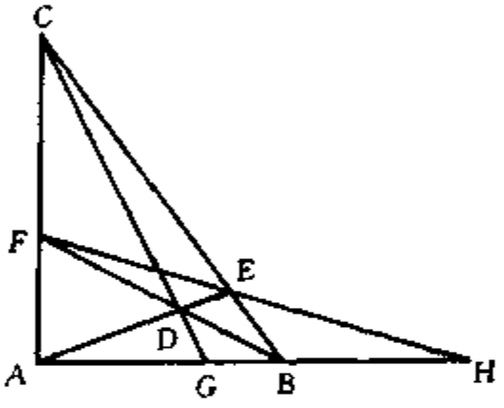


图 25-10

$$\frac{AG}{GB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1,$$

即 $$\lambda_1\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1. \qquad ①$$

对$\triangle ABC$ 和截线 EF 应用梅涅劳斯定理得

$$\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=1,$$

即 $$\lambda_2\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=-1. \qquad ②$$

① + ② 得

$$(\lambda_1+\lambda_2)\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CF}{FA}=0.$$

从而 $\lambda_1+\lambda_2=0$，即 $\lambda_2=-\lambda_1$，λ_2 由 λ_1 唯一确定.

因此，点 H 与 D 的位置无关.

练　习　题

A　组

1. 在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，过BC的中点D作直线垂直于$\angle A$的平分线，交AB于E，交AC的延长线于F. 求证：$BE=CF=\frac{1}{2}(AB-AC)$.

2. 在$\triangle ABC$中，D是BC边的中点，过D任作一直线，交AC于E，交AB的延长线于F. 求证：$\frac{AE}{EC}=\frac{AF}{BF}$.

3. 证明：不等边三角形的三个角的外角平分线与对边的交点是共线的三个点.

4. 经过$\angle xOy$的平分线上一定点A任作一直线，设该直线与Ox、Oy分别相交于P、Q，求证：$\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}$为定值.

5. 证明：锐角三角形的三条高交于一点.

6. 以$\triangle ABC$的三条边向外作三个正方形，A_1、B_1、C_1是正方形中的边BC、CA、AB对边的中点. 求证：直线AA_1、BB_1、CC_1相交于一点.

B　组

7. $\triangle ABC$三边BC、AB、AC的中点分别为D、E、F，设AD与EF交于P，连接CP交AB于Q，求证：$AB=3AQ$.

8. 已知$\triangle ABC$的$\angle BAC$、$\angle ABC$的平分线AD、BE分别交BC、AC于D、E两点，CF为$\angle ACB$的外角平分线，它与AB边延长线的交点为F，求证：D，E，F共线.

9. 证明：三角形的角平分线交于一点.

10. （迪沙格定理）两三角形对应顶点连线共点，则对应边的交点必共线.

测 试 题

一、选择题

1. 在$\triangle ABC$的两边AB、AC上分别取点Q、R，满足$AQ:QB=2:1$，$AR:RC=1:2$，连接QR交CB延长线于P，那么$\frac{PC}{PB}$等于(　　).

(A) 4　　(B) 2　　(C) $\frac{1}{4}$　　(D) $\frac{1}{2}$

2. $ABCD$为平行四边形，$BC=12$厘米，$DC=10$厘米，对角线AC与BD交于O，E是BC延长线上一点，且$CE=4$厘米，OE交DC于F. 那么CF的长是(　　).

(A) 1厘米　(B) 2厘米　(C) $\frac{1}{2}$厘米　(D) 3厘米

3. 已知M、N分别在$\triangle ABC$的边AC、AB上，$MN\ /\!/\ BC$，BM、CN交于点O，连接AO并延长交BC于D，那么$BD:DC$(　　).

(A) 大于1　(B) 小于1　(C) 等于1　(D) ABC都可能

二、填空题

4. 在$\triangle ABC$中，如果AD交BC于D，BE交AC于E，CF交BA于F，AD、BE、CF相交于一点，$\frac{BD}{EA}=2$，$\frac{CE}{FB}=3$，那么$\frac{AF}{DC}$等于_____.

5. 在$\triangle ABC$的BC边上任取一点D，设$\angle ADB$、$\angle ADC$的平分线与AB、AC分别相交于F、E，那么AD、BE、CF的位置关系是_____.

6. 在$\triangle ABC$中，D、E分别是BC、CA上的点，且$BD:DC=m:1$，$CE:EA=n:1$，AD与BE相交于F，那么$S_{\triangle ABF}:S_{\triangle ABC}$等于_____.

三、解答题

7. $\triangle A'B'C'$ 为 $\triangle ABC$ 各边中点所连结成的三角形，其中 A' 在 BC 上，B' 在 AC 上，C' 在 AB 上，P 为 $\triangle A'B'C'$ 中的一点，$A'P$、$B'P$、$C'P$ 分别交各边 $B'C'$、$C'A'$、$A'B'$ 于 L、M、N. 求证：AL、BM、CN 三线共点.

8. 已知两直线 ABC 及 $A'B'C'$，BC' 与 $B'C$ 交于 D，CA' 与 $C'A$ 交于 E，AB' 与 $A'B$ 交于 F. 求证：D、E、F 共线.

第二十六讲　面 积 方 法

基本要点和基本方法

以有关面积的公式、定理为工具来解题的方法称为面积方法. 这种方法可解决题目中直接涉及到面积的问题，也可以解决一些题目中不涉及到面积的问题. 利用面积方法解题时，以下的基础知识必须掌握，并能灵活运用.

1. 面积公式

$S_{三角形}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$;

$S_{三角形}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$;

$S_{平行四边形}=ah$;

$S_{梯形}=\frac{1}{2}(a+b)h$;

$S_{菱形}=\frac{1}{2}l_1l_2$;

$S_{正方形}=a^2$;

$S_{矩形}=ab$.

2. 面积比定理

(1) 两个三角形面积之比，等于它们的底、高之积的比；

(2) 等底(高)的两个三角形面积之比，等于它们的高(底)之比；

(3) 相似三角形(多边形)面积之比等于它们对应边的平方比.

3. 等积定理

(1) 两个全等图形的面积相等；

(2) 等底、等高的两个三角形或四边形面积相等；

(3) 两个等积三角形，若它们的底相等，则它们的高相等；若它们的高相等，则它们的底也相等.

(4) 一个图形的面积等于它的各部分面积之和.

灵活运用上述知识要点，巧妙进行等积变换是应用面积方法解题的关键. 面积与面积、面积与线段的互相转化是用面积方法解题的重要手段.

例题精讲

例 1 在$\triangle ABC$的各边AB、BC、CA上取AD、BE、CF各等于边的$\frac{1}{3}$，求$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle DEF}$的值.

解 如图 26-1 所示，连结AE，因$\triangle BDE$与$\triangle ABE$同高，且底边$BD=\frac{2}{3}AB$. 则

$$S_{\triangle BDE}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABE}. \qquad ①$$

又$\triangle ABE$与$\triangle ABC$同高且$BE=\frac{1}{3}BC$. 则 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$. ②

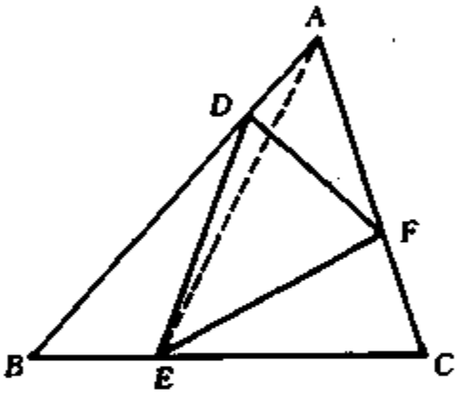


图 26-1

把②代入①，得

$$S_{\triangle BDE}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}. \qquad ③$$

同理可得 $S_{\triangle ADF}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}$. ④

$$S_{\triangle CEF}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}. \qquad ⑤$$

③ + ④ + ⑤ 得

$$S_{\triangle BDE}+S_{\triangle ADF}+S_{\triangle CEF}=\frac{6}{9}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}.$$

因此，$S_{\triangle DEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

即　$S_{\triangle DEF} : S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}$.

例 2　在$\triangle ABC$中，M，N分别是AB、AC边上一点，P是MN上的一点，如果$BM : AM = AN : CN = MP : NP$，求证：$S_{\triangle PBC} = 2S_{\triangle AMN}$.

证明　如图 26-2 所示. 设$BM : AM = AN : CN = MP : NP = n$，则

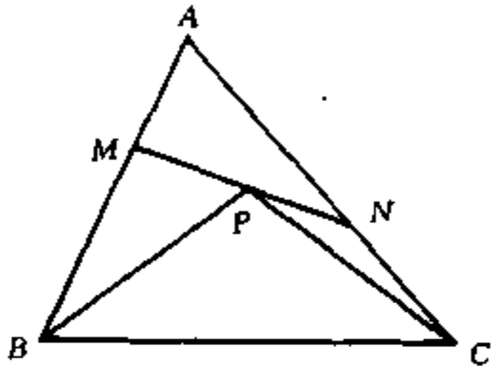


图 26-2

$$AB : AM = n + 1,$$

$$AC : AN = \frac{n+1}{n},$$

$$MN : MP = \frac{n+1}{n},$$

$$MN : NP = n + 1.$$

设$S_{\triangle AMN} = 1$，因为$\angle MAC = \angle BAC$，

则
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{AB \cdot AC}{AM \cdot AN} = \frac{(n+1)^2}{n},$$

故
$$S_{\triangle ABC} = \frac{(n+1)^2}{n}.$$

又$\angle BMP$与$\angle AMN$互补，

则
$$\frac{S_{\triangle BMP}}{S_{\triangle AMN}} = \frac{BM \cdot MP}{AM \cdot MN} = \frac{n^2}{n+1},$$

故
$$S_{\triangle BMP} = \frac{n^2}{n+1}.$$

同理可证　$S_{\triangle CNP} = \frac{1}{n(n+1)}$.

由此可得

$$S_{\triangle PBC} = \frac{(n+1)^2}{n} - \frac{n^2}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} - 1 = 2.$$

因此，$S_{\triangle PBC} = 2S_{\triangle AMN}$.

例 3　如图 26-3 所示，已知其中阴影所示的四个三角形AFH、BDI、CEG、GHI面积均相等，求证：三个四边形$AHGE$、$BIHF$、$CGID$面积也相等.

证明 如图 26-3，不妨设四个阴影所示的三角形面积为 1 个单位面积.

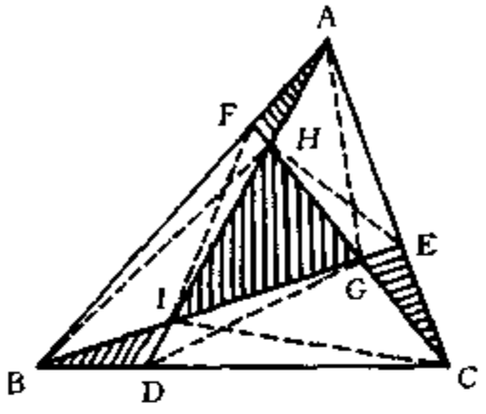


图 26-3

因 $S_{\triangle AFH}=S_{\triangle GHI}$，

则 $FI \parallel AG$.

同理 $DG \parallel BH$，$HE \parallel IC$.

设 $\frac{AF}{FB}=a$，$\frac{BD}{DC}=b$，$\frac{EC}{AE}=c$，

则

$$\frac{AH}{HI}=\frac{AE}{EC}=\frac{1}{c}，\frac{HI}{ID}=\frac{BI}{IG}=\frac{BF}{FA}=\frac{1}{a}，$$

则 $$AH:HI:ID=1:c:ac.$$

又 $$S_{\triangle AFH}=S_{\triangle BDI}，$$

则 $$\frac{S_{\triangle AFH}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{S_{\triangle BDI}}{S_{\triangle ABD}}.$$

即 $$\frac{AF\cdot AH}{AB\cdot AD}=\frac{BD\cdot DI}{AD\cdot BD}\text{ 或 }\frac{AF}{AB}=\frac{DI}{AH}.$$

所以 $$\frac{a}{1+a}=\frac{ac}{1}，\text{即}\quad c=\frac{1}{1+a}.$$

同理

$$a=\frac{1}{1+b}，b=\frac{1}{1+c}.$$

所以 $$a^2+a-1=0.$$

则 $$a=b=c=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

而 $$S_{CGID}=S_{\triangle CID}+S_{\triangle CGI}，$$

又 $$\frac{BD}{DC}=\frac{b}{1}，S_{\triangle IBD}=1，$$

则 $$S_{\triangle CID}=\frac{DC}{BD}，S_{\triangle ICD}=\frac{1}{b}.$$

又 $$BH \parallel DG，$$

则 $$\frac{HG}{GC}=\frac{BD}{DC}=\frac{b}{1}.$$

而 $$S_{\triangle GHI}=1,$$

则 $$S_{\triangle CGI}=\frac{1}{b}.$$

于是 $$S_{CGID}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b}=\frac{2}{b}=\sqrt{5}+1.$$

同理 $S_{AHGE}=\sqrt{5}+1$，$S_{BIHF}=\sqrt{5}+1$.

因此 $S_{CGID}=S_{AHGE}=S_{BIHF}$.

说明 上面的三个例题是直接出现面积的面积问题. 在其求解过程中，常常是把多边形面积转化为三角形面积，再把三角形面积转化为底和高的问题.

下面几例是用面积方法解答不涉及面积的平面几何问题(或代数问题)，这类问题常常需要把线段的长度转化为面积.

例4 P 为$\triangle ABC$ 内任意一点，三边 a，b，c 的高分别为 h_a、h_b、h_c，且 P 到 a、b、c 的距离分别为 t_a、t_b、t_c. 求证：

$$\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}=1.$$

分析 如图 26-4 所示，连接 PA、PB、PC，容易看出 $\frac{t_a}{h_a}$、$\frac{t_b}{h_b}$、$\frac{t_c}{h_c}$ 分别是两个等底三角形的高之比. 于是可将高之比转化为面积之比，从而使命题获证.

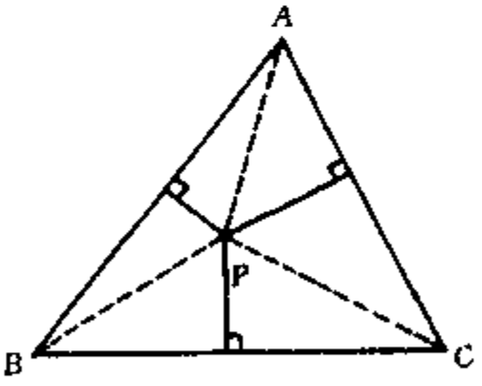


图 26-4

证明 因为 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}$，那么

$$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}=1.$$

又 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}ct_c$，$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}at_a$，$S_{\triangle PCA}=\frac{1}{2}bt_b$，

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ch_c=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b,$$

所以
$$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}ct_c}{\frac{1}{2}ch_c}=\frac{t_c}{h_c}.$$

同理 $\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{t_a}{h_a}$, $\frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{t_b}{h_b}$.

因此, $\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}=1$.

例 5 如图 26-5 所示,设正六边形 $ABCDEF$ 的对角线 AC、CE 分别被内点 M、N 分成比为

$$\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=r$$

的两段. 如果 B、M、N 三点共线, 求 r.

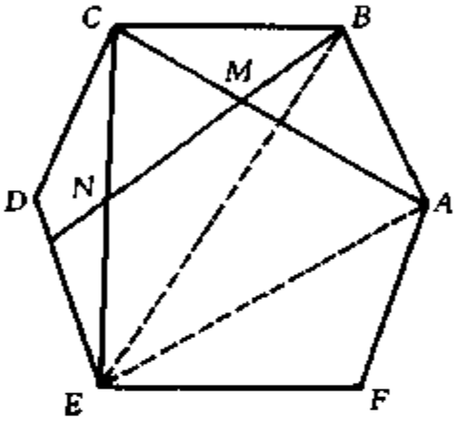


图 26-5

分析 因 B、M、N 三点共线,则 $S_{\triangle BCN}=S_{\triangle BCM}+S_{\triangle MCN}$ 若将这个面积等式与线段比例联系起来,得到一个关于 r 的方程,问题便可得以解决.

解 在正六边形 $ABCDEF$ 中,若令 $S_{\triangle ABC}=S$, 则

$$S_{\triangle ACE}=3S,\ S_{\triangle BCE}=2S.$$

因 $\frac{S_{\triangle BCM}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{CM}{AC}=\frac{AC-AM}{AC}=1-r$, 则

$$S_{\triangle BCM}=(1-r)S. \qquad ①$$

同理 $S_{\triangle MCN}=r(1-r)\cdot S_{\triangle ACE}=3r(1-r)S$, ②

$S_{\triangle BCN}=rS_{\triangle BCE}=2rS.$ ③

又 $S_{\triangle BCN}=S_{\triangle BCM}+S_{\triangle MCN}.$ ④

将①, ②, ③代入④,整理得

$$3r^2=1,$$

解得 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

例 6 如图 26-6 所示,在梯形 $ABCD$ 中,已知 $AD\ //\ BC$, BA、

CD 的延长线相交于 E，$EF \parallel DB$ 交 CB 的延长线于 F，在 BC 的延长线上取 $CG = BF$，求证：$EG \parallel AC$.

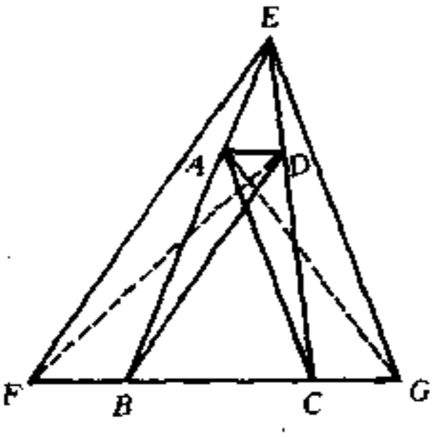


图 26-6

分析 一般来说，若能找到共用底边在一线段上，而它们的顶点在另一线段上的两个三角形，就有可能把证明两条直线平行的问题转化为证两个三角形等积的问题.

证明 连结 AG、DF.

因 $EF \parallel BD$，则 $S_{\triangle EBD} = S_{\triangle FED}$.

又 $AD \parallel BC$，则 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}$.

因此 $S_{\triangle EBD} = S_{\triangle EAC}$.

从而 $S_{\triangle EAC} = S_{\triangle FBD}$.

又 $AD \parallel BC$，且 $BF = CG$，则

$$S_{\triangle FBD} = S_{\triangle GAC}.$$

于是 $$S_{\triangle EAC} = S_{\triangle GAC}.$$

因此，$EG \parallel AC$.

练 习 题

A 组

1. 在$\triangle ABC$ 中，E 是 AB 的中点，D 是 AC 上一点，且 $AD : DC = 2 : 3$，BD 与 CE 交于 F，$S_{\triangle ABC} = 40$，求 S_{AEFD}.

2. 在任意四边形 $ABCD$ 中，M、N 分别是 AB、DC 的中点，BN、AN 分别交 CM、DM 于 P、Q. 证明：$S_{\triangle BPC} + S_{\triangle AQD} = S_{MQNP}$.

3. AD、BE、CF 交于$\triangle ABC$ 内的一点 P，并将$\triangle ABC$ 分成六个小三角形，$S_{\triangle APF} = 84$，$S_{\triangle APE} = 70$，$S_{\triangle BPD} = 40$，$S_{\triangle CPD} = 30$. 试求$\triangle ABC$ 的面积.

4. 四边形 $ABCD$ 中，E、F 在 DC 上 G、H 在 AB 上，$DE = EF = FC$，$AG = GH = HB$，求证：四边形 $ABCD$ 的面积等于四边形

$EFHG$ 面积的 3 倍.

5. 在$\triangle ABC$ 内部或边界上任取一点 P，记 P 到三边 a、b、c 的距离依次为 x、y、z. 求证：$ax + by + cz$ 是一个常数.

6. 在$\triangle ABC$ 中，M 为 BC 的中点，P、R 分别在 AB、AC 上，Q 为 PR 与 AM 的交点. 证明：若 Q 为 PR 中点，则 $PR \parallel BC$.

7. 在$\square ABCD$ 中，P、Q 分别是 BC、CD 上的两点，且 $S_{\triangle BAP} = S_{\triangle DAQ}$，求证：$PQ \parallel BD$.

B 组

8. 四边形 $ABCD$ 中，M、N 分别是对角线 AC、BD 的中点，又 AD、BC 的延长线相交于 P，求证：$S_{\triangle PMN} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

9. P 是$\triangle ABC$ 内一点，延长 AP、BP、CP 与对边相交于 F、D、E，已知 $PA = x$，$PB = y$，$PC = z$，$PF = PD = PE = 3$，求 xyz.

10. 已知 Rt$\triangle ABC$ 的两直角边 $AB = 4$，$AC = 3$，$\triangle ABC$ 内有一点 P，$PD \perp BC$ 于 D，$PE \perp AC$ 于 E，$PF \perp AB$ 于 F，且 $\frac{AB}{PF} + \frac{AC}{PE} + \frac{BC}{PD} = 12$，试求 PD、PE、PF.

11. $\triangle ABC$ 中，E 是 AC 的中点，D 在 BC 上，且 $2BD = DC$，AD 与 BE 交于 F，求证：四边形 $FDCE$ 的面积等于$\triangle BDF$ 面积的 5 倍.

12. P、Q、R、S 四点分别由四边形 $ABCD$ 的四个顶点 A、B、C、D 同时开始沿四边形各边依逆时针方向以各自的速度作匀速直线运动若干时间后的位置. 已知 P 由 A 至 B，R 由 C 至 D 分别需要 2 秒钟，Q 由 B 至 C，S 由 D 至 A 分别需要 1 秒钟，问开始运动后，经过多少时间，四边形 $PQRS$ 面积最小？

13. 已知 P、Q 是线段 BC 上的两点，且 $BP = CQ$，A 是直线 BC 外的运动点，当 A 运动到 $\angle PAB = \angle QAC$ 时，问$\triangle ABC$ 是什么三角形？证明你的结论.

测 试 题

一、选择题

1. $\triangle ABC$ 三边 a、b、c 上的高依次为 $h_a=6$，$h_b=4$，$h_c=3$. 那么三边的比 $a:b:c$ 为(　　).

(A) 1 : 2 : 3　　(B) 2 : 3 : 4

(C) 3 : 4 : 6　　(D) 不确定

2. $\square PQRS$ 四边上分别有点 A、B、C、D，其中，A 在 QP 上，D 在 PS 上，C 在 SR 上，B 在 RQ 上，使得 $S_{\square PQRS}=2S_{四边形ABCD}$，则必有(　　).

(A) $AC \parallel QR$ 或 $BD \parallel PQ$

(B) $AC \parallel QR$ 且 $BD \parallel PQ$

(C) $AC \perp PQ$ 或 $BD \perp QR$

(D) $AC \perp PQ$ 且 $BD \perp QR$

3. $ABCDE$ 是正五边形，AP、AQ 和 AR 是由 A 向 CD、CB 和 DE(或延长线)所引的垂线，设 O 是正五边形的中心，$OP=1$，则 $AO+AQ+AR$ 等于(　　).

(A) 3　　(B) $1+\sqrt{5}$

(C) 4　　(D) $2+\sqrt{5}$

二、填空题

4. 四边形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别在 BC、CD 上，$\dfrac{DF}{FC}=1$，$\dfrac{CE}{EB}=2$. 若 $\triangle ADF$ 的面积为 m，四边形 $AECF$ 的面积为 n $(n>m)$，则四边形 $ABCD$ 的面积为_____.

5. 设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于 O，且 $S_{\triangle ABC}=3$，$S_{\triangle BCD}=8$，$S_{\triangle CDA}=9$，$S_{\triangle DAB}=4$，则 $S_{\triangle ABD}+2S_{\triangle BCD}+3S_{\triangle CDO}+4S_{\triangle DAO}=$_____.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 M、N 分别在边 AC、BC 上，BM 与 AN

相交于O，若$\triangle OMA$、$\triangle OAB$、$\triangle OBN$的面积分别是3 cm²、2 cm²、1 cm²，那么$\triangle CMN$的面积是_____cm².

三、解答题

7. 在四边形$ABCD$中，E、F、G、H、K、L分别为AB、BC、CD、DA、AC、BD的中点，又$KM \parallel DB$，$LM \parallel AC$，连接ME、MF、MG、MH，求证：四边形$AEMH$、$BFME$、$CGMF$、$DHMG$的面积相等.

8. 设AM是$\triangle ABC$中BC边上的中线，任作一直线分别交AB、AC、AM于点P、Q、N，求证：

$$\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}=\frac{2AM}{AN}.$$

9. 设M是锐角$\triangle ABC$内一点，并使$\angle AMB=\angle BMC=\angle CMA=120°$，又$P$是$\triangle ABC$的任意一点，求证：$PA+PB+PC \geqslant MA+MB+MC$.

第二十七讲　分类与讨论

基本要点和基本方法

有些数学问题，它所研究的各种对象之间的关系比较复杂，或者它所涉及的范围比较广泛，我们往往采取“分而治之”的策略，将不同的对象进行分类，或者对涉及的范围进行划分，然后对各种情况逐一讨论，最终解决整个问题，这就是分类讨论法.

使用分类讨论法进行分类时，应做到不重复，不遗漏. 分类标准因题而异，但常见的情形一般有：①按“概念”、“法则”加以分类；②整数问题常常按模的剩余类进行分类（如按 2 的剩余类分类即按奇数和偶数分类）；③按几何图形的特征或几何图形的位置加以分类等等.

例题精讲

例 1　解关于 x 的不等式

$$x-b<ax+2.$$

解　原不等式可变为

$$(1-a)x<2+b.$$

当 $a>1$ 时，$x>-\dfrac{b+2}{a-1}$；

当 $a<1$ 时，$x<-\dfrac{b+2}{a-1}$；

当 $a=1$ 且 $b>-2$ 时，不等式的解为一切实数；

当 $a=1$ 且 $b\leqslant -2$ 时，不等式的解为空集. 即不等式无解.

例 2 a、b、c 是三个自然数，且满足

$$a+b+c=abc,$$

求证 a、b、c 只能是 1、2、3 中的一个.

证明 不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$，ab 与 3 比较，只能是

$$ab>3,\ ab=3,\ ab<3.$$

三种情况之一.

若 $ab>3$，则 $abc>3c$，即

$$a+b>2c.$$

这与 $a\leqslant b\leqslant c$ 矛盾. 故 $ab\not>3$.

若 $ab=3$，由 $a\leqslant b$，故

$$a=1,\ b=3.$$

$$a+b+c=abc=3c.$$

$$4+c=3c,\ c=2.$$

与 $b\leqslant c$ 矛盾. 故 $ab\neq 3$，所以只能 $ab<3$.

由于 a，b 是自然数. 有 $ab\leqslant 2$，若 $a=1$，$b=1$，代入

$$a+b+c=abc,$$

有 $2+c=c$. 等式矛盾. 则只能有

$$a=1,\ b=2,\ c=3.$$

例 3 若 a、b 为自然数，求证：$30\mid ab(a^4-b^4)$.

分析 令 $N=ab(a^4-b^4)=ab(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$，$30=2\times 3\times 5$，且 $(2,3,5)=1$，则只须证 $2\mid N$、$3\mid N$、$5\mid N$ 即可.

证明 先证 $2\mid N$，由 a、b 奇偶性分类进行讨论：①若 a、b 中至少有一个为偶数，则 $2\mid N$；②若 a、b 均为奇数，则 $2\mid a-b$，即 $2\mid N$.

再证 $3\mid N$，依模 3 分类讨论：

①若 a、b 中至少有一个为 3 的倍数，则 $3\mid N$；②若 a、b 均不为 3 的倍数，则Ⓘ a、b 对模 3 同余，则 $3\mid a-b$，故 $3\mid N$；Ⓘ a、b 对模 3

不同余，则 $3|a+b$，故 $3|N$.

最后证明 $5|N$，依模 5 分类讨论：①a、b 对模 5 同余，显然 $5|a-b$，则 $5|N$；②a、b 对模 5 不同余，则必为以下两种情形之一：若余数和为 5，有 $5|a+b$，从而 $5|N$；若余数和不为 5，a、b 可表示为如下形式：$5m\pm1$ 或 $5n\pm2$（其中 m，n 为整数），从而 $a^2+b^2=(5m\pm1)^2+(5n\pm2)^2$ 为 5 的倍数，即 $5|a^2+b^2$，故 $5|N$.

综上所述，$2\times3\times5|N$，故命题得证.

例 4 在 1×3 的矩形内不重叠地放两个与大矩形相似的小矩形，且每个小矩形的每条边与大矩形的每条边平行，求这两个小矩形周长和的最大值.

解 设两个小矩形的放置情况有下列三种：

(1) 如图 27-1 甲，若两个小矩形都竖放，此时，两个小矩形的周长和的最大值是

$$2\times\left(2\times1+2\times\frac{1}{3}\right)=5\frac{1}{3};$$

(2) 如图 27-1 乙和图 27-1 丙，若两个小矩形都“横放”，此时两个小矩形周长和的最大值是

$$2(\lambda+3\lambda)+2[3(1-\lambda)+(1-\lambda)]=8;$$

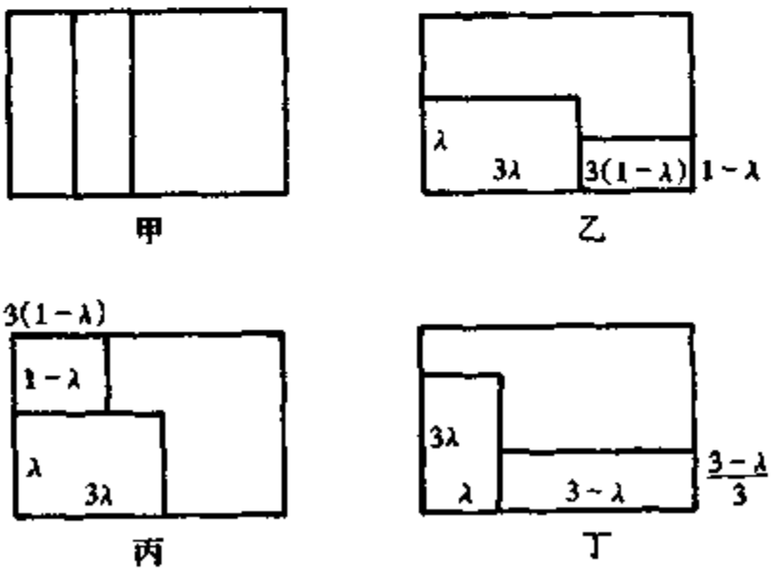


图 27-1

(3) 如图 27-1 丁，若两个小矩形一个“竖放”一个“横放”，两个

小矩形的周长和为

$$2(3\lambda+\lambda)+2\left[(3-\lambda)+\frac{3-\lambda}{3}\right]=2\left(4+\frac{8}{3}\lambda\right).$$

因为　　$0<3\lambda\leqslant 1,\ 0<\lambda\leqslant\frac{1}{3}$,

则当 $\lambda=1/3$ 时,两个小矩形周长和取最大值 $9\frac{7}{9}$,综上所述,两个小矩形周长和的最大值是 $9\frac{7}{9}$.

例 5　如图 27-2,在△ABC 中,$\angle B$ 是锐角,A 点在边 BC 上的射影为 H,C 点在边 AB 上的射影为 K,当$\frac{2BH}{BC}$、$\frac{2BK}{AB}$都是整数时,试判断△ABC 是什么三角形,并证明结论.

解　设 $\frac{2BH}{BC}=a$, $\frac{2BK}{AB}=b$, 故

$$ab=\frac{4BH\cdot BK}{AB\cdot BC}.$$

由 $BC>BK$, $AB>BH$, 有

$$0<ab<4.$$

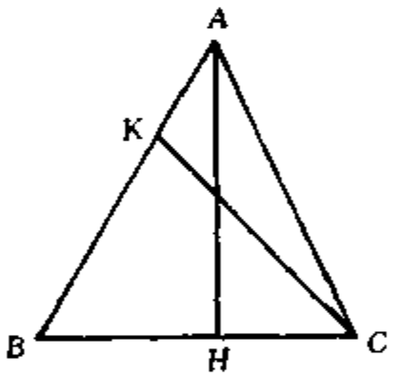


图 27-2

因为 a, b 为(正)整数,可分如下几种情形讨论:

(1) 当 $a=b=1$ 时

$$2BH=BC,\ 2BK=AB.$$

所以 K、H 是 AB、BC 中点,又因为 $CK\perp AB$, $AH\perp BC$, 所以

$$AC=BC,\ AB=AC.$$

即△ABC 是等边三角形.

(2) 当 $a=1$, $b=2$ 时,$2BH=BC$, 有

$$AB=AC,\ 2BK=2AB.$$

K 与 A 重合,即 $CA\perp AB$. 故△ABC 为等腰直角三角形,且 $\angle BAC$

$= 90°$.

当 $a = 2$，$b = 1$ 时，同理可证 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，且 $\angle BCA = 90°$.

(3) 当 $a = 1$，$b = 3$ 时，同样可证 $AB = AC$.

又因为

$$\frac{2BK}{AB} = 3,\ BK = \frac{3}{2}AB.$$

$$AK = BK - BA = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC.$$

所以

$$\angle KCA = 30°,\ \angle KAC = 60°,\ \angle BAC = 120°.$$

故 $\triangle ABC$ 为等腰钝角三角形，且 $\angle BAC = 120°$ (如图 27-3).

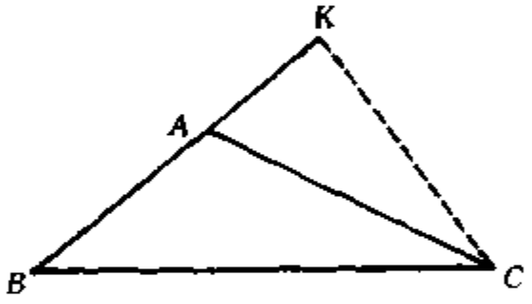


图 27-3

当 $a = 3$，$b = 1$ 时，同理可证 $\triangle ABC$ 为等腰钝角三角形，且 $\angle BCA = 120°$.

例 6 如图 27-4，有 10 个城市，分别以点 A_1，A_2，…，A_{10} 表示. 某人从 A_1 出发，按箭头所指示的方向(不准逆向)可以选择任一路线走向其他某个城市. 试求：

(1) 从 A_1 到 A_5(不绕圈)有多少种走法?

(2) 从 A_1 出发，按图中所示的方向，绕一圈再回到 A_1、有多少种不同的走法?

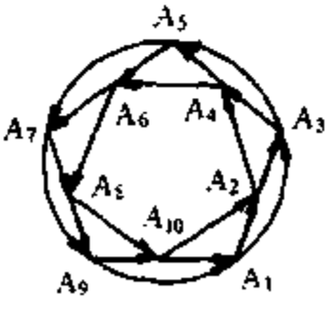


图 27-4

解 为了方便起见，用 $A_1 \to A_i (i = 1, 2, 3, \cdots, 10)$ 表示从 A_1 到 A_i 的所有不同的路线数. 从图上可见 $A_1 \to A_2 = 1$，$A_1 \to A_3 = 2$. 由图可见，从 A_1 到 A_4 的路线可以分成两类：一类是从 A_1 出发经过 A_2 但不经过 A_3 到达 A_4 的路线，由于 A_1 到 A_2 的不同路线有 $A_1 \to A_2$ 种，而 A_2 到达 A_4 的路线数只有一种，所以，这类路线的种数是 $(A_1 \to A_2) \times 1 = A_1$

$\to A_2$；另一类是从 A_1 出发经过 A_3 到达 A_4 的路线，与上同理，这类路程的种数是 $A_1 \to A_3$. 由于上述两类路线不重复不遗漏地包括了所有从 A_1 到 A_4 的路线，所以

$$A_1 \to A_4 = (A_1 \to A_2) + (A_1 \to A_3) = 1 + 2 = 3.$$

同理 $A_1 \to A_5 = (A_1 \to A_3) + (A_1 \to A_4) = 2 + 3 = 5$. 即从 A_1 到 A_5 共有 5 种，为了解决问题的第二部分，再依次往下算：

$$A_1 \to A_6 = (A_1 \to A_4) + (A_1 \to A_5) = 3 + 5 = 8,$$

$$A_1 \to A_7 = (A_1 \to A_5) + (A_1 \to A_6) = 5 + 8 = 13,$$

$$A_1 \to A_8 = 8 + 13 = 21,$$

$$A_1 \to A_9 = 13 + 21 = 34,$$

$$A_1 \to A_{10} = 21 + 34 = 55.$$

由于从图可见，从 A_1 出发绕行一周回到 A_1 必须经过 A_{10}（$\overset{\frown}{A_9A_1}$ 上无箭头），故从 $A_1 \to A_{10}$ 的不同路线数就是 $A_1 \to A_{10} = 55$.

例 7 有两种重量（设它们分别为 p、q，且 $p > q$）的 5 个球，涂有红、白、黑三种颜色，其中两个红球重量不同，两个白球的重量也不同，一个黑球不知它的重量是 p 还是 q. 由于从外形上不能确定球的轻重，请用一台无砝码的天平（只能比较轻重，不能称出重量）称两次. 将 5 个球的重量都区分出来，试述你的称球方法，并说明理由.

分析 用天平称球比较重量的结果，可用等号或不等号表示出来.

解 用 a_1 及 a_2 分别表示两个红球的重量；b_1 及 b_2 分别表示两个白球的重量，c 表示黑球的重量. 因为一共只允许称两次，故我们第一次称球时应将 3 种颜色都放上去，以便尽可能有效地发挥天平的作用，具体称法如下：

第一次称：将天平一端放一个红球和一个白球（重为 $a_1 + b_1$）另一端放另一个红球和黑球（重为 $a_2 + c$），结果有三种情况：

(i) 若 $a_1 + b_1 = a_2 + c$；因为 $a_1 \neq a_2$，所以 $b_1 \neq c$. 第二次称时，再将 b_1 与 c 用天平进行比较.

当 $c > b_1$ 时，必有 $c = p$，$b_1 = q$，从而 $b_2 = p$，又因 $a_1 + b_1 = a_2 + c$，即 $a_1 + q = a_2 + p$，所以 $a_1 = p$，$a_2 = q$.

当 $c < b_1$ 时，类似地可得 $c = q$，$b_1 = p$，$b_2 = q$，$a_1 = q$，$a_2 = p$.

(ii) 若 $a_1 + b_1 > a_2 + c$，此时必有 $a_1 > a_2$（因为若 $a_1 < a_2$，则 $a_1 + b_1 = q + b_1 \leqslant q + p = q + a_2 \leqslant a_2 + c$，与所设矛盾），从而 $a_1 = p$，$a_2 = q$，并且有 $b_1 \geqslant c$（因为若 $b_1 < c$，则 $b_1 = q$，$c = p$，$a_1 + b_1 = p + q = a_2 + c$ 也与所设矛盾）.

称第二次时，再将 b_2 与 c 用天平进行比较，又有三种可能：

(a) 当 $b_2 > c$ 时，$b_2 = p$，$c = q$，$b_1 = q$.

(b) 当 $b_2 = c$ 时，从 $b_1 > c$ 知只有 $c = q$，$b_2 = q$，$b_1 = p$.

(c) 当 $b_2 < c$ 时，$b_2 = q$，$c = p$，$b_1 = q$.

(iii) 若 $a_1 + b_1 < a_2 + c$，此时类似于(ii)中的讨论易证明 $a_1 < a_2$，从而必有 $a_1 = q$，$a_2 = p$ 且 $b_1 \leqslant c$.

称第二次时，再将 b_2 与 c 用天平进行比较，也有三种情形.

(a) $b_2 > c$ 时，$b_2 = p$，$c = q$，$b_1 = q$，

(b) $b_2 = c$ 时，$c = p$，$b_2 = p$，$b_1 = q$，

(c) $b_2 < c$ 时，$b_2 = q$，$c = p$，$b_1 = p$.

练　习　题

A　组

1. 解方程 $|x + 3| - |x - 1| = x + 1$.

2. 解关于 x 的不等式 $(x - 1)m^2 > x - m - 2$.

3. 解关于 x 的不等式组

$$\begin{cases} a(x - 2) > x - 3, \\ 9(a + x) > 9a + 8. \end{cases}$$

4. 已知整数 a 不能被 5 整除，试证明 $a^4 - 1$ 能被 5 整除.

5. 商店的糖果有 3 千克及 5 千克两种包装，货源充足，保证供

应，求证：凡购买 N（N 是自然数，且 $N \geqslant 8$）千克糖果时，都不用拆包.

6. 试证平面上不存在这样的四点 A、B、C、D，使得 $\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDA$、$\triangle DAB$ 都是锐角三角形.

7. 平面上有 A、B、C、D 四点，其中任意三点都不在一条直线上. 求证：在 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle ACD$、$\triangle BCD$ 中至少有一个三角形的一个内角不超过 45°.

B 组

8. 解方程 $(m^2-1)x = m^2 - 3m + 2$.

9. 解不等式 $|x+5| - |2x-1| > 2 - x$.

10. 对于不等式 $ax > b$，若 $x = 3$ 在其解中，求 a、b 应满足的关系.

11. 已知 $x = \sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}}$，试求 $\frac{2n\sqrt{x^2-4}}{x - \sqrt{x^2-4}}$ 的值.

12. 证明：对任意正整数 k，$2k-1$、$2k+1$ 两数中至少有一个不能等于两整数的平方和.

13. 如果 p、q、$\frac{2p-1}{q}$、$\frac{2q-1}{p}$ 都是整数，且 $p > 1$，$q > 1$，求 $p+q$ 的值.

14. 试证：内接于平行四边形的三角形面积不大于该平行四边形面积的一半.

测 试 题

一、填空题

1. 如果不等式组 $\begin{cases} 9x - a \geqslant 0 \\ 8x - b < 0 \end{cases}$ 的整数解仅为 1、2、3，那么适合这个不等式组的整数 a、b 的有序数对 (a, b) 共有____.

2. 周长为 30，各边长互不相等且都是整数的三角形的个数有

____个.

3. 方程 $x+2y=18$ 的正整数解的组数是_____.

4. 已知三角形三边的长 a、b、c 都是整数，且 $a \leqslant b < c$，如果 $b=7$，那么这样的三角形有_____个.

二、解答题

5. 设 a、b、$c \in N$，且 $a<b<c<d$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$，试求 a、b、c、d 的值.

6. $n(n \geqslant 3)$ 个学生围成一圈，依一个指定的方向顺次编号为 1，2，…，n，老师按下述规则叫号：设某一次叫到第 i 号，则下一次被叫到的是第 i 号后的第 i 个学生. 试证明不论第一次被叫到的是哪一号，至少有一个学生永远叫不到.

7. 在 $\triangle ABC$ 的边 AB、BC、CA 上分别取点 M、K、L. 求证 $\triangle AML$，$\triangle BKM$，$\triangle CLK$ 中至少有一个的面积不大于 $\triangle ABC$ 面积的四分之一.

8. 如果把四张圆纸片 O_1、O_2、O_3、O_4 叠置起来，使得其中任三张都有公共点，求证：四张圆纸片有公共点.

第二十八讲　逻辑推理

基本要点和基本方法

有些问题，不是进行许多计算、分析数量关系或图形的变换来得出答案和结论的. 问题的条件也不是算式、数字和图形，而是一些相互关联的事实. 题目需根据条件进行有根有据的分析推理，作出正确的判断，得出问题的答案，这类问题就是逻辑推理问题. 求逻辑推理问题的方法有：

演绎法. 即从题设的某些条件或结论的反面出发，经过分析推理，排除不可能的情形，从而得出正确结论的方法.

表格法. 即将问题中的信息(条件)反映在一张表格上，让条件与条件、条件与结论之间的联系明朗化，促进有效推理，使得问题获解的方法.

画图法. 即把问题中的元素表示为点，将元素间的关系表示为线，从而利用图形的直观性进行推理的方法.

例题精讲

例1　某个参观团根据下列约束条件从 A、B、C、D、E 五个城市选择参观地点，试分析参观团至多能去哪几个城市.

(1) 若去 A 市，也必须去 B 市；

(2) D、E 两市至少去一市；

(3) B、C 两市只去一市；

(4) C、D 两市都去或都不去；

(5) 若去 E 市，则 A、D 两市也必须去.

解　从条件(2)出发分析，由于 D、E 至少去一市，若去 E 市，则

由条件(5)，必须去 A，D 两市．于是，分别由条件(1)及(4)，B，C 也必须去，这与条件(3)相违，所以不能去 E 市．

由以上讨论可见，参观团必须去 D 市，由条件(4)，C 市也要去．再由条件(3)，不能去 B 市，从而由条件(1)，A 市也不能去．

因此，参观团最多去 C，D 两市，又经检验，去 C，D 两市满足所有约束条件．

说明 这里选取条件(2)出发分析，是由于这个条件较肯定，分析起来比较方便，从其他条件入手讨论，也会得到相同结论，读者不妨试一试．

例 2 某次体育比赛共有 $n(n \geqslant 3)$ 名选手参加，每两名选手都比赛一局．现知无平局出现，而且每个选手都未能击败所有对手．求证：其中必存在 3 名选手甲、乙和丙，使得甲胜乙，乙胜丙，丙胜甲．

证明 题中的条件“都比赛一局、无平局以及无全胜”是形式逻辑的同一律的反映．

这次比赛一定有赢局最多的选手(可能不止一个)，于是从这个极端情形着眼，把赢局最多的选手中的一位作为乙，其余的选手，因无平局出现，则可分为两个集合，设输给乙的选手组成的集合为 x，胜乙的选手所组成的集合为 y．如图 28-1 所示．

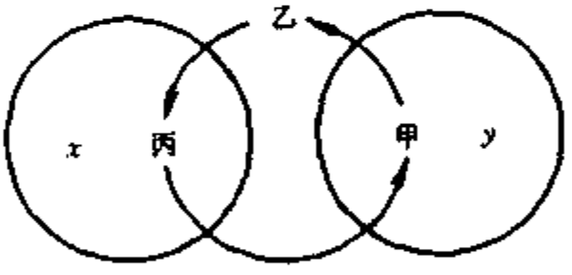


图 28-1

因为乙不全胜，则集合 y 不是空集(没有一个元素的集合)．y 中任选一选手作为甲，则甲胜乙．

若甲胜集合 x 中的每一选手，则甲赢的局数比乙还多，这与乙赢局最多的假设矛盾，于是集合 x 中至少有一选手丙，丙胜甲．这样就找到了 3 名选手，使得甲胜乙，乙胜丙，丙胜甲．

说明 由此例可见，用演绎推理法解决逻辑推理问题时，必然会用到形式逻辑的几个主要基本规律：同一律、矛盾律和排中律，下面对这三个规律简单说明如下．

同一律是说：在同一思维过程中，对于同一个对象的思想必须确定的．

矛盾律是说：在同一思维过程中，对于同一个对象的思想不能自相矛盾.

排中律是说：在同一思维过程中，对于同一个对象的思想或者真或者假，不能既不真也不假.

例3 某学校举办数学竞赛，A、B、C、D、E 五位同学得了前五名，发奖前，老师让他们猜一猜各人的名次排列情况

A 说：B 第三名，C 第五名.

B 说：E 第四名，D 第五名.

C 说：A 第一名，E 第四名.

D 说：C 第一名，B 第二名.

E 说：A 第三名，D 第四名.

老师说：每个名次都有人猜对. 问这五位同学的名次是怎样排列的？

解 依题意列表如下：

判断 \ 名次	一	二	三	四	五
A			B		C
B				E	D
C	A			E	
D	C	B			
E			A	D	

由表可见，被猜为第二名的只有 B 一人，则可以断定 B 是第二名，而不是第三名. 并由此推知 A 是第三名. 由 A 是第三名推知 C 是第一名. 并由此推知 D 是第五名，则可知 E 是第四名.

因此，五位同学的名次排列为：C 是第一名，B 是第二名，A 是第三名，E 是第四名，D 是第五名.

例4 有一次四人游泳比赛，比赛之前四名选手 A、B、C、D 进行预测性会谈.

A 说：我肯定得第一.

B 说：我绝对不会得最末名.

C 说：我不能得第一，也不会是最末名.

D 说：那我是最后一名.

比赛揭晓，发现他们之中只有一位预测错误，而且无并列名次，请指出是哪一位选手预测错误.

解法一 根据已知条件，列出下表，表中"+"所在的列表示预测的名次.

根据形式逻辑的矛盾律，推理如下：

条件 名次 / 选手	1	2	3	4
A	+0			
B	+1	+0	+0	
C		+	+	
D				+

(1) 若 B 预测错误，则 B 是第 4 名，又 D 第四名，这里与无并列名次矛盾，同理，C，D 预测错误也会引出矛盾. 这样，推出 A 预测错误. 预测错误的名次在它所在的方格中写上"0"，正确的写上"1".

(2) 因为一个名次 1 人，则 B 肯定第 1 名.

(3) 前已推得 D 猜测正确.

(4) 由(1)、(2)、(3)可知 A、C 占据 2、3 名.

因此，A 猜测错误，名次有两种情形：$B_1A_2C_3D_4$ 或 $B_1C_2A_3D_4$.

解法二 用穷举列表法求解如下：

预测	假设			
	B 错	C 错	D 错	A 错
A 猜 A_1	A_1	A_1	A_1	$A_{2,3}$
B 猜 $B_{第4}$	B_4	$B_{2,3}$	$B_{2,3}$	B_1

（续表）

预　测	假　　设			
	B 错	C 错	D 错	A 错
C 猜 $C_{2,3}$	$C_{2,3}$	$C_{1,4}$	$C_{2,3}$	$C_{2,3}$
D 猜 D_4	D_4	D_4	$D_{2,3}$	D_4
成立吗	矛盾	矛盾	矛盾	成立

说明　由上述例子可见，用列表法求逻辑推理问题的意义是：通过列表有助推理，促使问题迅速获解，或通过列表穷举，使得问题直观获解.

例 5　有 n 个人参加一个会议，其中没有两个相互认识的人都恰好有 2 个共同的熟人，证明这时每个人的熟人个数相同.

证明　用 n 个顶点代表这 n 个人，用连线代表“认识”，于是问题化为图 28-2 来表示.

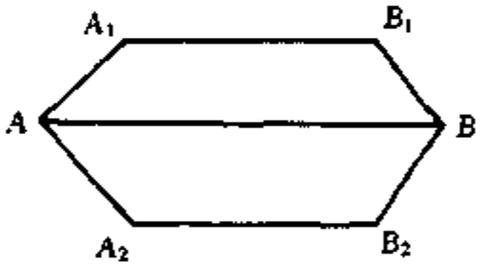


图 28-2

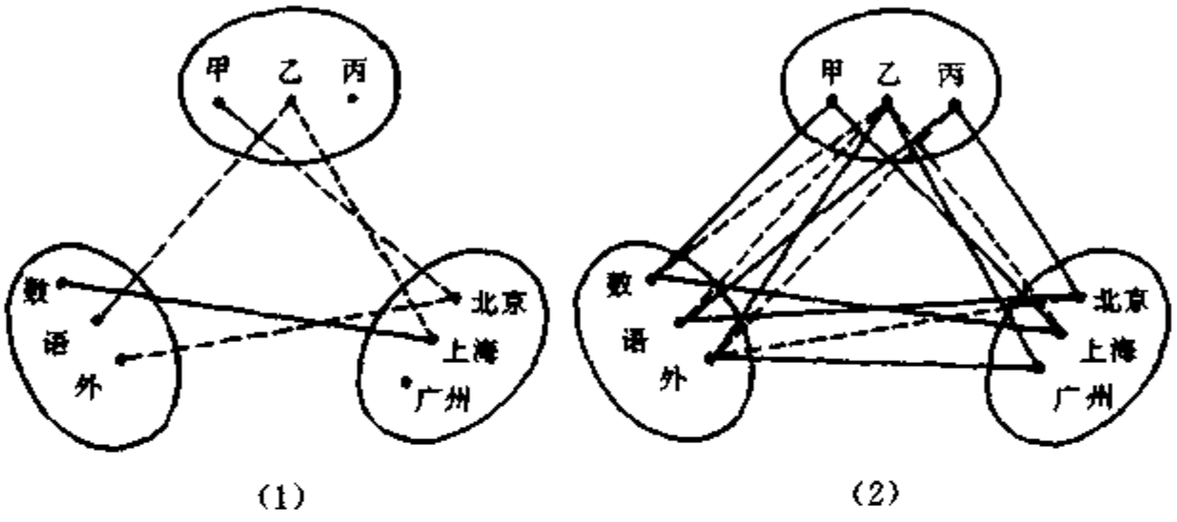
当 A 与 B 认识时，只须证明 A 认识的人数与 B 认识的人数一样多. 设若 A 认识 A_1，B 不认识 A_1，从而 A_1 与 B 有（除了 A 外）另一个共同的熟人 B_1. 每个 A 认识的 A_1 都相应有一个 B 认识的 B_1，反之亦然，于是 A 的熟人个数等于 B 的熟人个数，这相当于说图中任一对相邻点 A、B 它们的度数（由该点出发的线的条数）相同.

当 A 与 B 不认识时，由假设 A、B 必有共同的邻点 C，由前面证明可知 A 与 C 有相同的度数，从而 A 与 B 的度数相等，即熟人的个数相同.

例 6　甲、乙、丙三人在北京、上海、广州的中学里教不同的课程：数学、语文、外语. 已知：(1)甲不在北京工作，乙不在上海工作. (2)在北京工作的人不教外语. (3)在上海工作的人教数学. (4)乙不教语文. 问这些人各在哪个城市教什么课程？

解　将问题中的事物分成三类：名字代号一类，教学课程一类和

城市一类，类中元素用点来表示，如图 28-3-(1). 若它们描述不同人的特征，则不同类的两个点用虚线连结. 若它们对应于一个人的特征，则不同类的两个点用实线连结. 图 28-3-(1)包含问题给定类的全部元素及其间的关系.



(1)　　(2)

图 28-3

现作虚线“数・乙”(如图 28-3-(2). 因为“上海”对应于“数学”而“上海”不对应于“乙”，即“数学”不可能对应于“乙”.

用图对这问题进行运算：如果在以三个不同类为顶点的三角形中，一条边是实线，第二条边是虚线，则第三条边应当是虚线. 显然，若某一点是用虚线连结第二类的两个点，则它应该用实线连结这个类的第三点，因此作实线“外・乙”.

现作虚线“北京・乙”因为在三角形“乙・外・北京”中“乙・外”是实线，而“外・北京”是虚线.

作实线“广州・乙”. 因为“乙・北京”，“乙・上海”是虚线.

现作实线“外・广州”. 如果在以不同类的点为顶点的三角形中，两条边是实线，则第三条边也应该是实线. 因此，第一个实线三角形“乙・外・广州”作出来了.

同理，作实线“北京・丙”，“上海・甲”，“外・广州”，“语・北京”，“语・丙”. 实线三角形“乙・外・广州”，“甲・数・上海”和“丙・语・北京”的各顶点给出题设问题的答案：乙在广州教外语，甲在上海教数学，丙在北京教语文.

说明 本例也可用演绎法证明如下：选取乙作为推理的出发点.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{由(1)}\\\text{由(3)}\end{array}\right\}\Rightarrow\text{乙不教数学}\\\text{由(4)}\end{array}\right\}\Rightarrow\text{乙教外语}\left.\begin{array}{l}\\\\\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{由(1)}\\\text{由(2)}\end{array}\right\}\Rightarrow\text{乙在广州}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\text{乙在广州教外语}\\\text{由(3)}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\text{在北京教语文}\\\text{由(1)}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\text{丙在北京教语文}\\\text{乙在广州教外语}\end{array}\right\}\Rightarrow\text{甲在上海教数学.}$$

本例还可用列表法求解，读者不妨试一试.

练　习　题

A　组

1. 有红、黄、蓝三个箱子，一个苹果放入其中的某个箱子内，并且：

(1) 红箱盖上写着："苹果在这个箱子里"；

(2) 黄箱盖上写着："苹果不在这个箱子里"；

(3) 蓝箱盖上写着："苹果不在红箱子里"；

已知(1)、(2)、(3)中只有一句是真的，问苹果在哪个箱子里？

2. n 个空格排成一行，第一格放入一枚棋子，每步可向前移 1、2 或 3 格，二人交替走，以先到最后一格为胜，问是先走者还是后走者必胜？怎样取胜？

3. S、J 和 R 三人在火车上担任刹车员、司炉和司机(不一定依此顺序). 今天火车上只有三位乘客，而且很凑巧，三位乘客的姓也是 S、J 和 R. 为了把工作人员和乘客区分开，让我们把乘客称为先生——S 先生、J 先生和 R 先生. 此外，我们还知道：

(1) R 先生住在底特律市；

(2) 刹车员住在芝加哥和底特律之间；

(3) 住在芝加哥的乘客和刹车员同姓；

(4) 刹车员的一位邻居也是一位乘客，他挣的工资正好是刹车员工资的三倍；

(5) J 先生一年恰好挣 2 000 元，得靠政府救济过日子；

(6) S 的台球打得比司炉好；

现在要问，谁是司机？

4. 有 n 个人参加一个会议，其中每两个相互认识的人都没有共同的熟人，证明这时每个人的熟人个数都相同.

5. 在一次大学排球冠亚军争夺赛中，有四队参加决赛，他们是：生物系，历史系，数学系和中文系. 有三位学生在谈论这次决赛的最后结果.

“看来，中文系稳得亚军，数学系只能得第三名.”第一位同学似乎很有把握地回答着.

“是这样？不见得吧！”另一位同学反驳说，“得冠军的是中文系，亚军应该是生物系.

“你们都搞错了”第三位同学更正说：“亚军是历史系，而数学系只能得第四名.”

最后结果，每一个学生只说出其中一个是正确的，而一个是错误的.

试问这次决赛中名次的前后应是怎样的？

6. 五个学生 A、B、C、D、E 参加一场比赛，另外五人对比赛结果进行了预测，每人预测两个名次：

甲预测：B 第 2 名，A 第 3 名.

乙预测：D 第 2 名，E 第 4 名.

丙预测：E 第 1 名，C 第 5 名.

丁预测：D 第 3 名，C 第 4 名.

戊预测：A 第 2 名，B 第 5 名.

结果每人恰好猜对了一个名次，并且每个名次都有一人猜对，问实际比赛结果如何？

B 组

7. 有 n 个棋子放成一堆，甲、乙两人轮流每轮取走 1 或 2 或 3

个棋子，谁拿到最后一个为胜利者，问：在这个游戏中是否有必胜的策略？

8. 在 8×8 的正方形表格里随意填上由 1 到 64 的所有整数，证明，总能从表格里找到两个相邻格，其上数字之差不小于 5.

9. 甲、乙、丙、丁、戊五人各从图书馆借来一本小说，他们约定读完后互相交换. 这 5 本书的厚度以及他们 5 人的阅读速度都差不多，因此 5 人总是同时交换书，经数次交换后，他们 5 人每人都读完了这 5 本书. 现已知：

(1) 甲最后读的书是乙读的第二本书；

(2) 丙最后读的书是乙读的第四本书；

(3) 丙读的第二本书甲在一开始就读了；

(4) 丁最后读的书是丙读的第三本书；

(5) 乙读的第四本书是戊读的第三本书；

(6) 丁第三次读的是丙一开始读的那本书.

根据上述情况，你能说出丁第二次读的书是谁最先读的吗？

10. 160 人站在一行，自 1 起至 160 依次报数，凡报奇数者出队；留下的再从 1 起报数，报奇数又出队，这样反复下去，最后留下一个人，问这个人第一次报数是多少？

11. 甲、乙、丙、丁四人比赛象棋，每两人都比一盘，结果乙胜丁、并且甲、乙、丙胜的盘数相同，问丁胜了几盘.

12. 有一正方体，将它各个面上分别标上字母 a、b、c、d、e、f. 甲、乙、丙三个同学从三个不同的角度去观察此正方体，观察结果如图 28-4 所示. 问这个正方体各个面上的字母的对面各是什么字母？

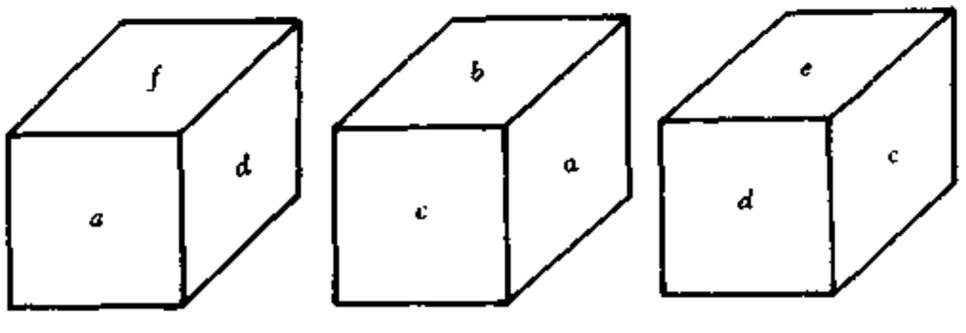


图 28-4

13. 调查某班同学的文具盒，得到如下结果：

(Ⅰ) 有钢笔的同学，没有圆珠笔；

(Ⅱ) 有圆珠笔的同学，也有毛笔；

(Ⅲ) 有铅笔的同学，没有毛笔；

(Ⅳ) 没有铅笔的同学，有圆珠笔.

根据上述调查结果，小明得出下述五点结论：

□(1) 有毛笔的同学也有钢笔.

□(2) 没有毛笔的同学有钢笔.

□(3) 有圆珠笔的同学人数与有毛笔的同学人数相同.

□(4) 没有任何同学同时有圆珠笔和铅笔.

□(5) 有钢笔的同学也有铅笔.

小明的结论是否正确?请你在每个结论前的方框内，你认为正确的打“√”；不一定正确的打“×”.

测 试 题

1. A、B、C、D 四个小孩在院子里踢球，把房间的窗玻璃打破了. 询问后得到的回答分别是：A 说：B 打破的. B 说：D 打破的. C 说：不是我打破的. D 说：B 撒谎. 已知其中只有一个孩子说了真话，而且肇事者也只是其中的一个人，问说真话的是谁，肇事者是谁?

2. 甲、乙、丙三人手中各有若干粒糖，第一次甲给乙和丙的颗数各等于乙、丙手中原有的颗数，第二次乙给甲和丙的颗数各等于甲、丙两人手中现有的颗数，第三次丙给甲，乙两人手中的颗数各等于甲，乙两人手中现有的颗数，这时，甲、乙、丙三人手中恰好每人有 8 颗糖. 问甲、乙、丙三人原有多少颗糖?

3. 有 50 个女孩，她们的肤色是白的或浅黑的，眼睛是蓝色的或褐色的. 如果有 14 个是蓝眼睛白肤色，31 个是浅黑肤色，18 个是褐色眼睛，那么褐色眼睛浅黑皮肤的女孩有几个?

4. 小张、小李和小王分别出生在北京，上海和武汉，他们各是歌唱、相声和舞蹈演员. (1)小王非歌唱演员，小李非相声演员. (2)歌唱

演员不出生在上海.(3)相声演员出生在北京.(4)小李不出生在武汉.试确定他们的职业和出生地.

5. 甲,乙,丙,丁四个足球队进行一次比赛,每两个队都要比赛一场,到现在为止,甲队只赛了 1 场,乙队赛了 2 场,丙队赛了 3 场.问丁队赛了几场?

6. 预定在公园的空地上举行一个集会,并为此预订了一个帐篷,如果下雨的机会是 50%,又不管是否下雨,在集会时不能如期赶到帐篷的机会也是 50%,那么赴会者被淋雨的机会是多少?

7. 房里有 8 个人,每人都和其余的人握一次手,且只握一次,试问共握了多少次手?

第二十九讲　染色问题

基本要点和基本方法

我们把要求作出或者证明存在满足某种染色性质的点列、格点、直线、四边形区域和图形等问题叫做染色问题. 把用染色作为一种数学工具去分析问题、解决问题的思维方法叫做染色方法.

染色问题是一类与抽屉原理和图论知识联系在一起的数学问题. 根据染色的对象(点、线段或区域)不同,我们把它分为点染色、线段染色和区域染色三类. 不论是哪类染色问题,它们大都围绕同色点或同色三角形展开分析讨论.

染色方法处理数学问题的思维模式为:通过对点、线或区域进行合理的染色. 建立原问题的染色模型,然后对染色模型进行研究. 获得原问题的解.

例题精讲

例 1　将正十三边形的每个顶点染成黑色或染成白色,每顶点只染成一色. 证明存在三个同色顶点,它们刚好成为一个等腰三角形的顶点.

证明　设其 13 个顶点依次为 A_1, A_2, …, A_{12}, A_{13}. 若 13 个顶点都染成黑色或都染成白色,则结论显然成立. 则只需考虑 13 个顶点中有染黑色也有染白色的情形. 这时必有相邻两顶点同色,不妨设 A_1, A_2 同色,现考虑 A_{13}, A_1, A_2, A_3, A_8 这 5 个顶点,由抽屉原理知其中必有三顶点同色,这又分为下列三种情形:

(1) A_{13}、A_1、A_2、A_3 中有三点同色,又 A_1、A_2 同色,则 A_{13}、

A_1、A_2、A_3 同色. 这时$\triangle A_1A_2A_3$ 为三顶点同色的等腰三角形.

(2) A_{13}、A_3、A_8 同色,这时$\triangle A_{13}A_3A_8$ 为三顶点同色的等腰三角形.

(3) A_1、A_2、A_8 同色,这时$\triangle A_1A_2A_8$ 为三顶点同色的等腰三角形.

说明 由本例可见,抽屉原理、分类思想往往伴随染色问题和染色方法.

例2 能否把 1, 1, 2, 2, 3, 3, …, 1 986, 1 986 这些数排成一行,使得两个 1 之间夹着一个数,两个 2 之间夹着两个数,…,两个 1 986之间夹着一千九百八十六个数? 请证明你的结论.

证明 如图 29-1,将 1 986 × 2 个位置按奇数位着白色、偶数位着黑色,于是黑白点各有 1 986 个.

图 29-1

现令同一个偶数占据一个黑点和一个白点,同一个奇数要么都占黑点,要么都占白点,于是 993 个偶数,占据白点 $A_1 = 993$ 个,黑点 $B_1 = 993$ 个.

993 个奇数,占据白点 $A_2 = 2a$ 个、黑点 $B_2 = 2b$ 个,其中 $a + b = 993$.

于是,共占白点 $A = A_1 + A_2 = 993 + 2a$ 个,黑点 $B = B_1 + B_2 = 993 + 2b$ 个.

由于 $a + b = 993$ (非偶数!). 则 $a \neq b$, 得 $A \neq B$, 这与黑、白点各有 1 986 个矛盾. 因此,这种排法不可能.

例3 空间六点,任三点不共线,任四点不共面,成对地连结它们得十五条线段,用红色和蓝色染这些线段(一条线段只染一种颜色). 求证:无论怎样染,总存在同色三角形.

证明 设 A、B、C、D、E、F 是所给六点. 考虑以 A 为端点的线段 AB、AC、AD、AE、AF,由抽屉原理这五条线段中至少有三条颜色相同. 不妨设就是 AB、AC、AD,且它们都染成红色,再来看

$\triangle BCD$ 的三边，如其中有一条边是红色的(例如 BC 边)，则同色三角形已出现(红色$\triangle ABC$)；如$\triangle BCD$ 三边都不是红色的，则它就是蓝色三角形，同色三角形也出现了. 总之，不论在哪种情形下，都存在同色三角形.

说明 在例 3 中若视六点为六个人，两点连红线表示两人认识，两点连蓝线表示两人不认识，于是得到其等价命题：任何六个人中，一定有三个人或者互相都认识，或者互相都不认识. 它属图论中的拉姆赛问题. 在图论中，将 n 点中每两点都用线段相连所得的图形叫做 n 点完全图，记作 k_n. 这些点叫做“顶点”，这些线段叫做“边”，于是我们可分别用图论语言来叙述两个重要结论.

定理 1 若在 k_6 中，任染红、蓝两种颜色，则必有一只同色三角形.

定理 2 若在 k_{17} 中，任染红、黄、蓝三种颜色，则必有一只同色三角形.

例 4 平面上有 6 个点，任何三点都是一个不等边三角形的顶点，则这些三角形中有一个三角形的最长边又是另一个三角形的最短边.

证明 把每个三角形的最短边染成红色，剩下的边染成白色. 由定理 1 可知必出现同色三角形. 又每个三角形都有最短边，则每个三角形上都有红色边，于是上述同色三角形是红色的，则它的最长边也是红的，同时又是另一个三角形的最短边.

例 5 6 个人参加一个集会，每两个人或者互相认识或者互不认识. 求证：存在两个集合，每个集合有三人组成，在同一个集合中，成员互相认识，或者互不认识(这二集合可以有公共成员).

证明 将每个人用一个点表示. 如果两个人认识就在相应的两个点之间连一条红线，否则就连一条蓝线. 要证明在所得的图中存在两个同色三角形.

设有 x 个同色的三角形，则边不全同色的三角形有 $C_6^3 - x = 20 - x$ 个.

如果从一点出发的两条线段同色，我们称它们构成一个同色角，在每个同色三角形中，每个顶点处有一个同色角，共有三个同色角，

而在非同色三角形中，只有一个同色角，于是共有 $3x+(20-x)=20+2x$ 个同色角.

另一方面，设从顶点 A 出发的五条边中有 r 条红的，$(5-r)$ 条蓝的，则在 A 处有 $C_r^2+C_{5-r}^2\geqslant C_2^2+C_3^2=4$ 个同色角. 6 个顶点处至少有 $4\times 6=24$ 个同色角，于是 $20+2x\geqslant 24$. 因此 $x\geqslant 2$，即至少有两个同色三角形.

说明 本例实质上是定理 1 结论的一个加强.

例 6 如图 29-2-(1)，3 行 7 列的小方格每一格任意染上红色或蓝色. 求证：存在一个矩形，它的四个角上的小方格颜色相同.

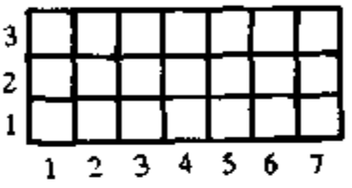


图 29-2-(1)

证明 由抽屉原则，第 1 行的 7 个方格至少有 4 个同色，不妨设为红色(带阴影的)，它们分布在 1、2、3、4 列，如图 29-2-(2)，在第 1、2、3、4 列(以下不必再考虑第 5、6、7 列)中，如第 2 行或第 3 行，出现两个红色小方格，则这个问题已经得证；如第 2 行和第 3 行每行最多只有一个红色小方格，如图 29-2-(3)，则在这两行中必出现四色同为蓝色的矩形.

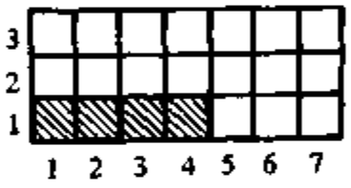


图 2 9-2-(2)

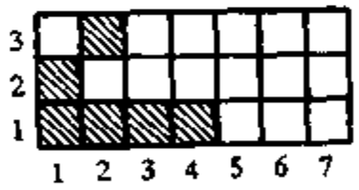


图 29-2-(3)

说明 本例证明过程中除了运用抽屉原理外，还用到一种思考问题的有效方法，就是逐步缩小所要讨论的对象的范围，把复杂问题逐步化为简单问题进行处理的方法.

例 7 把正三角形划分为 n^2 个同样的小正三角形，把这些小正角形的一部分标上号码 1，2，…，m，使得号码相邻的三角形有相邻边. 求证：$m^2\leqslant n^2-n+1$.

证明 将 n^2 个小正三角形如图 29-3 那样染色. 这时黑三角形共有

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\text{ 个，而白三角形共有}$$

$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ 个.

显然两个有相邻号码的三角形染有不同颜色，因而标号码的黑三角形仅能比白三角形多1，因此编号的三角形数不超过 $2\times\frac{n(n-1)}{2}+1=n^2-n+1$ 个.

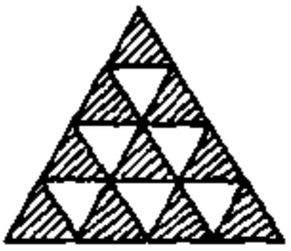


图 29-3

例 8 证明：用 15 块大小是 4×1 的矩形瓷砖和一块大小是 2×2 的正方形瓷砖，不能恰好覆盖 8×8 的正方形地面.

证法一 如图 29-4，用间隔为两格且与副对角线平行的小格同色的染色方式，以黑白两种颜色将整个地面染色. 显然，地面上黑、白格各有 32 个.

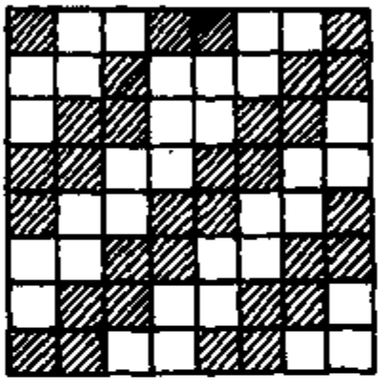


图 29-4

每一块 4×1 的瓷砖不论是横盖还是竖盖，也不论盖在何处，总是盖住二黑二白，又因为与副对角线平行的斜线上的格子总是同色，而与主对角线平行的斜线上的相邻两格总是异色，则不论怎么放置，一块 2×2 的瓷砖总是盖住三黑一白或三白一黑，于是 15 块 4×1 的瓷砖铺盖后还剩下两白格和两黑格，它不可能用一块 2×2 的瓷砖盖住. 因此命题得证.

证法 2 用 1、2、3、4 种颜色如图 29-5 那样染色，使与主对角线平行的斜线上的格子总是保持同色. 于是不论如何放置 4×1 的瓷砖，总是盖住四种颜色的格子各一格，而一块 2×2 的瓷砖盖住的四格中与主对角线平行的斜线上的两格总是同色. 即一块 2×2 的瓷砖不论如何放置也不能同时盖住四种不同颜色的格子，而 15 块 4×1 的瓷砖铺盖后，剩下 1、2、3、4 种颜色的格子各一个，它不可能用一块 2×2 的瓷砖盖住，因此命题得证.

1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1

图 29-5

说明 由本例可见，解决方格染色问题的关键是要确定用几种颜色给方格染色以及用何种方式给方格染色. 虽然用两种颜色并采用间格交替染色或用列(行)交替染色的方式是常用的，但对有些问题的解决，要根据题意用多种染色方式进行试验，从中找出正确解决问题的途径.

练 习 题

A 组

1. 在两张 1 982 × 1 983 的方格纸上涂红、黑两种颜色，使得每行、每列都有偶数个方格是黑色的. 如果将两纸重叠时，有一黑格与一红格重合，证明至少还有三个方格与不同颜色的方格重合.

2. 有 1 987 块玻璃片，每块涂有红、黄、蓝三色之一，进行下列操作：将不同颜色的两块玻璃片擦净，然后涂上第三种颜色.

求证：(1)无论开始时，红、黄、蓝玻璃片各有多少块，总可以经过有限次操作而使所有玻璃片涂有同一种颜色. (2)最后变成哪一种颜色，与操作顺序无关.

3. 平面上每两点染上两种颜色中的一种，已知任一边长为 1 的正三角形中都有两种颜色的顶点，(1)求证：存在边长为 $\sqrt{3}$ 的同色三角形(即顶点同色). (2)举出染色满足题设要求的平面的例子.

4. 已知一组球，每个球染上红色或蓝色，每色至少有一个球，每个球重 1 磅或 2 磅，每种重量至少有一个球，证明有两个球具有不同的重量和不同的颜色.

5. 连接圆周上 9 个不同点的 36 条直线段染成红色或蓝色，假设 9 点中每 3 点所确定的三角形都至少含有一条红色边. 证明：有四点，其中每两点的连线都是红色.

6. 有 9 名数学家在一次国际数学家会议上相遇，假定每 3 个人总有两人互相认识，证明必有 4 名数学家彼此认识.

7. 用任意方式给平面上的每一个点染上黑色或白色. 求证：一

定存在一个边长为1或$\sqrt{3}$的正三角形，它三个顶点是同色的.

B 组

8. 大厅中会聚了100个客人，他们中每人至少认识67人，证明在这些客人中一定可以找到4人，他们之中任何两个都彼此相识.

9. 在线段AB上关于它的中点对称地放置$2n$个点.任意将这$2n$个点中的n个染成红色，另n个染成蓝色.证明：所有红点到A的距离之和等于所有蓝点到B的距离之和.

10. 用3种颜色给平面上的点着色，求证：其中必有两个同色点距离为1.

测 试 题

1. 有20张卡片，将数字0至9每一个都写在两张卡片上面，试问，能否将这些卡片排成一排，使得两个0相邻，两个1之间恰有1张卡片，两个2之间恰有2张卡片，等等，直到两个9之间恰有9张卡片？

2. 已知大小为100×100方格的正方形纸片，引进某些沿着方格边而又与方格无公共点的本身不相交的折线.这些折线严格地在正方形内部，而端点必须在边界上.证明：除了正方形的顶点外，还能求出别的结点（正方形内部或边界上）不属于这些折线中的任意一条.

3. 将已给的一个凸多边形每边的外侧涂成红色，作出此凸多边形的若干条对角线，同样对这些对角线的某侧涂红.证明：由这些对角线所分出的诸多的多边形中，至少有一个，它的外侧是完全涂成红色的.

4. 有17个学生，他们之间互相通信，内容限于讨论a、b、c三个问题，但是每两个学生互相通信时只讨论一个问题.证明：至少有三个学生，他们之间的通信内容是讨论同一个问题.

5. 证明：只用2×2及3×3的两种瓷砖不能恰好铺盖23×23

的正方形地面.

6. 下图 29-6 中是由 14 个大小相同的正方形组成的图形. 证明:不论如何用剪刀沿着图中直线进行剪裁,总剪不出七个由相邻两个小正方形组成的矩形来.

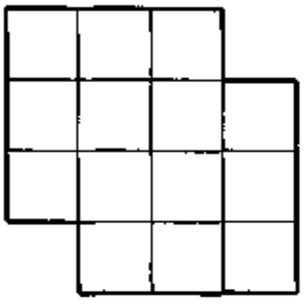


图 29-6

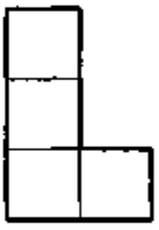


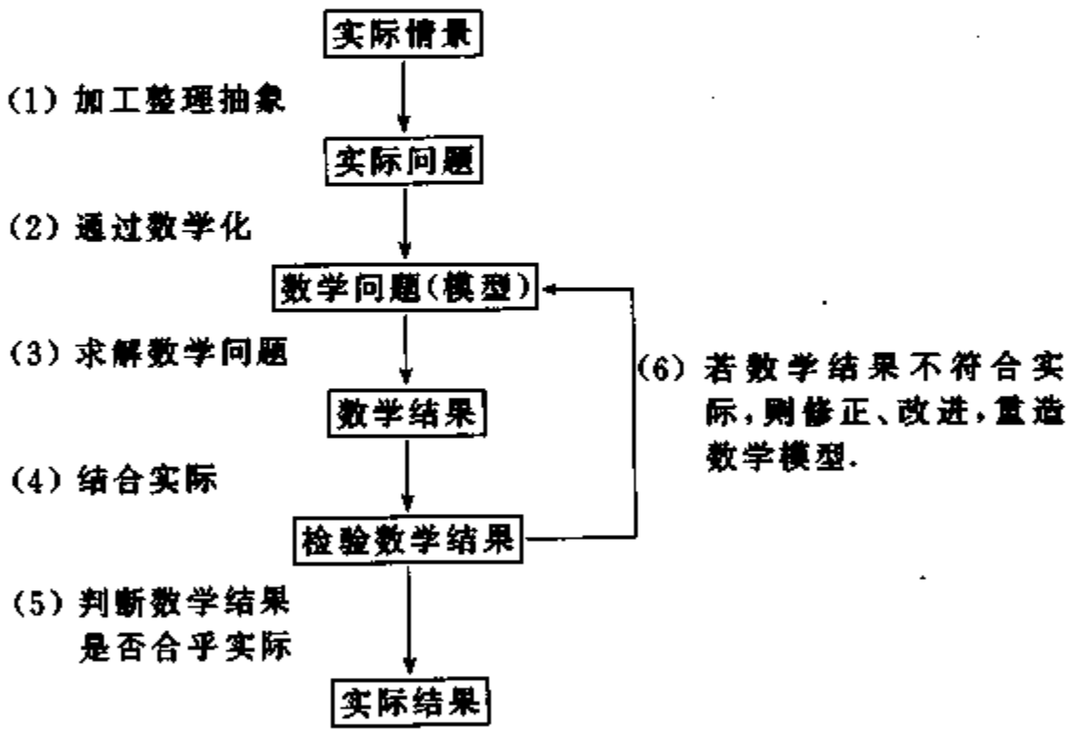
图 29-7

7. 上图 29-7 中"L"形是由 4 个 1×1 方格组成的 L 形纸片,如果一个 $m \times n$ 方格的棋盘能被若干个 L 形纸片无重复地覆盖. 试证:mn 是 8 的倍数.

第三十讲　实际问题的数学解法

基本要点和基本方法

在现实世界中有许多蕴涵着数学问题的实际问题，亦称为数学应用问题．其求解程序如下：



这里关键的一步是：实际问题数学化，即建立实际问题的数学模型．在初中数学范围内可建立的数学模型有：数式模型、方程模型、不等式模型、函数模型、平面几何模型、图表模型等．

例题精讲

例1　A 和 B 两家公司都准备向社会招聘人才，两家公司的招聘条件基本相同，只有工资待遇有如下差异：A 公司，年薪一万元，每

年加工龄工资 200 元；B 公司，半年薪五千元，每半年加工龄工资 50 元. 问：从经济收入的角度考虑，选择哪家公司有利？

解 分别列出第一年、第二年、第 n 年的实际年收入(元)：

第一年 A 公司 10 000，

B 公司 $5\,000 + 5\,050 = 10\,050$；

第二年 A 公司 10 200，

B 公司 $5\,100 + 5\,150 = 10\,250$；

第 n 年 A 公司 $10\,000 + (n-1)\cdot 200$，

B 公司

$$[5\,000 + (n-1)\cdot 100] + [5\,000 + (n-1)\cdot 100 + 50]$$
$$= 10\,050 + (n-1)\cdot 200$$

也就是说在 A 公司工作与在 B 公司工作相比，年收入永远少 50 元，所以在 B 公司工作比较有利.

说明 该题若不细心考察的话，很可能选错公司，聪明人也会吃“想当然”的亏，注意培养我们应用数学的意识就会少吃亏.

例 2 一旅游团 50 人到一旅舍住宿，旅舍的客房有三人间、二人间、单人间三种. 其中三人间的每人每晚 20 元，二人间的每人每晚 30 元，单人间的每人每晚 50 元.

(1) 若旅游团住满了 20 间客房，问三种客房各住了几间？怎样安排消费最低？

(2) 若该旅行团中，如果是夫妻的住二人间，单身的住三人间，小孩可随父母住在一起，现知有小孩 4 人(每对夫妻最多只带一个小孩)，单身的 30 人，其中男性 17 人，有两名心脏病患者要求住单人间，问这一行人共需多少客房？

解 (1) 设三人间、二人间、单人间分别住了 x、y、z 间，根据题意，得

$$\begin{cases} x + y + z = 20, \\ 3x + 2y + z = 50. \end{cases}$$

因此有

$$\begin{cases} x = 10 + z, \\ y = 10 - 2z. \end{cases}$$

这里 x、y、z 都是非负整数. 由 $y=10-2z$，且 y 是非负整数，即 $10-2z$ 为非负整数，得 z 只可取 5、4、3、2、1、0. 从而求得：

$$\begin{cases}x_1=15,\\y_1=0,\\z_1=5;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=14,\\y_2=2,\\z_2=4;\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=13,\\y_3=4,\\z_3=3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_4=12,\\y_4=6,\\z_4=2;\end{cases}\quad\begin{cases}x_5=11,\\y_5=8,\\z_5=1;\end{cases}\quad\begin{cases}x_6=10,\\y_6=10,\\z_6=0.\end{cases}$$

可见，共有六种住宿方法.

50 人住宿总消费为 $60x+60y+50z=60(x+y+z)-10z$
$=1\,200-10z$.

即 $z=5$ 时，总消费最低.

(2) 设夫妻所住房间为 x 间，单身男子住 y 间，单身女子住 z 间. 用$[m]$表示不超过 m 的最大整数.

由题意，要考虑两名心脏病患者的性别，分三种情况.

第一，若两名患者均为男性，则有

$$y=(17-2)\div 3+2=7,$$

$$z=[(30-17)\div 3]+1=5.$$

(单身女子共 $30-17=13$ 人，住 4 个 3 人间剩 1 人需再加 1 间).

第二，若两名患者为一男一女，则有

$$y=[(17-1)\div 3]+1+1=7,$$

$$z=(30-17-1)\div 3+1=5.$$

第三，若两名患者均为女性，则有

$$y=[17\div 3]+1=6,$$

$$z=[(30-17-2)\div 3]+1+2=6.$$

由上可知，无论哪种情况，$z+y=12$. 而夫妻用房

$$x = (50 - 30 - 4) \div 2 = 8.$$

所以这一行人共需 20 间客房.

例 3 将两筐苹果分给甲、乙两个活动小组. 每组一筐,每筐苹果个数一样. 甲组有一人分到 6 只苹果,其余每人都分到 13 只. 乙组有一人分到 5 只,其余每个人都分到 10 只. 已知每筐苹果不少于 100 只且不多于 200 只. 那么甲组有多少人,乙组有多少人?

解 设甲组有 $a+1$ 人,乙组 $b+1$ 人,根据题意,得

$$100 \leqslant 13a + 6 = 10b + 5 \leqslant 200.$$

由 $13a + 6 = 10b + 5$ 可知 $13a + 6$ 的个位数是 5,从而 $13a$ 的个位数应为 9,故 a 的个位数为 3.

又
$$100 \leqslant 13a + 6 \leqslant 200,$$

所以
$$7\frac{3}{13} \leqslant a \leqslant 14\frac{12}{13},$$

故
$$a = 13.$$

从而
$$10b + 5 = 13 \times 13 + 6 = 175,$$

所以
$$b = 17.$$

所以甲组有 14 人,乙组有 18 人.

例 4 如图 30-1 所示,A、B 两村之间有两条平行的河. 一条河宽为 a,另一条河宽为 b. 现欲在两条河上各造一座桥(注意,桥必须与河岸垂直),使得 A、B 之间的路程最短,试找出桥的位置.

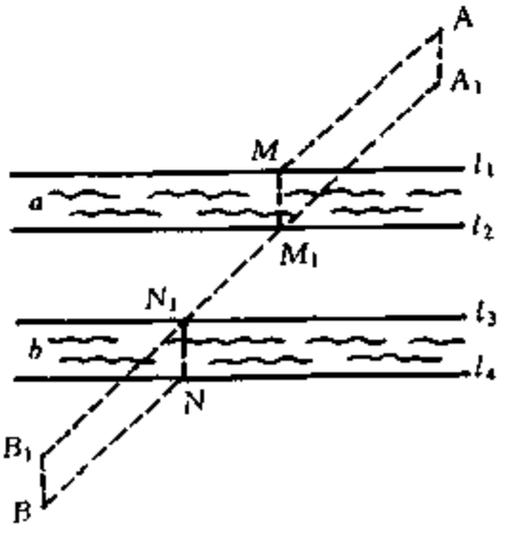


图 30-1

分析 如果 A、B 之间没有河流,那么 A、B 之间所连的直线段路程最短,现在 A、B 之间有两条河,情况就发生了变化.

假设桥已造好,如图所示中的 MM_1、NN_1,则 $MM_1 = a$, $NN_1 = b$, 从 A 到 B 最短路线为 AM、MM_1、M_1N_1、N_1N、NB,因 MM_1、

NN_1 长度是固定的，要使总路线最短，只需 $AM + M_1N_1 + BN$ 最短，不妨设想自 A、B 分别先过了两桥，即平移 MM_1 至 AA_1，平移 NN_1 至 BB_1，连接 A_1M_1、B_1N_1，因为 AA_1M_1M 和 BB_1N_1N 都是平行四边形，所以 $A_1M_1 \fallingdotseq AM$，$B_1N_1 \fallingdotseq BN$. 要使从 A 至 B 路程最短，只需 $A_1M_1 + M_1N_1 + B_1N_1$ 最短，即 A_1 至 B_1 的路程最短（此时桥已过，河不再考虑），于是连接 A_1B_1 的线段应该是符合要求的，据此即可得出造桥方案.

解 过 A 作 $AA_1 \perp l_1$ 并使 $AA_1 = a$，过 B 作 $BB_1 \perp l_1$，并使 $BB_1 = b$，连接 A_1B_1，交 l_2 于 M_1，交 l_3 于 N_1，则 M_1、N_1 就是使 A、B 之间路程最短的造桥地点（证明略）.

例 5 大江的一侧有甲、乙两个工厂，它们有垂直于江边的小路，长度分别为 m 千米及 n 千米. 设两条小路相距 l 千米. 现要在江边建立一个抽水站，把水送到甲、乙两厂去，欲使供水管最短，抽水站应建在哪里？

解 如图 30-2 所示，AD 垂直江边于 D，BE 垂直江边于 E，则 $AD = m$ 千米，$BE = n$ 千米，$DE = l$ 千米.

延长 BE 至 F，使 $EF = BE$. 连结 AF 交 DE 于 C，则在 C 点建抽水站，到甲、乙两厂的供水管路 $AC + CB$ 为最短.

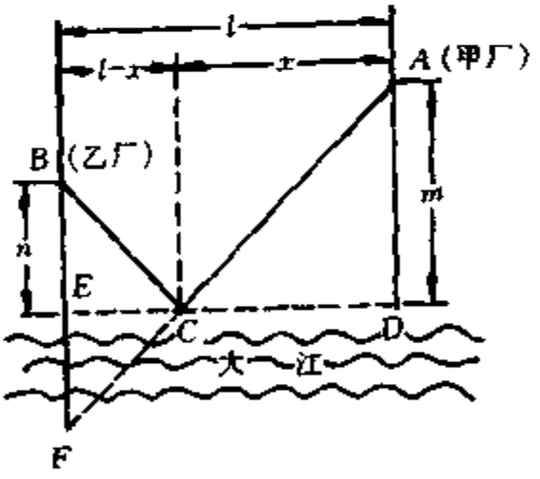


图 30-2

不妨设 $CD = x$ 千米. 因为 $\mathrm{Rt}\triangle ADC \backsim \mathrm{Rt}\triangle FEC$，所以

$$\frac{CD}{CE} = \frac{AD}{EF},$$

即 $$\frac{x}{l-x} = \frac{m}{n}.$$

解得 $$x = \frac{ml}{m+n} \text{ 千米}.$$

所以应在距 D 点 $\frac{ml}{m+n}$ 千米处的 C 点建抽水站.

说明 此题用其他方法远不及几何法简单、明确.

例 6 某号台风中心位于 O 地，台风中心以 25 千米/时的速度向西北方向移动，在半径为 240 千米的范围内将受影响. 城市 A 在 O 地正西方向，与 O 地相距 320 千米，试问 A 市是否会受台风影响？若受影响，影响的时间是多少小时？

解 在 O 点建立方位图，如图 30-3 所示，由题意

$OA = 320$ 千米，$\angle 1 = 45°$.

作 $AP \perp OP$. 由于 $AP^2 + OP^2 = OA^2$，$2AP^2 = OA^2$. 得 $OA = \sqrt{2}AP$，$AP = \dfrac{OA}{\sqrt{2}} = 160\sqrt{2} < 240$，所以 A 市将受台风影响.

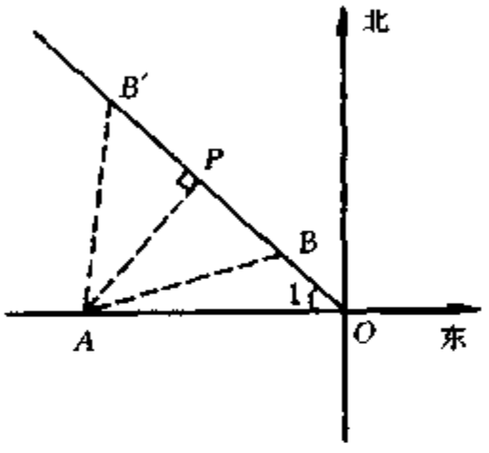


图 30-3

又设台风到 B 处开始影响 A 市，到 B' 处时结束对 A 市的影响，即 $AB = AB' = 240$，因此

$$\begin{aligned} BB' = 2BP &= 2\sqrt{AB^2 - AP^2} \\ &= 2\sqrt{240^2 - (160\sqrt{2})^2} \\ &= 160(\text{米}). \end{aligned}$$

所以台风影响 A 市的时间为

$$t = \frac{BB'}{V_{台}} = \frac{160}{25} = 6.4(\text{小时}).$$

说明 由本例看到，我们只要收集台风中心移动的速度、方向及影响范围，即可推知某地是否会受到台风的影响及影响的时间，以早作抗灾准备.

例 7 有 A、B、C、D、E 五块麦田，它们的产量（单位：吨）、交通状况和每相邻两块麦田的距离（单位：千米）如图 30-4 所示，要建一个永久性打麦场，问建在哪块麦田上（不允许建在除麦田以外的其他地方）才能使总运输量最小？（图中圆圈内的数字为产量，直线上的数字表示距离）

解法一 可求出把 B、C、D、E 的麦子都运到 A 的运输量，同

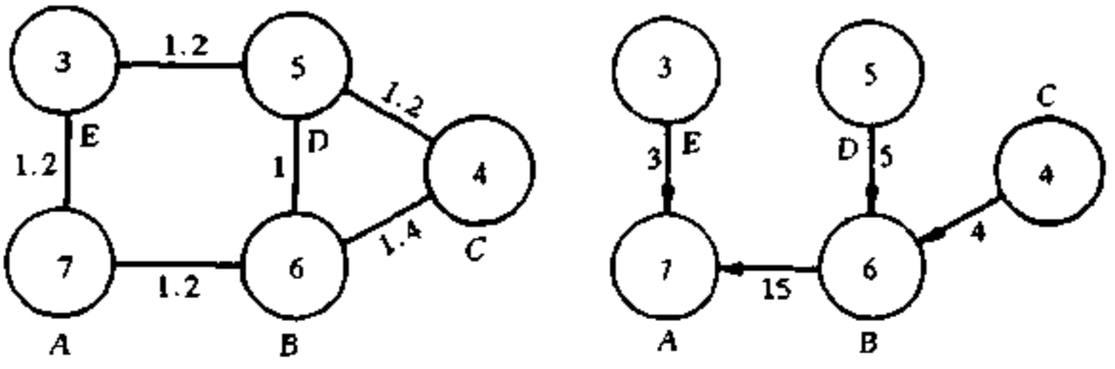


图 30-4

样分别求出运到 B、C、D、E 的运输量，其中取最小的即为所求，设 x 处的最小运输量为 $S(x)$.

先求 A 的最小运输量，B 到 A 的运输线路 $B \to A$. 运输量为 $6 \times 1.2 = 7.2$，C 到 A 的最短运输线路 $C \xrightarrow{B} A$，运输量为 $4 \times 1.4 + 4 \times 1.2 = 10.4$，$D$ 到 A 的最短运输线路 $D \xrightarrow{B} A$ 运输量为 $5 \times 1 + 5 \times 1.2 = 11$，$E$ 到 A 的运输线路 $E \to A$，运输量 $3 \times 1.2 = 3.6$. A 的最小运输量 $S(A) = 7.2 + 10.4 + 11 + 3.6 = 32.2$. 用同样方法得

$$S(B) = 20.6$$
$$S(C) = 39.8$$
$$S(D) = 31.2$$
$$S(E) = 37.2$$

经比较 $S(B)$最小，B 处为最佳选择.

解法二 首先考虑麦场设在 A 点，则由各点按最近线路运至 A 点的原则，如图 30-4 所示，图中所有线段的箭头表示运输方向，边上的数字表示经过该段的麦量.

同样方法，分别作出其他方案，在图 30-5 中各图分别是麦场设在 B、C、D、E 四点的情况.

考察 A 点方案，经过 BA 上的麦量为 15，超过总麦量 $M = 3 + 7 + 6 + 5 + 4 = 25$ 的一半，那么设在 A 点处显然没有 B 点好. 因为 B 点运到 A 点的运输量是 15. 而如果设在 B 点，并且假设除去 AB 线段以外，其他线段上的运输方向和运输量都不变，那么从 A 点运向

B 点的运输量就是 $(3+7)\times 1.2=(M-15)\times 1.2$. 因 15 超过了 M 的一半，所以 $15>M-15$，可见当其他运输线路不变时，只改变 A、B 两点的运向，就已经优于设在 A 点的方案了，何况若将其他点的麦量改运到 B 点，还可能有更短的运输路线. 因此，设在 B 点的方案就更优于设在 A 点的方案了.

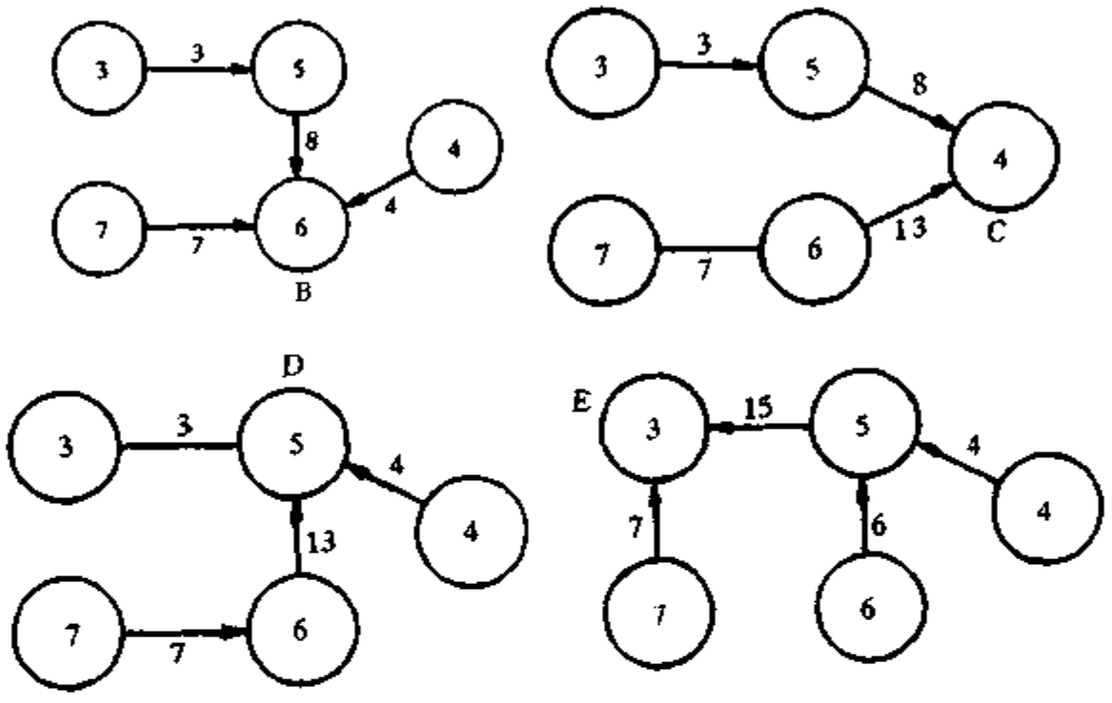


图 30-5

同理考察 C 点、D 点、E 点方案. 从各条线路运向 C、D、E 的最大运输量分别为 13、13、15，都超过了 M 的一半，因此都不是最佳点，故只有 B 点可能是最佳点. 即选择 B 点为打麦场是最好的.

思考 若将原题图中直线上的数字改成字母，如图 30-6，其中 $b<a<d$，结论怎样？如解法一有

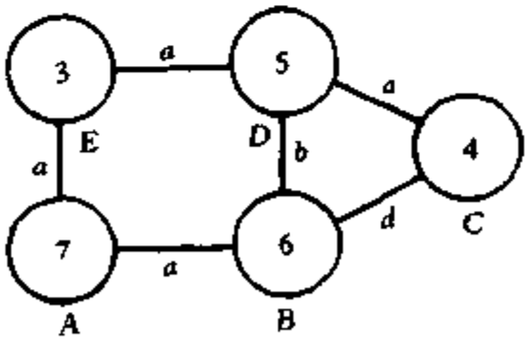


图 30-6

$$S(A)=3a+5(a+b)+4(a+d)+6a=18a+5b+4d,$$

$$S(B)=7a+3(a+b)+5b+4d=10a+8b+4d,$$

$$S(C)=6d+3(a+a)+7(a+d)+5a=18a+13d,$$

$S(D) = 3a + 7(a + b) + 6b + 4a = 14a + 13b$,

$S(E) = 7a + 6(b + a) + 4(a + a) + 5a = 26a + 6b$.

经过比较可知 $S(B)$最小，B 处为最佳选择.

也可参照解法二求解.

说明 本题解法利用了图的直观性，特别是解法二，直接由图形观察出两点间的最短线路，从而求出这两点的最小运输量，本题是曲线形图上的最优化问题.

例 8 一条马路上有 6 个车站，今有一辆汽车由第一站驶向第六站. 沿途各站都可以自由上、下乘客，但此辆车在任何时候至多能载 5 人. 试证明：在此六站中必有两对(4 个不同的)车站 X_1、Y_1 与 X_2、Y_2，使得没有乘客在 X_1 站上而在 Y_1 站下(X_1 在 Y_1 之前)，也没有乘客在 X_2 站上而在 Y_2 站下(X_2 在 Y_2 之前).

证明 用 $a_{ij}(1 \leqslant i < j \leqslant 6)$ 表示第 i 站上车而在第 j 站下车的乘客数，则 $a_{ij} \in [0, 5]$

设在每一站，乘务员都要填一张旅客上、下车人数的登记表，如下表所示.

上＼下	1	2	3	4	5	6
1		a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
2			a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}
3				a_{34}	a_{35}	a_{36}
4					a_{45}	a_{46}
5						a_{56}
6						

从表中可以看出，位于右上角的 9 个数字，每个数字都是非负数，其和应为第 3 站至第 4 站途中的乘客，其和不超过 5，因而这 9 个数中至少 4 个 0. 这 4 个 0 分布在不同的三行三列中，必然至少有两个不同行不同列的 a_{ij} 和 $a_{mn}(i < j, m < n, m \neq i, n \neq j)$ 为 0. 这

就证明了没有旅客在第 i 站上而在第 j 站下，也没有旅客在第 m 站上而在 n 站下.

练　习　题

A　组

1. 一个旅社有 100 间客房，经过一段时间的经营实践，旅社经理发现了这样一个规律：如果客房定价为每间 160 元，住房率 55%；若定价为 140 元/间，住房率 65%；若定价 120 元/间，住房率为 75%；每间定价为 100 元，住房率 95%. 要使每天收入最高，每间客房的定价应为多少？

2. 有一批货，如月初售出，可获利 1 000 元，并可将本利再去投资，到月末获利息为 1.5%；如月末售出这批货，可获利 1 200 元，但要付 50 元保管费. 请问这批货在月初还是月末售出好？

3. 据了解，个体服装销售只要高出进价 20%便可盈利，但老板们常以高出进价 50%—100%标价，假如你准备买一件标价为 200 元的衣服，应在什么范围内还价？

4. 据《新华日报》消息，巴西医生马廷恩经过 10 年苦心研究后得出结论：卷入腐败行为的人容易得癌症、心肌梗塞、过敏症、脑溢血、心脏病等. 如果将犯有贪污、受贿的 580 名官员与 600 名廉洁官员进行比较，可发现，后者的健康人数比前者的健康人数多 272 人，两者患病(致死)者共 444 人，试问犯有贪污，受贿罪的官员与廉洁官员的健康人数各占百分之几？

5. 如何根据毛利率和毛利额核定商品的价格范围.

某商品进价每件 8.50 元，要求每件商品的毛利额不少于 1 元，毛利率不高于 15%，求每件商品的销售价.

6. 有一台现价值为 N 元的机器，如果不加修理可以用 n 次，经修理后，可以再用 m 次 $(m > n)$. 如果修理费是 p 元，问在修理费满足什么条件的情况下，修理后再使用较为合算？(要求写出推证过程).

7. 在一条直线形流水线上，依次在 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 处有 5 个具有同样性能的机器人在工作. 每隔一定时间，它们要去取零件，问零件箱放在何处，才能使机器人取零件花费的总时间最少？

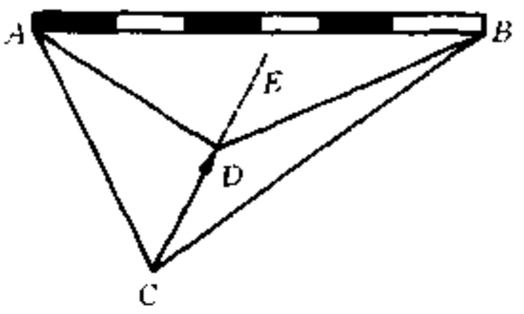


图 30-7

8. 在绿茵场上，足球队员带球进攻，总是尽力向球门 AB 冲近（如图 30-7 所示），你说为什么？

B 组

9. 某公司为了尽快解决职工住房困难，集资建了一栋每平方米售价为 1 188 元的新房，五年后公司将全部购房款还给房主，也就是“五年还本售房”. 肖工程师筹款购买一套七十平方米的住房，若公司收到他的购房款后，拿出一部分存五年定期储蓄，以便到期如数还本给肖工程师，那么公司实际收到的钱款是多少？(精确到个位. 不计物价上涨因数，五年定期存款年利息率 9.00%).

10. 如何确定商品的最佳出售期.

有一批货，如果本月初出售，可获利 100 元，可将本息都存入银行，已知银行每月利息率为 0.5%；若下月初出售，可获利 120 元，但要付 5 元保管费，试问，这批货何时出售最好？（本月初还是下月初）

11. A 城有化肥 200 吨，B 城有化肥 300 吨，现要把化肥运往 C、D 两农村，若从 A 运往 C、D 的运费分别为 20 元/吨与 25 元/吨，从 B 运往 C、D 两地则分别为 15 元/吨与 22 元/吨. 现已知 C 地需 220 吨，D 地需 280 吨. 请问怎样运输运费最少？

12. 公园里有一条“Z”字型道路 $ABCD$，(如图 30-8)，其中 $AB \parallel CD$，在 AB、BC、CD 三段路旁各有一只小石凳 E、M、F，且 $BE = CF$，M 在 BC 中点. 试证三只石凳 E、F、M 恰在一条直线上.

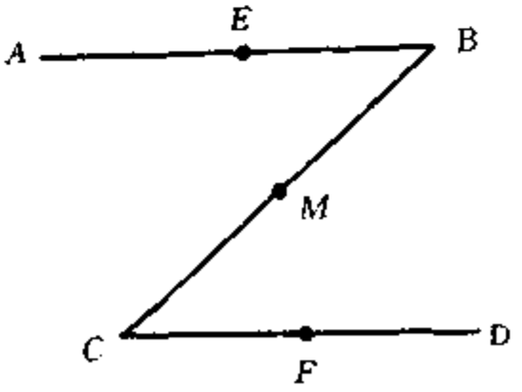


图 30-8

13. 一架 2.5 米长的梯子 AB，斜靠在一竖直的墙 AC 上，这时梯足 B 到墙底端 C 的距离为 0.7 米；如果梯子的顶端沿墙下滑 0.4 米，那么梯足将外移多少米？

14. 两条公路 OM、ON 相交成 30°角，在公路 OM 上，距 O 点 80 米的 A 处有一所小学，当拖拉机沿公路 ON 方向行驶时，路两旁 50 米以内会受到噪音的影响，已知拖拉机的速度为 18 千米/小时，那么拖拉机沿 ON 方向行驶时，是否会给小学带来噪音影响，若有影响，将持续多少时间？

15. 公园内有两条小河 MO、NO 在 O 处汇合，两河形成的半岛上有一处古迹 P（如图 30-9）. 现计划在两条小河上各建一座小桥 Q 和 R，并在半岛上修三段小路，连接两座小桥与古迹. 这两座小桥应建在何处，才可使修建费用最少？

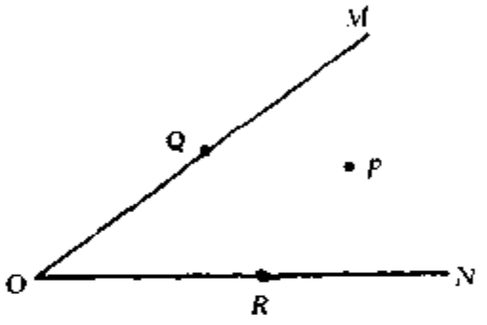


图 30-9

测 试 题

1. 根据有关的信息，估计商品每年生产的数量范围.

某公司计划下一年度生产一种新型 VCD 机，下面是各部门提供的数值信息.

人事部：明年生产工人不多于 80 人，每人每年工时按 2 400 小时计算.

市场部：预测明年销售量至少是 10 000 台.

技术部：生产一台 VCD 机，平均要用 12 个工时，每台机器需安装 5 个主要部件.

供应部：今年年终有某种主要部件的库存 2 000 件，明年能采购到的这种主要部件为 80 000 件.

根据上述信息，明年公司的产量可能的最大值是多少？

2. 从县城 O 出发的一条直线公路两旁共有十个村需要安装自来水（水从县城出发）. 县城与 A 村的距离为 30 千米，其余各村之间

距离如图 30-10 所示. 现有粗细两种水管可以选用，粗管足够供给各村用水，细管只能供一个村用水. 安装费用为粗管每千米 8 000 元，细管每千米 2 000 元. 把粗管和细管适当搭配，互相连接，可以降低工程总费用. 请你设计一种最节省的安装方案，并求出所需总费用.

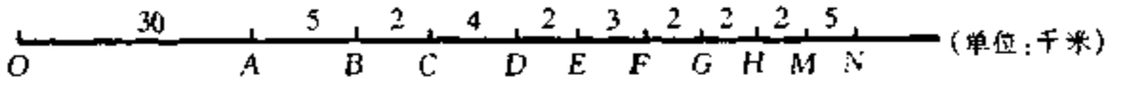


图 30-10

3. 设三城市 A、B、C 分别位于一个等边三角形的三个顶点处. 现欲在三城市之间铺设通讯电缆，有人设计了三种方案. 如图 30-11 所示. (1) $AB + BC$; (2) $AD + BC$ (D 为 BC 中点); (3) $OA + OB + OC$ (O 为 $\triangle ABC$ 的中心). 若要使联线最短，应选哪种方案?

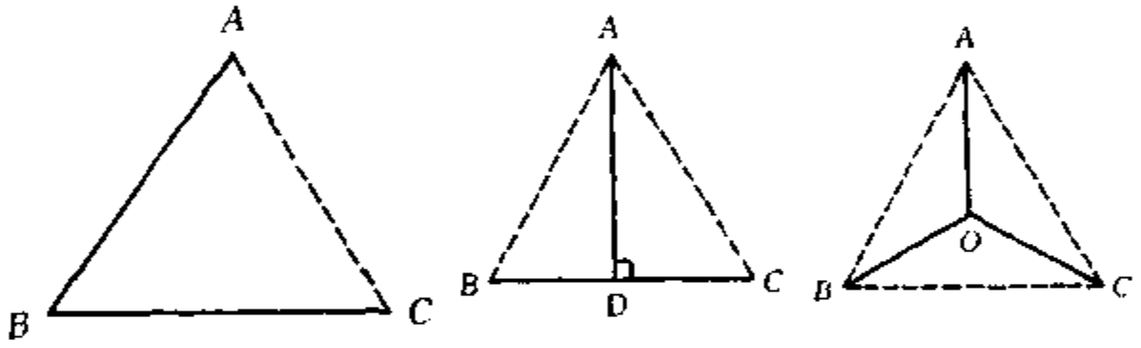


图 30-11

4. 某船在 O 点处测得一小岛上的电视塔 A 在北偏西 60°的方向，船向西航行 20 海里到达 B 处，测到电视塔在船西北方向，问再向西航行多少海里，船离电视塔最近?

5. 如图 30-12 所示，某汽车公司所营运的公路 AB 段有四个车站依次为 A、C、D、B. $AC = CD = DB$. 现要在 AB 段建一个加油站 M，要求使 A、B、C、D 站的汽车到加油站 M 所花费的时间最少，试找出 M 的位置.

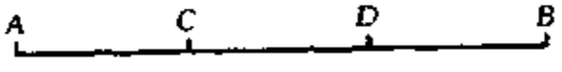


图 30-12

6. 如图 30-13 所示，四个工厂 A、B、C、D，现要找出一个供应站 M，使它到四个工厂的距离之和为最小.

7. 一条笔直的公路 l 穿过草原，公路边有一卫生站 A，距离公路 30 千米的地方有一居民点 B，如图 30-14 所示，A、B 的直线距离是

90 千米. 有一天，某司机驾车从卫生站送一批急救药品到居民点 B，汽车在公路上的最快速度是 60 千米/时，而在草地上的最快速度是 30 千米/时. 问该司机应以怎样的路线行驶，所用的行驶时间最短，最短时间为多少？

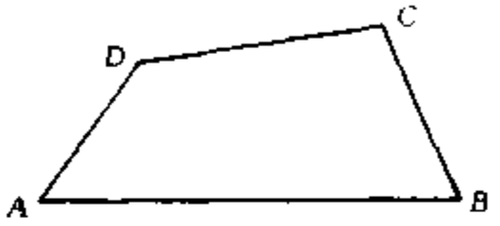


图 30-13

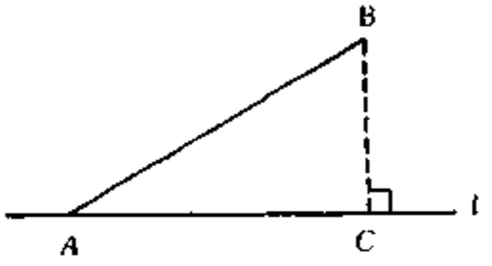


图 30-14

8. 如图 30-15 是一个新建居民区的示意图，A_1、A_2、… A_{10}表示各居民点，点与点之间的直线段表示两居民点间的道路，边上数表示两居民点间的距离，要在这个居民区建一医院，医院建在何处最理想？

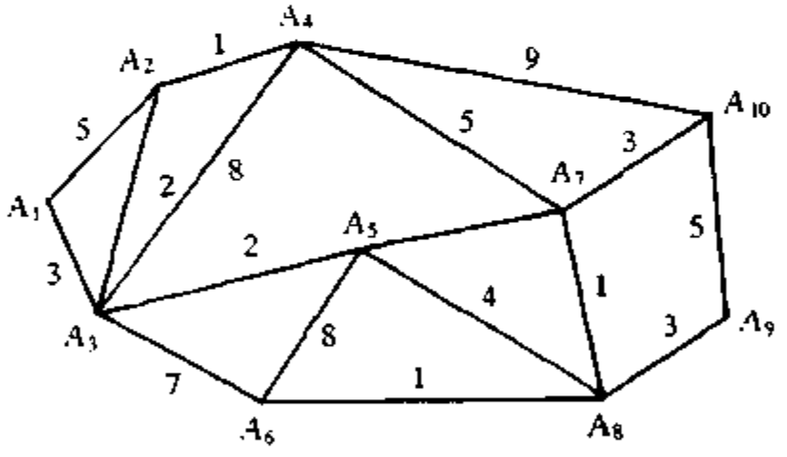


图 30-15

综合测试题一

在 150 分钟内完成　满分 120 分

一、选择题(每小题 3 分,满分 30 分)

1. 把 $(1-a)\sqrt{-\frac{1}{1-a}}$ 根号外的因式移入根号内,化简后的结果是(　　).

(A) $\sqrt{1-a}$　　(B) $\sqrt{a-1}$

(C) $-\sqrt{a-1}$　　(D) $-\sqrt{1-a}$

2. 对于正实数,定义运算"$*$"为 $a*b=c$,c 为 a、b 中较小的数,定义运算"☆"为 a☆$b=d$,d 为 a、b 中较大的数,则 $(2$☆$3)*(1$☆$4)$ 等于(　　).

(A) 4　　(B) 3　　(C) 2　　(D) 1

3. 已知 $\frac{xy}{(x+z)(y+z)}+\frac{yz}{(x+y)(z+x)}+\frac{zx}{(y+z)(x+y)}=1$,则 x、y、z 的取值情况是(　　).

(A) 只有一个为零　　(B) 全为零

(C) 只有两个为零　　(D) 全不为零

4. 在凸四边形 $ABCD$ 中,$AB=BC=BD$,$\angle ABC=80°$,则 $\angle ADC$ 等于(　　).

(A) 80°　　(B) 100°　　(C) 140°　　(D) 160°

5. 在等腰△ABC 中,$AB=AC=6$,P 为 BC 上一点,$PA=4$,则 $PB\cdot PC$ 等于(　　).

(A) 10　　(B) 15　　(C) 20　　(D) 25

6. 化简 $\frac{\sqrt{6}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$ 的结果是(　　).

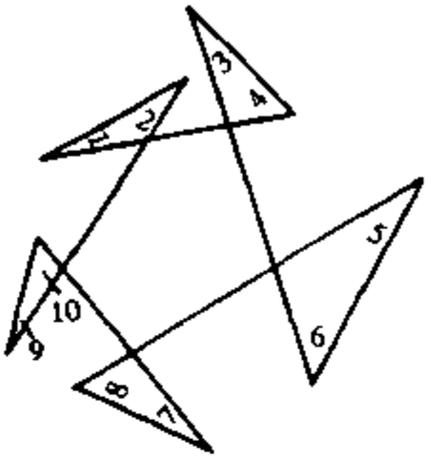
(A) $\frac{2}{3}$　　(B) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

(C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　(D) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

7. 如图所示，$\angle 1+\angle 2+\cdots+\angle 10$ 等于(　　).

(A) 360°　　(B) 405°

(C) 270°　　(D) 315°



(第 7 题)

8. 若 a、b、c 为两两不相等的有理数，则 $\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}$ 是(　　).

(A) 整数　　(B) 有理数

(C) 无理数　　(D) 大于 1 的分数

9. 设 $ab\neq 0$，$a^2+b^2=1$，如果 $X=\frac{a^4+b^4}{a^5+b^5}$，$Y=\frac{a^4+b^4}{\sqrt{a^6+b^6}}$，$Z=\frac{\sqrt{a^4+b^4}}{a^6+b^6}$，则 X，Y，Z 的大小关系是(　　).

(A) $X<Y<Z$　　(B) $Y<Z<X$

(C) $Z<X<Y$　　(D) $Y<X<Z$

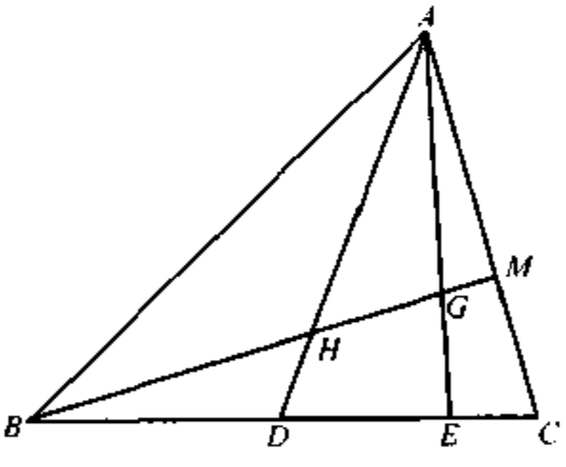
10. 如图所示，$\triangle ABC$ 中，D、E 是 BC 边上的点，$BD:DE:EC=3:2:1$，M 在 AC 边上，$CM:MA=1:2$，BM 交 AD、AE 于 H、G，则 $BH:HG:GM$ 等于(　　).

(A) 3 : 2 : 1

(B) 5 : 3 : 1

(C) 25 : 12 : 5

(D) 51 : 24 : 10



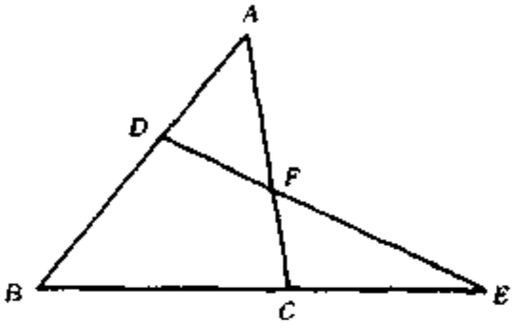
(第 10 题)

二、填空题(每小题 4 分，满分 40 分)

11. 多项式 $x^2+axy+by^2-5x+y+6$ 的一个因式是 $x+y-2$，则 $a+b$ 的值是_____.

12. 关于 x 的方程 $\frac{1+x}{1-x}=-\frac{a}{b}(a\neq b)$ 的解是_____.

13. 如图所示，DE 截 $\triangle ABC$ 交 AC 于 F，且 $AD:DB=CF:FA=2:3$，则 $BC:CE=$_____，$EF:FD=$_____.



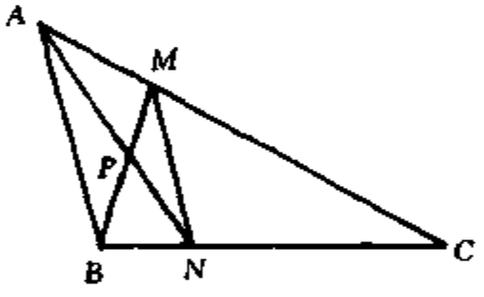
（第 13 题）

14. 若 $y=\sqrt{1-2x}+\sqrt{2x-1}+\sqrt{(x-1)^2}$，则 $(x+y)^{1999}=$_____.

15. 已知 M 为 $\triangle ABC$ 的重心，$AM=3$，$BM=4$，$CM=5$，则 $\triangle ABC$ 的面积是_____.

16. 若 $a+b+c=0$，则 $\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$ 的值为_____.

17. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，M、N 分别是 AC 和 BC 上的点，P 是 AN 与 BM 的交点，$AB=8$，$S_{\triangle APM}=S_{\triangle BPN}$，$S_{\triangle ABN}=\frac{1}{3}S_{\triangle ANC}$，则 $MN=$_____.



（第 17 题）

18. $2\leqslant x<3$，化简 $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}$ 的值是_____.

19. 已知实数 a、b 满足 $\sqrt{a^2-2a+1}+\sqrt{36-12a+a^2}=10-|b-2|-|b+3|$，则 a^2+b^2 的最大值是_____.

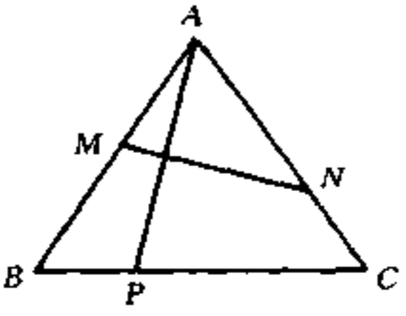
20. 已知 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，AP、BP、CP 的延长线分别交 BC、AC、AB 于 A'、B'、C'. 设 $PA=a$，$PB=b$，$PC=c$，$PA'=PB'=PC'=d$，且 $a+b+c=43$，$d=3$，则 abc 的值为_____.

三、解答题（21、22 题每小题 15 分，23 题 20 分，满分 50 分）

21. 设二次三项式 ax^2+bx+c 的系数都是正整数，当 $x=$

1 991 时，二次三项式的值 $a \times 1991^2 + b \times 1991 + c = p$ 是一个素数. 求证：$ax^2 + bx + c$ 不可能分解成两个整系数一次式的积.

22. 如图所示，P 是等边 $\triangle ABC$ 边 BC 上一点，连 AP，作 AP 的中垂线交 AB，AC 于 M，N. 求证：$BP \cdot PC = BM \cdot CN$.



（第 22 题）

23. 试将一个正方形分成 3 个部分，使得可用这 3 个部分拼成一个既非直角又非等腰的三角形.

综合测试题二

在 150 分钟内完成　满分 120 分

一、选择题(每小题 3 分,满分 30 分)

1. 如果实数 a、b、c 满足 $abc>0$, $a+b+c=0$, $a<-b<c$, 那么 a、b、c 的符号为(　　).

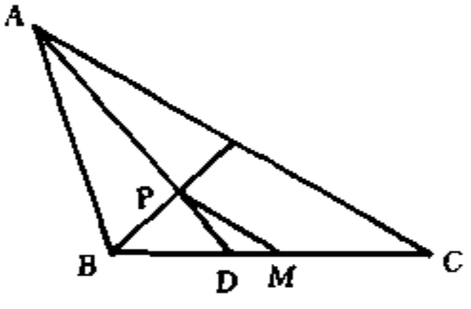
(A) $a>0$, $b>0$, $c>0$　(B) $a>0$, $b<0$, $c>0$

(C) $a<0$, $b>0$, $c<0$　(D) $a<0$, $b<0$, $c>0$

2. 若 $x+\frac{1}{y}=1$, $y+\frac{1}{z}=1$, 则 xyz 的值等于(　　).

(A) 1　(B) -1　(C) ±1　(D) ±2

3. 如图所示,$\triangle ABC$ 的边长分别为 $AB=14$, $BC=16$, $AC=26$, P 为 $\angle BAC$ 平分线 AD 上一点,且 $BP\perp AD$, M 为 BC 的中点,则 PM 长为(　　).



(第 3 题)

(A) 6　(B) 8

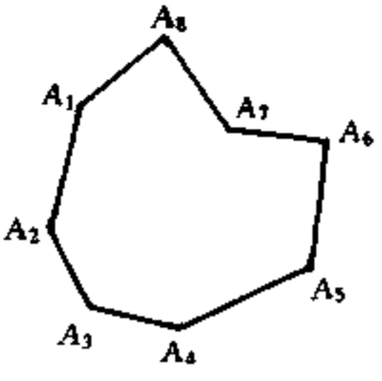
(C) 13　(D) 7

4. 已知实数 a、b、c 满足 $a+b+c=0$, $abc=8$,那么 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 的值(　　).

(A) 是正数　(B) 是零

(C) 是负数　(D) 正、负不能确定

5. 如图所示,$\angle A_1=\angle A_2=\angle A_3=\angle A_4=\angle A_5=135°$, $\angle A_6=\angle A_8=90°$, 如果我们称大于 180°的角为"优角",那么优角 $\angle A_7$ 等于(　　).



(第 5 题)

(A) 135°　(B) 225°

(C) 235°　(D) 195°

6. 若 $a>1$，$p=\sqrt{1\,993a}-\sqrt{1\,993a-1}$，$q=\sqrt{1\,993a-1}-\sqrt{1\,993a}$，$r=\sqrt{1\,993a}-\sqrt{1\,993a+1}$，$s=\sqrt{1\,993a+1}-\sqrt{1\,993a}$，则 p，q，r，s 中值最小的一个是(　　).

(A) p　　(B) q　　(C) r　　(D) s

7. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=3\angle A$，$a=27$，$c=48$，则 AC 的长为(　　).

(A) 35　　(B) 17.5　　(C) $\frac{5}{42}\sqrt{133}$　　(D) 70

8. 如果 $6x^2+mxy-4y^2-x+17y-15$ 可以分解为两个关于 x、y 的整系数二元一次三项式的乘积，那么 m 等于(　　).

(A) 3　　(B) 5　　(C) 11　　(D) 18

9. 当 $x+y+z=3a$ 时，

分式 $\frac{(x-a)(y-a)+(y-a)(z-a)+(z-a)(x-a)}{(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2}$ 可化简为(　　).

(A) $\frac{3a}{2}$　　(B) $-\frac{1}{2}a$　　(C) $-\frac{1}{2}$　　(D) -2

10. 将长为 64 米的铁丝剪成两段，每段都围成一个正方形，这两个正方形面积和的最小值是(　　).

(A) 1 024 平方米　　(B) 256 平方米

(C) 128 平方米　　(D) 64 平方米

二、填空题(每小题 4 分，满分 40 分)

11. 计算 $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30})=$_____.

12. 将 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$ 分解因式的结果是_____.

13. 将正方形 $ABCD$ 折叠，使 C 落在 AD 的中点 G，若正方形边长为 a，则折痕 EF 长为_____.

14. 若 $\frac{5-7x^2}{3x^3+x^2+6x+2}=\frac{A}{3x+1}+\frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$ 则 $a+A$

$=$ _____，$b+B=$ _____.

15. 在$\triangle ABC$中，$AC=2$，D是AB的中点，E是CD上一点，$ED=\frac{1}{3}CD$，若$CE=\frac{1}{3}AB$，且$CE\perp AE$，则$BC=$ _____.

16. 已知$-2<x<2$，化简$\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+6x+9}-\sqrt{25-10x+x^2}=$ _____.

17. 若$4x-3y-6z=0$，$x+2y-7z=0$，$xyz\neq 0$，则$\frac{2x^2+3y^2+6z^2}{x^2+5y^2+7z^2}$的值是_____.

18. 已知E、F是$\triangle ABC$的AC、AB上的点，$AF:AB=CE:CA=1:4$，BE交CF于P，AP交BC于D，则$\frac{CD}{CB}$的值是_____.

19. 正数x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6同时满足$\frac{x_2x_3x_4x_5x_6}{x_1}=1$，$\frac{x_1x_3x_4x_5x_6}{x_2}=2$，$\frac{x_1x_2x_4x_5x_6}{x_3}=3$，$\frac{x_1x_2x_3x_5x_6}{x_4}=4$，$\frac{x_1x_2x_3x_4x_6}{x_5}=6$，$\frac{x_1x_2x_3x_4x_5}{x_6}=9$，则$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$的值等于_____.

20. 凸四边形$ABCD$的面积为1，对角线交于P，$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCD$、$\triangle PDA$的重心分别为M_1、M_2、M_3、M_4，则四边形$M_1M_2M_3M_4$的面积大小是_____.

三、解答题(每小题10分，满分50分)

21. 将$x^4+ax^3+bx^2+cx+d$分解因式的结果是$(x+m)^4$，且$a+b+c=64$，求d的值.

22. 设x、y为正有理数，$\sqrt{x}$、$\sqrt{y}$为无理数，求证$\sqrt{x}+\sqrt{y}$为无理数.

23. 锐角$\triangle ABC$中，已知$AB=4$，$AC=5$，$BC=6$，AD、BE、CF分别是边BC、CA、AB上的高，D、E、F是垂足，求$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}$的值.

24. 已知 $ABCD$ 是矩形，$BC = 3AB$、P、Q 是 BC 上的两个三等分点. 求证：$\angle DBC + \angle DPC = \angle DQC$.

25. 求最小的正整数 n，使在任何 n 个无理数中，总有 3 个数，其中每两数之和都仍为无理数.

练习题、测试题参考解答

第一讲　因式分解的方法(一)

练习题　1. D　2. C　3. C　4. $(a+m)^5(n-b)^4(a+m-b+n)$　5. $(x+y)(x-y)^3$　6. $(x-y+2)(x+y-2)$　7. $(x+y)(y-z)(x-z)$　8. $(x-m^2+mn)(x-mn-n^2)$　9. $n=2$、6、12、20、30、42、56、72、90 共 9 个　10. $(a+c-2b)^2$　11. $(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)$　12. $(c-d+a-b)(c-d-a+b)(c+d+a+b)(c+d-a-b)$　13. $(x-2y+3z)(x+3y-4z)$　14. $(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a-b-c)$　15. 原式 $=\dfrac{x^{10}-1}{x^2-1}=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

测试题　1. C　2. C　3. A　4. A　5. $(x+2)(x+4)(x-4)$　6. $(a-b)^2(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$　7. $(x-y)(x+y+1)(x+y-1)$　8. $(x+y+xy-1)(x+1)(y+1)$　9. $(2a+b-3)(a-3b+2)$　10. a 的值可能为 42，58，442，70，150

第二讲　因式分解的方法(二)

练习题　1. $(a^2+8b^2-4ab)(a^2+8b^2+4ab)$　2. $(x+1)(x-2)(x+3)$　3. $(x+2)(x^2+x+1)$　4. $(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$　5. $(3x-y+4)(x+2y-1)$　6. $(x+2)(x+3)(x-5)$　7. 将 $x=-\dfrac{3}{2}$ 代入多项式，求得其值为 0，于是 $2(x+\dfrac{3}{2})=2x+3$ 是原多项式的因式　8. $(x-y+2)(x+y-2)$　9. $(x^2+x+1)(x^6-x^4+x^3-x+1)$　10. 用换元法分解得 $(x^2+5x+16)(x+6)(x-1)$　11. 设 $x+y=u$，$xy=v$，原式 $=v^2+2v-u^2+1=(v+1-u)(v+1+u)=(x+1)(y+1)(x-1)(y-1)$　12. 待定系数法求得 $k=-3$　13. 将 $x=-\dfrac{1}{3}$，$x=\dfrac{3}{2}$ 代入多项式，得出关于 a、b 的方程组，解得 $a=24$，$b=2$. 原式 $=(3x+1)(2x-3)(4x+5)$.　14. 假

设原式 $=(ax+by)(cx+dy+e)$，且 $e\neq 0$. 右边展开，比较两边的系数，得 $ac=1$ ①，$ad+bc=-1$ ②，$bd=1$ ③，$ae=1$ ④，$be=1$ ⑤. 由④、⑤得 $a=b$. 代入③并与①比得 $c=d$. 于是 $ad+bc=bd+bd=-1$，即 $bd=-\frac{1}{2}$，这与③矛盾. 所以原式不能分解成两个一次因式的乘积.

测试题 **1.** $(xy+x+y-1)(xy-x-y-1)$ **2.** $(x+5b)(x-8a-5b)$ **3.** $(x^2+x-a+1)(x^2+a-x+1)$ **4.** $(x+1)(x+2)(x+3)$ **5.** $(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$ **6.** 设 $x^2+5x+6=u$，结果是 $(x^2+4x+6)(x^2+8x+6)$. **7.** 原式 $=(x+1)(x+2)(2x+1)(2x+3)-90=(2x^2+5x+3)(2x^2+5x+2)-90$，设 $2x^2+5x+3=y$，结果是 $(2x+7)(x-1)(2x^2+5x+12)$. **8.** $(x+y-2)(x-2y+1)$ **9.** $(x+3)(2x-1)(2x-5)$ **10.** $(x+5)(2x-1)(3x^2+1)$ **11.** $m=\frac{1}{2}$ **12.** 设 $8x^2-2xy-3y^2=A^2-B^2$，即 $(2x+y)(4x-3y)=(A+B)(A-B)$，可设 $A+B=2x+y$，$A-B=4x-3y$，求得 $A=3x-y$，$B=2y-x$，从而 $8x^2-2xy-3y^2=(3x-y)^2-(-x+2y)^2$.

第三讲　因式分解的应用

练习题 **1.** B **2.** C **3.** A **4.** B **5.** A **6.** 4 **7.** 1 981 045 **8.** $x^6=1$ **9.** $a-b=-1$，$b-c=-1$，$c-a=2$. 原式 $=3$. **10.** $\underbrace{100\cdots01}_{1997个0}=10^{1998}+1=(10^{666}+1)[(10^{666})^2-10^{666}+1]$ 是合数 **11.** $mn=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$ **12.** 原式 $=3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2=27-(a+b+c)^2\leqslant 27$. 当 $a+b+c=0$ 时，原式取最大值 27. **13.** 原式 $=3^{26}(3^2-3-1)=3^{24}\times 45$ **14.** 设 $2(2n+1)=x^2-y^2=(x-y)(x+y)$，则 $x-y$ 与 $x+y$ 同为偶数，于是 $2(2n+1)$ 是 4 的倍数，矛盾. **15.** $a^3+a^2c+b^2c-abc+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)+c(a^2-ab+b^2)=(a+b+c)(a^2-ab+b^2)=0$ **16.** 原式 $=3^n\times 10-2^n\times 5=10(3^n-2^{n-1})$ **17.** $a=1995^2\cdot 1996^2+1995^2-1+1996^2+1=(1995\times 1996)^2+1996(1994+1996)+1=(1995\times 1996+1)^2$ **18.** $4^{545}+545^4=(2^{545})^2+2\cdot 2^{545}\cdot 545^2+(545^2)^2-2\cdot 2^{545}\cdot 545^2=(2^{545}+545^2)^2-(2^{273}\cdot 545)^2=(2^{545}+545^2-2^{273}\cdot 545)(2^{545}+545^2+2^{273}\cdot 545)$，每个括号内的值大于 1.

测试题 **1.** C **2.** D **3.** C **4.** $x=10^{2n+4}+10^{n+3}+50=(10^{n+2})^2+2\times 5\times 10^{n+2}+5^2+25=(10^{n+2}+5)^2+25$，选 B. **5.** A **6.** -98 **7.** 0 **8.** 已知变为 $(a+b)\cdot(c+d)=1997$，结果为 1998. **9.** $7^{24}-1=(7^{12}+1)(7^6$

$+1)(7^3+1)(7^3-1)=(7^{12}+1)(7^6+1)\times 8\times 43\times 6\times 57$，所求的两个数为43、48. **10.** 设所要求的自然数为x，则$x-45=m^2$①，$x+44=n^2$ ②，m、n都是自然数，由②－①得$(m+n)(n-m)=89$. 又$n>m$，故$n+m=89$，$n-m=1$，所以$n=45$，$m=44$，$x=1\,981$. **11.** $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1=(n^2+3n+1)^2$ **12.** $a^{1985}-a^{1949}=a^{1949}(a^2+1)(a^4-a^2+1)(a^{12}-a^6+1)(a+1)(a^2-a+1)(a^6-a^3+1)(a^3+a^3+1)(a^2+a+1)(a-1)$，当$a$的个位数分别为0至9时，该式右边总含有因数2和5，故$a^{1985}-a^{1949}$是10的倍数. **13.** 由$x=m^2+n^2$，可得$2x=2m^2+2n^2+2mn-2mn=(m+n)^2+(m-n)^2$.

第四讲　对称式和轮换对称式

练习题 **1.** $3(a+b)(b+c)(c+a)$ **2.** $3(a-b)(b-c)(c-a)$ **3.** $(a+b)(b+c)(c+a)$ **4.** $\dfrac{a^3+2b}{3a}$ **5.** $(a+b)(b+c)(c+a)$ **6.** $(x+y+z)(xy+yz+zx)$ **7.** 设原式$=(x-y)(y-z)(z-x)\cdot[k(x^2+y^2+z^2)+n(xy+yz+zx)]$，待定系数法求得$k=5$，$n=-5$. **8.** 原式$=[(2a+2b+2c)^3-(b+c)^3]-[(c+a)^3+(a+b)^3]=(2a+b+c)(A-B)$，其中$A-B$由轮换多项式可确定其含有因式$a+2b+c$和$a+b+2c$. 再用待定系数法求得原式$=3(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)$.

测试题 **1.** B **2.** B **3.** A **4.** $-(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)$ **5.** 令$x=y+z$，原式为0，同理，$y=x+z$原式为0，$z=x+y$，原式为0. 设原式$=k(x-y-z)(y-z-x)(z-x-y)$，待定系数法得$k=-1$. **6.** 当$a=0$时，原式$=0$，设原式$=kabc$，取$a=b=c=1$，求得$k=4$. **7.** $a^3+b^3+c^3+d^3=(a+b)^3-3ab(a+b)+(c+d)^3-3cd(c+d)$，又$a+b=-(c+d)$，$\therefore (a+b)^3+(c+d)^3=0$. 故$3=3ab(c+d)+3cd(a+b)=3(abc+abd+cda+cdb)$，所以要求式子的值为1.

第五讲　分式的运算

练习题 **1.** D **2.** B **3.** C **4.** C **5.** $\dfrac{1}{x+5}$ **6.** $\dfrac{16}{x^{16}-1}$ **7.** $\dfrac{1}{x-100}$ **8.** 1 **9.** 设$B=\dfrac{a}{b}$，$A=\dfrac{a+1}{b+1}$，求差法得$A>B$ **10.** $\dfrac{2}{(x+2)(x+4)}$ **11.** $\dfrac{1}{x-a}$ **12.** 0 **13.** $x^2=x(x+1)-x=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x(x+1)}}-$

$x=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}-x$，或$\dfrac{1}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}+x$

测试题 1. B 2. B 3. C 4. D 5. B 6. x^4+1 7. 设 11 111 = a，原式化为 $\dfrac{(2a+1)^3+(a+1)^3}{(2a+1)^3+a^3}=1+\dfrac{1}{3a+1}=1\dfrac{1}{33\,334}$ 8. $\dfrac{1\,998}{(x+1)(x+1\,999)}$ 9. $\dfrac{1}{a-3}$ 10. $-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ 11. 设定值为 k，则$(a-kb)x+7-11k=0$，从而 $a-kb=0$，$7-11k=0$，故 $11a-7b=0$. 12. $\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{a+b}{a}\cdot\dfrac{a-b}{b}$ 13. (1) $a_2=\dfrac{x-1}{x}$，$a_3=\dfrac{-1}{x-1}$，$a_4=x$，$a_5=\dfrac{x-1}{x}$. (2) 由(1)看出 $a_{3n-1}=a_1$，又 $2\,000\div3=666\cdots\cdots2$，所以 $a_{2\,000}=a_2=\dfrac{x-1}{x}$.

第六讲 部分分式

练习题 1. $\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{1}{3}$ 2. -4，4，9 3. 27，-3 4. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{(x-1)^3}$ 5. $\dfrac{2}{(x+1)^2}-\dfrac{4}{x+1}+\dfrac{5}{x+2}$ 6. $\dfrac{2}{x+5}+\dfrac{x+7}{2x^2-3}$ 7. $a=1$，$b=1$，$c=2$ 8. $\dfrac{1}{1-10x}+\dfrac{1}{3(3x+1)}-\dfrac{1}{3(3x+1)^2}$

测试题 1. D 2. C 3. C 4. $N=-4$ 5. $\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ 6. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2-x+1}$ 7. $\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{2x+3}+\dfrac{3}{2x-5}$ 8. $\dfrac{1}{2x-1}+\dfrac{4}{x+3}+\dfrac{1}{x-3}$

第七讲 含有字母系数的方程和分式方程

练习题 1. $a=2$ 时，方程有无数个解；$a=3$ 时，方程无解；$a\neq2$ 且 $a\neq3$ 时，$x=\dfrac{1}{a-3}$. 2. 原方程化简为 $3(a-b)x=(a+2b)(a-b)$，当 $a=b$ 时，x 为不等于 a 和 b 的任意数；当 $a\neq b$ 时，$x=\dfrac{a+2b}{3}$. 3. $x=\dfrac{3}{2}$ 4. $x=4$ 5. $x=0$，$x=\dfrac{1}{2}$ 6. 设第一次饲料单价为每 1 千克 m 元，第二次饲料单价为每 1 千克 n 元($m>0$，$n>0$，$m\neq n$). 甲两次购买的饲料平均单价为

$\frac{1\,000m+1\,000n}{2\,000}=\frac{m+n}{2}$ 元/千克，乙两次的平均单价为 $\frac{800+800}{\frac{800}{m}+\frac{800}{n}}=\frac{2mn}{m+n}$ 元/千克．求差比较可知 $\frac{m+n}{2}>\frac{2mn}{m+n}$，故乙的购货方式比甲合算． 7. 设小汽车的速度为 $5x$ 千米/时，则 $\frac{270}{5x}+5-\frac{1}{2}=\frac{270}{2x}$，$x=18$．小汽车速度为 90 千米/时，大汽车速度为 36 千米/时． 8. (1) 原方程化为 $(m-n)(a-b)x=(m-n)(an-bm)$，当 $m\neq n$ 时，若 $a=b=0$，x 为任意不等于 $-m$ 和 $-n$ 的数；若 $a=b\neq 0$，方程无解；若 $a\neq b$，$x=\frac{an-bm}{a-b}$．(2) 当 $m=n$ 时，x 为任意不等于 $-m$ 和 $-n$ 的数． 9. 设甲、乙、丙、丁、戊五人单独完成工作各需 x_1 天、x_2 天、x_3 天、x_4 天、x_5 天，则有

$$\begin{cases}\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{7.5}, & ①\\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_5}=\frac{1}{5}, & ②\\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{1}{6}, & ③\\ \frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5}=\frac{1}{4}. & ④\end{cases}$$

① + ② + ③ + ④ × 2 得，$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5}=\frac{1}{3}$．故五人合作需 3 天才能完成．

测试题 1. D 2. C 3. D 4. B 5. $x=\frac{m+n}{ab+an-bm}$ 6. 原方程化为 $ax=a+b$，当 $a=0$ 时，若 $b=0$，原方程无意义；若 $b\neq 0$，方程无解；当 $a\neq 0$ 时，$x=\frac{a+b}{a}$．题中条件隐含 $a\neq b$ 且 $a\neq -b$． 7. $x=\frac{1}{1\,999}$ 8. $x=-7$ 9. $x=1$，$y=\frac{1}{2}$ 10. 设前轮的周长为 x 米，后轮的周长为 y 米，那么

$$\begin{cases}\frac{12}{x}-\frac{12}{y}=6,\\ \frac{12}{\left(1+\frac{1}{4}\right)x}-\frac{12}{\left(1+\frac{1}{5}\right)y}=4,\end{cases}$$

用换元法解方程组得 $\begin{cases}x=\frac{2}{5},\\ y=\frac{1}{2}.\end{cases}$ 11. 设甲管单独开放 x 小时注满水槽，乙管单独开放 y 小时注满水槽，满水槽需 z 小时才能漏完，则

$$\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{z}=\frac{1}{2} & ①\\ \frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{3} & ②\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=1 & ③\end{cases}$$

③ − ② − ① 得$\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$，再求得$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{7}{6}$. 故甲、乙两管同时注满水槽需$\frac{6}{7}$小时.

第八讲　实数的性质

练习题　**1.** 24　**2.** 6 805　**3.** $\pm a$　**4.** $(\sqrt{m}+1)^2$　**5.** $<$，$>$，$>$　**6.** 1 或 − 3　**7.** $\frac{163}{113}$　**8.** 2 000　**9.** $\frac{15}{16}$　**10.** $b\leqslant x\leqslant a$　**11.** 17　**12.** 5　**13.** $\frac{3}{4}$　**14.** $T=(x-p)+(15-x)+(p+15-x)=30-x$，最小值为 15　**15.** 原式化为$(a^2+b^2-25)\sqrt{3}+(a-b-1)\sqrt{2}=0$，$a^2+b^2=25$，$(a-b)^2=1$，故 $ab=12$.　**16.** $x=\frac{1}{4}$，$y=\frac{1}{3}$，$\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$　**17.** 设 a 有 k 个有效数字，若 b 也只有 k 个有效数字，则 $a=b$；若 b 的有效数字多于 k 个，那么当 b 的第 $k+1$ 个有效数字大于或等于 5 时，$a>b$，当 b 的第 $k+1$ 个有效数字小于或等于 4 时 $a\leqslant b$(其中第 $k+1$ 个有效数字及以后的数均为 0 时取等号).　**18.** 原式变为$c^2p-bdp=(ab+ad-2ac)\sqrt{p}$，故 $ab+ad-2ac=0$，$c^2p-bdp=0$，推得$(b-d)^2=0$，从而 $b=c=d$. 反过来 $b=c=d$ 时等式成立.　**19.** 原式配方得$(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0$. 由非负数性质推得 $a=b=c=d$.

测试题　**1.** 1 988　**2.** $\frac{1}{x}$，x^2　**3.** $\frac{1}{3}$　**4.** 17　**5.** C　**6.** D　**7.** C　**8.** D　**9.** B　**10.** C　**11.** 原方程化为 $|x-2|=1\pm a\geqslant 0$，$a=1$　**12.** 分类讨论，$x=-3.5$ 或 2.5　**13.** 6　**14.** $x+y\neq x-y$，必 $xy=\frac{x}{y}$，解得 $x=0$ 或 $y=\pm 1$. 再求得符合条件的数对只有$\left(\frac{1}{2},-1\right)$和$\left(-\frac{1}{2},-1\right)$.

第九讲　二次根式的运算

练习题　**1.** B　**2.** C　**3.** A　**4.** D　**5.** C　**6.** B　**7.** $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}<\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$　**8.** $Z<Y<X$　**9.** 0　**10.** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$　**11.** $\sqrt{11}-\sqrt{6}$　**12.** $\frac{1}{5}\sqrt{3}$　**13.** $2(a+b+c)$　**14.** − 2　**15.** $a=\sqrt{13}-3$，$b=4-\sqrt{13}$，原式 = 8　**16.** 考虑$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^6+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^6=970$，

$0<(\sqrt{3}-\sqrt{2})^6<1$，答案为 970　**17.** $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$　**18.** $1+\sqrt{3}$　**19.** $3\sqrt{3}-\sqrt{2}$　**20.** 当 $b\geqslant 1$ 时，结果为 $\frac{1}{b}$；当 $0<b<1$ 时，结果为 b.

测试题　**1.** D　**2.** C　**3.** C　**4.** B　**5.** B　**6.** D　**7.** 1 999　**8.** $\frac{1-a}{1+a}$　**9.** 2　**10.** $-27+2\sqrt{182}$　**11.** $c>b>a$　**12.** $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$　**13.** $2\sqrt{5}-2\sqrt{2}$　**14.** 0　**15.** $m=10$，$n=\frac{1}{2}(3\sqrt{13}-9)$　$198m+9n+n^2=1989$　**16.** 设 $a=\sqrt{7}+\sqrt{5}$，$b=\sqrt{7}-\sqrt{5}$，$a^6+b^6=13536$，而 $0<b^6<1$，故所求的最大整数为 13535.　**17.** 已知式可化为 $a^2=b^2$. 进一步可推得 $a+b=0$. 其中 $a-b=0$ 时，$a=b=0$.　**18.** $\frac{1}{\sqrt{a+n-1}+\sqrt{a+n}}=\sqrt{a+n}-\sqrt{a+n-1}$

第十讲　复合二次根式

练习题　**1.** $5+\sqrt{2}$　**2.** $2\sqrt{3}$　**3.** $1+\sqrt{5}+2\sqrt{3}$　**4.** $\sqrt{5}-\sqrt{3}$　**5.** 4　**6.** $a=3$，$m=8$，$n=1$　**7.** $\sqrt{10}+\sqrt{2}$　**8.** $2+2\sqrt{3}-\sqrt{5}$　**9.** $\sqrt{2}+1$　**10.** $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}$

测试题　**1.** $>$　**2.** $<$　**3.** $=$　**4.** $\sqrt{7}-\sqrt{2}$　**5.** $2\sqrt{5}$　**6.** $|\sqrt{x-1}+1|-|\sqrt{x-1}-1|$，当 $1\leqslant x<2$ 时，结果为 $2\sqrt{x-1}$；当 $x\geqslant 2$ 时，结果为 2.　**7.** 400　**8.** $a=4$，$b=2-\sqrt{3}$，所求的值为 4　**9.** $a=\sqrt{2}-1$，$b=\sqrt{6}-2$，所求值为 $\sqrt{6}+1$.　**10.** $x=6$，$y=1$，$a=7$，或 $x=3$，$y=2$，$a=5$.

第十一讲　代数式的求值

练习题　**1.** C　**2.** C　**3.** A　**4.** A　**5.** B　**6.** 1　**7.** 6　**8.** 62　**9.** -2　**10.** 2　**11.** 385　**12.** $\frac{10}{3}$　**13.** 1　**14.** 3　**15.** 4　**16.** $2+$

$2\sqrt{3}$　17. 由已知$\frac{1}{a+b+c}=\frac{ab+bc+ac}{abc}$，即$(a+b+c)(ab+bc+ac)=abc$，分解因式得$(a+b)(b+c)(c+a)=0$. 于是$a+b$、$b+c$、$c+a$中必有一个为0，而$a+b+c=1998$. 故$a$、$b$、$c$中必有一个为1998.

测试题　1. D　2. B　3. A　4. B　5. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$　6. $\sqrt{5}-\sqrt{2}$　7. 1　8. 3　9. 10　10. 由条件得$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$，求得$\frac{1}{x}=\frac{5}{12}$，从而$x=\frac{12}{5}$.　11. 1152　12. 已知化简得$x=y=z$，所以结果为1.　13. $\frac{a}{a+1}=\frac{ax}{ax+x}=\frac{ax}{ax+by+cz}$，结果为1.

第十二讲　恒等式的证明

练习题　1. 左边$=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{a+b+c+d}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b+c+d}=$右边　2. 略　3. 略　4. 左边利用分解因式和约分化简　5. 已知化为$(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2=0$，于是$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$，$\frac{z}{c}=\frac{x}{a}$，$\frac{z}{c}=\frac{y}{b}$.　6. 先将已知两边立方，再化简　7. 将已知代入要求证的等式左边和右边　8. 已知变为$x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=-z^{\frac{1}{3}}$，再两边立方，得$x+y+z=3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}$，再立方即得.　9. 由已知得$x-y=\frac{y-z}{yz}$，从而$yz=\frac{y-z}{x-y}$，同理$xy=\frac{x-y}{z-x}$，$zx=\frac{z-x}{y-z}$，三式相乘即得.　10. $\frac{a}{(bc-a^2)^2}=\frac{1}{bc-a^2}\cdot\left(-\frac{b}{ac-b^2}-\frac{c}{ab-c^2}\right)=\frac{-ab^2+bc^2-ac^2+b^2c}{(bc-a^2)(ac-b^2)(ab-c^2)}$，同理求出$\frac{b}{(ac-b^2)^2}$，$\frac{c}{(ab-c^2)^2}$，再三式相加.　11. 已知式左边提公因式得$\sqrt{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}}\cdot(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})=a$，再两边平方后开立方.

测试题　1. 左边逐项通分　2. $\frac{11}{(x-11+k)(x+k)}=\frac{1}{x-11+k}-\frac{1}{x+k}$，$\frac{2n}{x^2-n^2}=\frac{1}{x-n}-\frac{1}{x+n}$.　3. 左边－右边$=\left[\frac{x}{a(x-a)}-\frac{1}{x-a}\right]+\left[\frac{y}{a(y-a)}-\frac{1}{y-a}\right]+\left[\frac{z}{a(z-a)}-\frac{1}{z-a}\right]-\frac{3}{a}$

$=0$　4. 分别化简左边、右边，其中 $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}=(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3$　5. 令 $\frac{A}{x}=m$，得 $A=mx$，$B=my$，$C=mz$，$D=mt$，代入要求证的等式左边、右边.　6. 将 $a=3b$，$c=3d$ 代入要求证的等式左边、右边　7. 将 $b-1=-a$，$a-1=-b$ 代入左边　8. 由 $ac=bd$ 得 $\frac{a}{b}=\frac{d}{c}=\frac{a+d}{b+c}$，于是 $\frac{a+b}{b}=\frac{m}{b+c}$，$(a+b)(b+c)=mb$，又 $(c+d)(d+a)=dm$. 代入左边即证.

第十三讲　三角形的边和角

练习题　1. C　2. B　3. B　4. D　5. 15　6. $-3<x<0$　7. $\frac{\alpha+\beta}{2}$　8. 55°　9. 设第三条高为 h，三条高对应的边依次为 a，b，c，三角形面积为 S，则 $S=\frac{1}{2}a\cdot 4=\frac{1}{2}\cdot b\cdot 12=\frac{1}{2}c\cdot h$，于是 $a=\frac{S}{2}$，$b=\frac{S}{6}$，$c=\frac{2S}{h}$. 显然 $a>b$. 由 $\begin{cases}a+b>c,\\ b+c>a,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}\frac{S}{2}+\frac{S}{6}>\frac{2S}{h},\\ \frac{S}{6}+\frac{2S}{h}>\frac{S}{2}.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}h>3,\\ h<6.\end{cases}$ 由于 h 是整数，则 h 的最大值是 5. 这时有 $4a=12b=5c=2S$，$c=\frac{2}{5}S$. 要使 $a+b+c$ 最小，显然 S 只要取 2，6，5 的最小公倍数 30 即可. 因此 $\triangle ABC$ 周长的最小值是 $15+5+12=32$.　10. 设三角形三边分别用 a，b，c 根火柴杆，且 $a>b>c$，$a=3c$. 那么 $a+b+c=100$. 因此 $3c+b+c=100$，$b=100-4c$. 而 $b+c>a$ 且 $a>b$，则有：$\begin{cases}100-4c+c>3c,\\ 3c>100-4c.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}c<16\frac{2}{3},\\ c>14\frac{2}{7}.\end{cases}$ 而 c 是整数，故 $c=15$ 或 16. 当 $c=15$ 时，$a=45$，$b=40$；当 $c=16$ 时，$a=48$，$b=36$. 因此，三角形各边所用火柴杆根数是 45，40，15 或 48，36，16.　11. (1) 若 $(180-x)$ 度为最大角，则最小角为 $(156-x)$ 度，那么，$156-x\leqslant 180-(180-x)-(156-x)\leqslant 180-x$，解得 $104°\leqslant x\leqslant 112°$. (2) 设 $(180-x)$ 度是中间角，最大角为 α 度，最小角为 β 度，则 $\alpha+\beta+180-x=180$，$\alpha+\beta=x$. 又 $\alpha-\beta=24$，解得 $\alpha=\frac{1}{2}x+12$，$\beta=\frac{x}{2}-12$.　因此 $\frac{x}{2}-12\leqslant 180-x\leqslant\frac{x}{2}+12$，$112°\leqslant x\leqslant 128°$. (3) 设 $(180-x)$ 度为最小角，则最大角为 $(204-x)$ 度. 那么 $180-x\leqslant 180-(180-x)-(204-x)\leqslant 204-x$，解得 $128°\leqslant x\leqslant 136°$. 综合 (1)(2)(3)，$x$ 的取值范围是 $104°\leqslant x\leqslant 136°$.

测试题　1. C　2. A　3. C　4. D　5. B　6. $30°\leqslant\alpha\leqslant 80°$　7.

540°　**8.** $\frac{39}{4}$　**9.** 175°　**10.** 7　**11.** (1) $2(DA+DB+DC)>AB+BC+CA$. 理由是：$DA+DB>AB$，$DB+DC>BC$，$DC+DA>CA$. 把这三个不等式相加即得结论. (2) $AB+BC+CA>DA+DB+DC$. 理由是：$BC+BA>DC+DA$，$CA+CB>DA+DB$，$AB+AC>DB+DC$，把这三个不等式相加即得结论.　**12.** $\angle C$ 是锐角. 若 $\angle C=90°$，则 C、D、E 三点重合，与 $CE+CD=AB$ 矛盾. 若 $\angle C$ 为钝角，则 D 在 BC 的延长线上. 由直角三角形中斜边最长知 $AB>BD=BC+CD>CE+CD$，从而与已知矛盾.

第十四讲　全等三角形

练习题　**1.** A　**2.** C　**3.** D　**4.** A　**5.** 45°　**6.** 6　**7.** 99°　**8.** 6　**9.** (1) 如图 14.1，分别过 B、B_1 作边 CA、C_1A_1 上的高 BD、B_1D_1，D、D_1 为垂足. 由

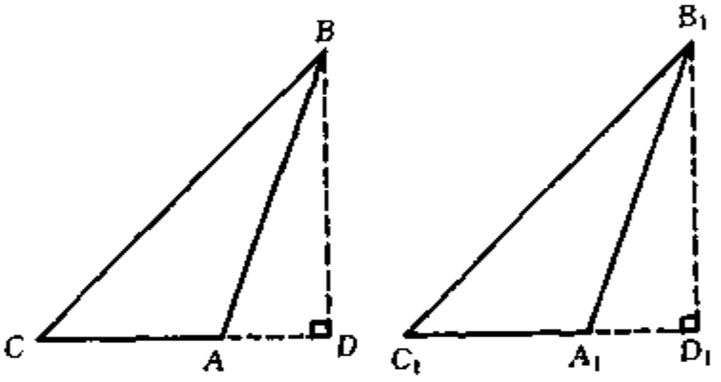


图 14.1

于 $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1=110°>90°$，则 D、D_1 必在 CA、C_1A_1 的延长线上. 于是，$\angle BAD=\angle B_1A_1D_1=70°$. 又 $BA=B_1A_1$，$\angle BDA=\angle B_1D_1A_1=90°$，则 $\mathrm{Rt}\triangle ABD=\mathrm{Rt}\triangle A_1B_1D_1$，$BD=B_1D_1$. 已知 $BC=B_1C_1$，则 $\mathrm{Rt}\triangle BCD\cong\mathrm{Rt}\triangle B_1C_1D_1$，$\angle BCD=\angle B_1C_1D_1$. 又由已知 $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$，$AB=A_1B_1$，所以 $\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$. (2) 此时结论不成立. 因为 $\angle BAC=50°<90°$，如图 14.2，作 $BD\perp AC$，D 为垂足，以 BD 为轴取 C 的对称点 C'. 由于 $BC=BC'$，BA 为公共边，$\angle BAC$ 为公共角，显然，$\triangle ABC$ 与 $\triangle ABC'$ 满足题设条件，但它们并不全等.　**10.** 在 AC 延长线上截取 $CK=BM$，连结 DK. 在 $\triangle BDM$ 与 $\triangle CDK$ 中，$BM=CK$，$\angle MBD=\angle DCK=90°$，$BD=CD$，则 $\triangle BDM\cong\triangle CDK$，那么 $MD=KD$，$\angle MDB=\angle KDC$. 故有 $\angle MDK=120°-\angle MDB+\angle KDC=120°$. 又 $\angle MDN=60°$，则 $\angle NDK=60°$. 在 $\triangle MDN$

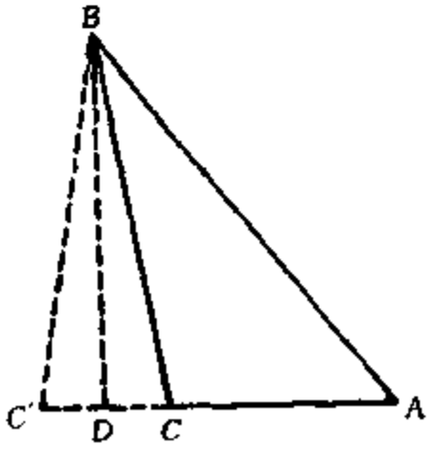


图 14.2

与 $\triangle KDN$ 中，$MD = KD$，$\angle MDN = \angle NDK = 60°$，$DN = DN$，则 $\triangle MDN \cong \triangle KDN$，所以 $MN = NK$. 那么 $\triangle AMN$ 的周长 $= AM + MN + AN = AM + AN + NK = AM + AK = (AB - BM) + (AC + CK) = AB + AC = 2$. **11.** 作 BE 与 AC 的延长线交于 K. 因为 $\angle BAE = \angle KAE$，$\angle AEB = \angle AEK = 90°$，$AE$ 公共，所以 $\triangle ABE \cong \triangle AKE$. 那么，$BE = KE$. 在 $\triangle CAD$ 和 $\triangle BDE$ 中，$\angle ACD = \angle BED = 90°$，$\angle ADC = \angle BDE$，那么，$\angle CAD = \angle EBD$. 在 $\triangle CAD$ 和 $\triangle CBK$ 中，$AC = BC$，$\angle ACD = \angle BCK = 90°$，$\angle CAD = \angle CBK$，则 $\triangle CAD \cong \triangle CBK$，$AD = BK$. 所以 $AD = 2BE$.

测试题 **1.** C **2.** B **3.** C **4.** 90° **5.** 180° **6.** 30 **7.** a **8.** 共 10 对全等三角形. $\triangle ABC \cong \triangle ADC(SSS)$；$\triangle ABE \cong \triangle ADE$，$\triangle ABP \cong \triangle ADP$，$\triangle ABF \cong \triangle ADF$，$\triangle BCF \cong \triangle DCF$，$\triangle BCP \cong \triangle DCP$，$\triangle BCE \cong \triangle DCE$，$\triangle BEP \cong \triangle DEP$，$\triangle BEF \cong \triangle DEF$，$\triangle BPF \cong \triangle DPF$，理由是“$SAS$”. **9.** 因为 $BP = AB = BC$，且 $\angle DBP = \angle DBC$，则 $\triangle BDP \cong \triangle BDC$，那么 $\angle BPD = \angle BCD$. 又因为 $DA = DB$，$AC = BC$，所以 $\triangle ADC \cong \triangle BDC$，$\angle BCD = \angle ACD$. 因此，$\angle BCD = 30°$，$\angle BPD = 30°$.

第十五讲　等腰三角形

练习题 **1.** D **2.** C **3.** D **4.** A **5.** C **6.** 24° **7.** 19 **8.** 110° **9.** 40° **10.** 12，12，6 或 8，8，14 **11.** $\frac{180°}{7}$. 设 $\angle A = x$，则由 $AE = DE$ 得 $\angle ADE = \angle A = x$. 又由 $AB = AC$ 得 $\angle ABC = \angle C = \frac{1}{2}(180° - x)$. 因为 $BD = BC$，则 $\angle BDC = \angle C = \frac{1}{2}(180° - x)$. 又 $\angle DEB = \angle A + \angle ADE = 2x$，则 $\angle BDE = 180° - 4x$. 而 $\angle ADE + \angle BDE + \angle BDC = 180°$，即 $x + 180° - 4x + \frac{1}{2}(180° - x) = 180°$，解得 $x = \frac{180°}{7}$. **12.** 因为 $DE = EF = FD$，则 $\triangle DEF$ 是等边三角形. 因为 $\angle DEB = \angle ADF + 60° - \angle B$，$\angle DEB + 60° = \angle CFE + \angle C$，两式相加得 $2\angle DEB = \angle ADF + \angle CFE - \angle B + \angle C$. 而 $\angle B = \angle C$，故 $\angle DEB = \frac{1}{2}(\angle ADF + \angle CFE)$. **13.** 延长 AC 和 BE，相交于 F. 由于 $AE \perp BF$ 且 AE 平分 $\angle BAF$，则易证 AE 是 BF 边上的中线，故有 $BF = 2BE$. 又 $\angle CAD = \angle CBF$，$AC = BC$，则 $\mathrm{Rt}\triangle ACD \cong \mathrm{Rt}\triangle BCF$，所以 $AD = BF = 2BE$. **14.** 延长 CD 至 E，使 $DE = DB$. 因为 $\angle ADB = 90° - \frac{1}{2}\angle BDC$，所以 $2\angle ADB = 180° - \angle BDC$，$\angle ADB = \angle ADE$. 又 AD 是公共边，$DB = DE$，则 $\triangle ADB \cong \triangle ADE$，$AB = AE$，$\angle E = \angle B = 60°$. 那么，$\angle E = \angle ACD$，则 AC

$= AE = AB$，故 $\angle ACB = \frac{1}{2}(180° - 20°) = 80°$. **15.** 因为 $AB = AC$，则 $\angle B = \angle C$. 在 $\triangle FBD$ 和 $\triangle DCE$ 中，$FB = DC$，$\angle B = \angle C$，$BD = CE$，则 $\triangle FBD \cong \triangle DCE$，所以 $DF = DE$，$\angle BFD = \angle CDE$. 又因为 $\angle BFD + \angle B = \angle CDF = \angle CDE + \angle EDF$，故 $\angle EDF = \angle B$，$\angle DEF = \frac{1}{2}(180° - \angle EDF) = 90° - \frac{1}{2}\angle B$. 因 BC 是 $\triangle ABC$ 的最大边，则 $0° < \angle B \leqslant 60°$，故 $60° \leqslant \angle DEF < 90°$.

测试题 **1.** B **2.** D **3.** D **4.** D **5.** A **6.** B **7.** 40° **8.** 6 **9.** 42 **10.** 20 或 $13\frac{1}{3}$ **11.** 连结 AD. 由于 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，且 D 是斜边 BC 的中点，则 $AD = CD$，$\angle DAE = \angle C = 45°$. 而 $\angle EDA + \angle ADF = \angle ADF + \angle CDF = 90°$，那么 $\angle ADE = \angle CDF$. 因此 $\triangle ADE \cong \triangle CDF$，从而 $AE = CF = 5$，$DE = DF$. 所以 $AC = AB = AE + BE = 17$，$AF = 12$，$EF = 13$，$S_{\triangle DEF} = \frac{1}{4}EF^2 = \frac{169}{4}$. **12.** 连结 CD. 在 $\triangle BDP$ 和 $\triangle BDC$ 中，$BP = AB = BC$，$\angle DBP = \angle DBC$，BD 公共，则 $\triangle BDP \cong \triangle BDC$，所以 $\angle BPD = \angle BCD$. 又 $DB = DA$，$BC = AC$，DC 公共，则 $\triangle BDC \cong \triangle ADC$，$\angle BCD = \angle ACD = \frac{1}{2}\angle ACB = 30°$. 所以 $\angle BPD = \angle BCD = 30°$. **13.** (1) $BD = CE$；(2) $BE = CD$；(3) $\angle BAD = \angle CAE$；(4) $\angle BAE = \angle CAD$；(5) $\angle B = \angle C$.

第十六讲　直角三角形

练习题 **1.** B **2.** A **3.** C **4.** C **5.** D **6.** 6 **7.** $\frac{9}{4}$ **8.** 36 **9.** $2\sqrt{2}$ **10.** 2，$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **11.** 设 $AD = x$. 由于 $\angle A = 60°$，$\angle ADF = 90°$，则 $\angle AFD = 30°$. 因此 $AF = 2x$，$DF = \sqrt{AF^2 - AD^2} = \sqrt{3}x$. 同理 $\angle BDE = 30°$，则 $\angle EDF = 60°$. 这时易证 $\triangle DEF$ 是等边三角形. 而 $BD = 6 - x$，$BE = \frac{6-x}{2}$，$DE = \sqrt{BD^2 - BE^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(6 - x)$. 所以 $\sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{2}(6 - x)$，解得 $x = 2$. **12.** 如图 16.1，过 A 作 $AD \perp AB$，且使 $AD = BM$. 易知 $\triangle ADM \cong \triangle BMC$，则 $DM = MC$，$\angle ADM = \angle BMC$. 故有 $\angle AMD + \angle BMC = \angle CMD = 90°$. $AD \perp AB$，$BC \perp AB$，则 $AD \parallel BC$，$\angle DAC = \angle ACB$. 而 $AD = CN$，AC 公共，则 $\triangle ACD \cong \triangle CAN$，$\angle ACD = \angle CAN$. 这时 $AN \parallel CD$. 而 $\angle DCM = 45°$，故 $\angle APM = \angle DCM = 45°$. **13.** 如图 16.2，作 $AH \perp BC$ 于 H，则 $AC^2 = AH^2 + CH^2$，$AB^2 = AH^2 + BH^2$，两式相减得 $AC^2 - AB^2 = CH^2 - BH^2 = (CH$

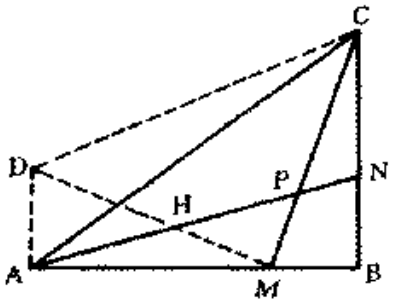


图 16.1

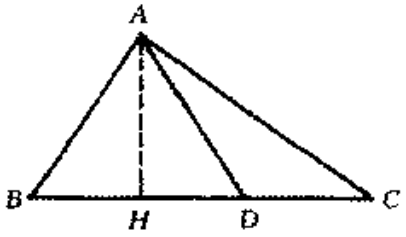


图 16.2

$+BH)(CH-BH)=BC\cdot CD$. 因为 $AB=37$, $AC=58$, 所以 $BC\cdot CD=58^2-37^2=3\times5\times7\times19$. 而 $AC-AB<BC<AC+AB$, 故 $21<BC<95$, 且 BC 为整数, 则 $BC=35$ 或 57. 若 $BC=35$, 则 $CD=3\times19=57>BC$, D 不在 B、C 之间, 故应舍去, 所以取 $BC=57$, 这时 $CD=35$, $BD=22$. **14.** 如图 16.3, 作 $OM\perp AC$, $ON\perp BC$, M、N 是垂足, 那么 $OA^2+OB^2=(OM^2+AM^2)+(ON^2+BN^2)$. 因为 $S_{\triangle OCA}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$, 则 $\frac{1}{2}AC\cdot OM=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}AC\cdot BC\right)$, 即 $OM=\frac{1}{3}BC$, $BN=2OM$. 同理 $AM=2ON$. 因此, $OA^2+OB^2=(OM^2+4ON^2)+(ON^2+4OM^2)=5(OM^2+ON^2)=5(OM^2+MC^2)=5OC^2$.

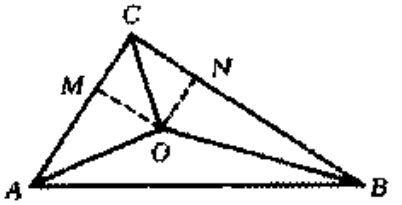


图 16.3

15. 如图 16.4, 设 $BP=x$, 则 $AP=c-x$. 作斜边上的高 CH, 则 $CH=\frac{ab}{c}$, $BH=\frac{a^2}{c}$, $HP=\left|\frac{a^2}{c}-x\right|$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CHP$ 中有 $PC^2=CH^2+HP^2=\frac{a^2b^2}{c^2}+\left(\frac{a^2}{c}-x\right)^2=x^2-\frac{2a^2}{c}x+a^2$. 又 $PC^2=PA\cdot PB=x(c-x)$. 因此 $x^2-\frac{2a^2}{c}x+a^2=x(c-x)$, 即 $(2x-c)\left(x-\frac{a^2}{c}\right)=0$. 那么 $x=\frac{c}{2}$(斜边上的中点)或 $x=\frac{a^2}{c}$(斜边上高线的垂足). 所以, 斜边上最多有 2 个红点, 当 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 为等腰三角形时, 中点与高线垂足重合, 斜边上最少有 1 个红点.

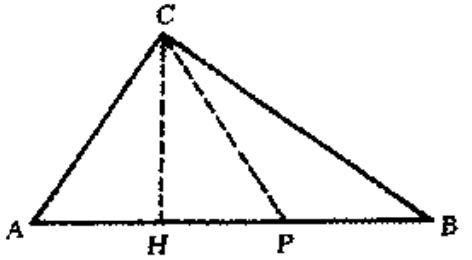


图 16.4

测试题 1. D 2. C 3. B 4. B 5. D 6. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 7. $\frac{\sqrt{3}}{4}a$ 8.

6　9. 10　10. 135°　11. 由于 $\triangle ACD$、$\triangle BCE$ 都是等边三角形，则 $AC = DC$，$BC = EC$，$\angle ACE = \angle BCD = 150°$，那么 $\triangle ACE \cong \triangle DCB$. 因此 $\angle CAE = \angle CDB$. 又 $\angle ABC + \angle BCD = 180°$，则 $AB \parallel CD$，$\angle ABD = \angle CDB$，即 $\angle ABD = \angle CAE$. 而 $\angle AOD = \angle ABD + \angle BAE = \angle BAE + \angle CAE = \angle BAC = 60°$.　12. (1) 当 D 在 B、C 之间时，如图 16.5，$AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2 = AD^2$，即 $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$，$(AB + AC)(AB - AC) = (BD + CD)(BD - CD) = BC \cdot (BD - CD)$. 由已知得 $AB - AC = BD - CD$，这时 $(AB - AC)(AB + AC - BC) = 0$. 而 $AB + AC - BC > 0$，故只有 $AB - AC = 0$，因此 $AB = AC$. (2) 当 D 在 BC(或 CB) 的延长线上时，如图 16.6，由 $AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$ 得 $(AB + AC)(AB - AC) = (BD + CD)(BD - CD)$. 由于 $AB - AC = BD - CD \neq 0$，则 $AB + AC = BD + CD$. 而 $AB > BD$，$AC > CD$，说明 $AB + AC = BD + CD$ 不成立，即 D 不可能在 BC 延长线上. 综上所述，$AB = AC$.　13. 若 BD 不是整数，则命题已成立. 现假定 BD 为整数. 考虑 $\triangle ABD$，由 $6 = AD - AB < BD < AD + AB = 8$ 得 $BD = 7$，连结 CD. 由于 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 为共底等腰三角形，所以直线 CD 必为线段 AB 的垂直平分线. 记 CD 与 AB 交于 H. (1) 当 $CD > CH$ 时，如图 16.7，$16 = AC + AD > CD = CH + HD = \sqrt{AC^2 - AH^2} + \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{(AC - AH)(AC + AH)} + \sqrt{(AD - AH)(AD + AH)} > (AC - AH) + (AD - AH) = AC + AD - AB = 9 + 7 - 1 = 15$，可见 CD 不

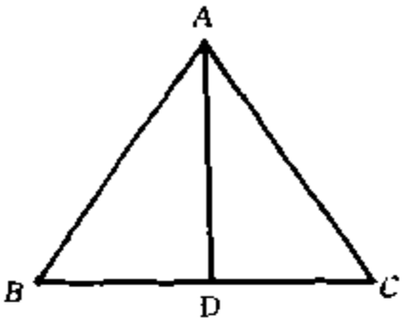


图 16.5

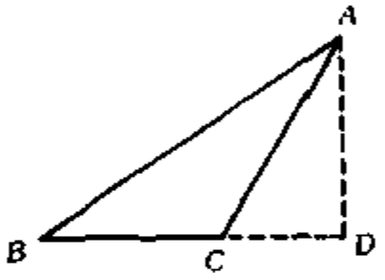


图 16.6

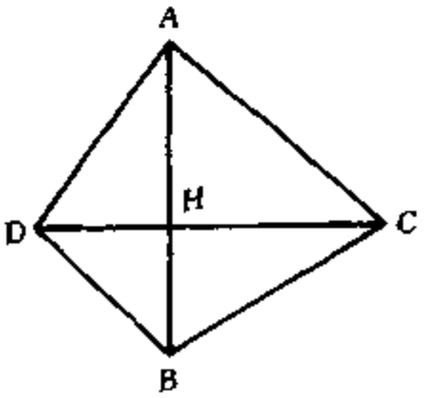


图 16.7

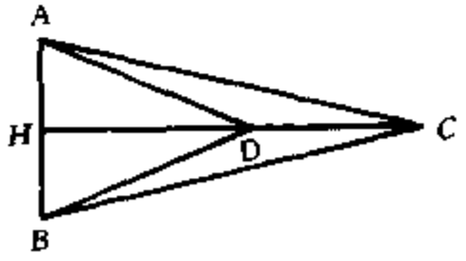


图 16.8

是整数．　(2) 当 $CD<CH$ 时，如图 16.8，$2=AC-AD<CD=\sqrt{AC^2-AH^2}-\sqrt{AD^2-AH^2}=\sqrt{(AC+AH)(AC-AH)}-\sqrt{(AD-AH)(AD+AH)}<(AC+AH)-(AD-AH)=AC-AD+AB=9-7+1=3$，可见 CD 不是整数．

第十七讲　多边形的角与对角线

练习题　**1.** B　**2.** B　**3.** C　**4.** A　**5.** D　**6.** 3　**7.** 10　**8.** 60°　**9.** 由于各内角相等，则各外角也相等，且每个外角是 $\frac{360}{n}$ 度．而内角度数是奇数，那么 $\frac{360}{n}$ 是奇数．而 $360=2^3\times3^2\times5$，所以 n 可能为 2^3、$2^3\times3^2$、$2^3\times5$、$2^3\times3$、$2^3\times3\times5$、$2^3\times3^2\times5$．这时分别算得每个内角度数为 135°、175°、171°、165°、177°、179°，均符合条件．所以，满足条件的多边形有 6 个．　**10.** 由于 $AK+AN=AB$，则 $FK=AN$．分别在边 BC、CD、DE、EF 上取点 P、R、S、T，使得 $FK=AN=BP=CR=DS=ET$，那么，$\angle KBN=\angle TAK$，$\angle KCN=\angle SAT$，$\angle KDN=\angle RAS$，$\angle KEN=\angle PAR$，$\angle KFN=\angle NAP$．所以 $\angle KAN+\angle KBN+\angle KCN+\angle KDN+\angle KEN+\angle KFN=\angle KAN+\angle TAK+\angle SAT+\angle RAS+\angle PAR+\angle NAP=\angle KAN+\angle KAN=2\times120°=240°$．

测试题　**1.** B　**2.** A　**3.** B　**4.** A　**5.** C　**6.** 3　**7.** 14　**8.** 168° 或 48°　**9.** 6　**10.** 134°．连结 AC，由于 $CD\parallel AF$，则 $\angle DCA+\angle CAF=180°$．而 $\angle B=90°$，则 $\angle BCA+\angle BAC=90°$．因此，$\angle BCD+\angle BAF=180°+90°=270°$，$\angle BAF=\angle CDE=270°-124°=146°$．所以 $\angle F=(6-2)\times180°-2\times146°-124°-90°-80°=134°$．　**11.** $n=1$．除了 $\angle A_1$、$\angle A_2$、$\angle A_3$ 外还有角，不妨设 $\angle A_i\leqslant90°$，则此多边形外角和大于 360°，这与凸多边形外角和等于 360° 矛盾！因此 $\angle A_i=120°$ 或 150°($i=4,5,\cdots,4n+2$)．设 $\angle A_4$，$\angle A_5$，…，$\angle A_{4n+2}$ 中有 k 个 120°，t 个 150°(k，t 为非负整数)．那么 $k+t=4n-1$，$t=4n-k-1$．因此，$[(4n+2)-2]\cdot180°=3\times90°+k\cdot120+(4n-k-1)\cdot150°$，$4n=4-k$，$k=0$，$n=1$．　**12.** 设平面上 4 点为 A、B、C、D，则它们的位置只有两种情况：D 在 $\triangle ABC$ 内与 D 在 $\triangle ABC$ 外．假设 4 个三角形都是锐角三角形．(1) 当 D 在 $\triangle ABC$ 内时，显然不满足假设．(2) 当 D 在 $\triangle ABC$ 外时，由假设知 $\angle ABC+\angle BCD+\angle CDA+\angle DAB<4\times90°=360°$，而四边形内角和是 360°，矛盾．故假设不成立．但是，我们容易构造使 $AB=BC=CA=BD$ 的图形，从而 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle BCD$ 都是锐角三角形．所以，最多有 3 个锐角三角形．

第十八讲　平行四边形

练习题　1. B　2. D　3. A　4. C　5. 2　6. $\sqrt{2}-1$　7. 45°　8. 6　9. 如图 18.1，过 B 作 $BK \perp BP$，且使 $BK = BP$. 因为 $AB \perp BC$，所以 $\angle ABP = \angle CBK$，$\triangle ABP \cong \triangle CBK$. 设 $AP = 1$，那么 $PK^2 + KC^2 = BP^2 + BK^2 + KC^2 = 2^2 + 2^2 + 1 = PC^2$. 故 $\angle PKC = 90°$，$\angle BKC = 135°$. 因此 $\angle APB = 135°$.　10. 因为 $BE \perp AC$，N 为 AB 的中点，则 $EN = AN = \frac{1}{2}AB$，$\angle NEF = \angle EAN$. 同理，$FM = MC = \frac{1}{2}CD$，$\angle EFM = \angle ECM$. 在 $\square ABCD$ 中，$DC \parallel AB$，则 $EN = FM$，$\angle EAN = \angle ECM$. 那么 $\angle EFM = \angle NEF$，则 $NE \parallel FM$，因此 $EMFN$ 是平行四边形.

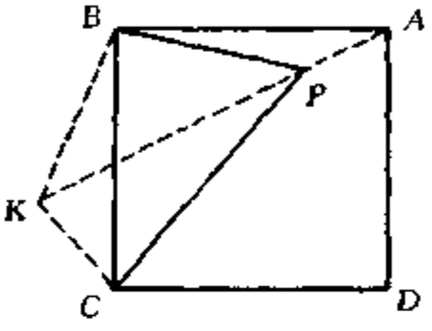


图 18.1

11. 连结 PA、AE，因为 $ABCD$ 是菱形，易知 $\triangle APD \cong \triangle CPD$，那么 $PC = PA$. 连结 AC，易知 $\triangle ACD$ 是等边三角形，则 $AC = 4a$. 这时 $AB = AC = 4a$. 又因 E 是 BC 中点，则 $AE \perp BC$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{(4a)^2 - (2a)^2} = 2\sqrt{3}\,a$. 而 $PE + PC = PE + PA \geqslant AE = 2\sqrt{3}\,a$. 所以 $PE + PC$ 的最小值是 $2\sqrt{3}\,a$. 这时 P 点是 AE 与 BD 的交点.　12. BM 与 CN 的关系是：$BM = CN$ 且 $BM \perp CN$. 因为 $ABCD$ 是正方形，则 $OA = OB$，又 $MN \parallel AB$，则 $OM = ON$，这时 $AM = BN$. 而 $\angle MAB = \angle NBC = 45°$，$AB = BC$，则 $\triangle ABM \cong \triangle BCN$，故 $BM = CN$. 由 $\triangle ABM \cong \triangle BCN$ 得 $\angle BCN = \angle ABM$. 又 $\angle ABM + \angle CBM = 90°$，则 $\angle BCN + \angle CBM = 90°$，即 $BM \perp CN$.

测试题　1. B　2. D　3. A　4. C　5. A　6. 60°　7. 3　8. 120°　9. $\frac{1}{16}$　10. 6　11. 如图 18.2，取 BC 的中点 E，连 EA、EP，过 E 作 $EF \perp PA$ 于 F. 由于 $ABCD$ 是正方形，则 $DQ = BE$，$\angle D = \angle B = 90°$，$AD = AB$，那么 $\triangle ADQ \cong \triangle ABE$，$\angle DAQ = \angle BAE$. 又 $\angle BAP = 2\angle DAQ$，则 $\angle BAE = \angle EAF$. 而 $\angle B = \angle AFE = 90°$，$AE$ 公共，那么 $\triangle ABE \cong \triangle AFE$，$AB = AF$，$BE = FE$. 而 $CE = BE$，则 $CE = FE$. 又 PE 公共，$\angle C = \angle PFE = 90°$，那么 $\triangle PCE \cong \triangle PFE$，$PC = PF$. 因此 AP

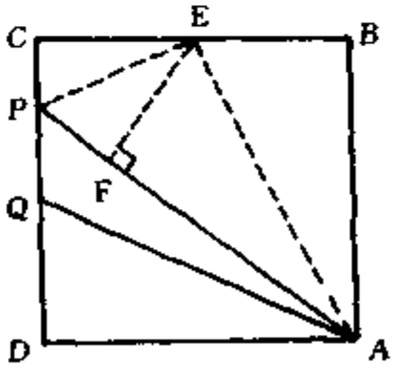


图 18.2

$= CP + CB$. **12.** 如图 18.3，易知 $\angle AD_1A_1 + \angle DD_1C_1 = 90°$，$\angle DD_1C_1 + \angle DC_1D_1 = 90°$，$\angle AD_1A_1 = \angle DC_1D_1$. 而易证 $Rt\triangle AD_1A_1 \cong Rt\triangle CB_1C_1$，$AD_1 = CB_1$，$AA_1 = CC_1$，从而 $DD_1 = BB_1$，$BA_1 = DC_1$. 因为 $A_1D_1 \neq D_1C_1$，则 $\triangle AD_1A_1$ 与 $\triangle DC_1D_1$ 不全等. 因此 $AA_1 \neq DD_1$. 不妨设 $DD_1 > AA_1$. 假设 A_1D_1 与 BD 不平行，则 $\angle AA_1D_1 \neq \angle AD_1A_1$. 不妨设 $\angle AA_1D_1 < \angle AD_1A_1$，则 $AA_1 > AD_1$. 从而易知 $DD_1 > DC_1$，故 $DD_1 - AD_1 > |DC_1 - AA_1|$，即 $DD_1 - CB_1 > |DC_1 - AA_1|$. 作 $D_1E \perp BC$ 于 E，$A_1F \perp DC$ 于 F，连接 A_1C_1、B_1D_1，则 $B_1E = BB_1 - AD_1$，$C_1F = |DC_1 - AA_1|$，$A_1F = D_1E$. 有 $B_1D_1 = \sqrt{D_1E^2 + B_1E^2} > \sqrt{A_1F^2 + C_1F^2} = A_1C_1$. 这与矩形对角线相等矛盾，故 $A_1D_1 // BD$.

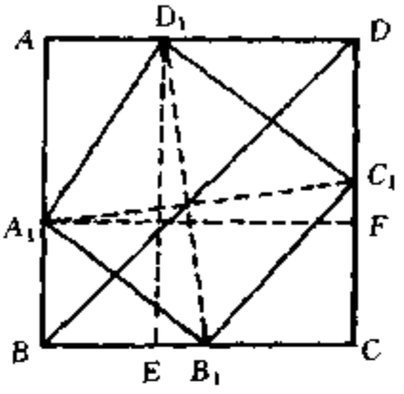


图 18.3

13. (1) 因为 $1 + 2 + 3 + \cdots + 1999 = 1000 \times 1999$，它是 4 的倍数，则可把这 1 999 个数按下列方法分成 4 组，每组和均为 250×1999：(1，2，3，…，250，1 749，1 750，1 751，…，1 998)，(251，252，253，…，500，1 499，1 500，1 501，…，1 748)，(501，502，503，…，750，1 249，1 250，1 251，…，1 498)，(751，752，…，1 000，999，1 001，1 002，…，1 248，1 999). 因此可以组成一个正方形. (2) 将所给线段配成 999 对：(1，1 998)，(2，1 997)，…，(1 000，999)，它们的和均为 1 999. 将每一对线段连接起来，这样就得到 1 000 条长度均为 1 999 的线段，用它们不难构成一个矩形.

第十九讲　梯　　形

练习题 **1.** C　**2.** D　**3.** A　**4.** D　**5.** 4　**6.** 1　**7.** 75°　**8.** 5　**9.** 作 $DE // CA$ 交 BA 的延长线于 E. 由于 $AC \perp BD$，则 $DE \perp BD$. 而 $CDEA$ 是平行四边形，则 $AC = DE$，$CD = AE$. 在 $Rt\triangle BDE$ 中，$BD^2 + DE^2 = BE^2 = (AE + AB)^2 = (AB + DC)^2$，即 $AC^2 + BD^2 = (AB + DC)^2$. **10.** 因为 $AD // BC$，$\angle A = 90°$，$DF \perp BC$，所以四边形 $ABFD$ 为矩形，$AD = BF$. 又因为 $AD = \frac{1}{2}BC$，则 $BF = \frac{1}{2}BC$，$FG = \frac{1}{2}BE$. $S_{梯形ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 3AD \cdot AB = \frac{3}{2}AD \cdot AB$，$S_{\triangle GFC} = \frac{1}{2}FG \cdot FC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}BE \cdot FC = \frac{1}{4}BE \cdot FC$. 又因 E 为中点，则 $BE = \frac{1}{2}AB$. 而 $BF = \frac{1}{2}BC = AD$，则 $FC = \frac{1}{2}BC = AD$，$S_{\triangle GFC} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}AB \cdot AD = \frac{1}{8}AB \cdot AD$. 因此，$S_{梯形ABCD} = \frac{1}{8} \times (4 \times 3)AB \cdot AD = 12S_{\triangle GFC}$. **11.** 过 D 作 $DE \perp BC$，则 $BE = 4$，$EC = 6$，由 $\angle C = 60°$ 知 $CD =$

$2EC=12$，$DE=\sqrt{3}EC=6\sqrt{3}$．由于$BC>8.7$，$DE>8.7$，故这两个方向都不能穿过圆洞．过B作$BF\perp CD$，有$CF=\frac{1}{2}BC=5$，这时有$BF=5\sqrt{3}=\sqrt{75}<\sqrt{75.69}=8.7$，故沿$CD$方向可以通过圆洞．　**12.** 如图19.1，因为$\frac{S_{\triangle MBC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{2}{5}$，$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{梯形}}=\frac{2}{3}$，则$\frac{S_{\triangle MBC}}{S_{梯形}}=\frac{4}{15}>\frac{1}{4}$，故只能$S_{MBCN}:S_{AMND}=3:1$．同法可得$\frac{S_{\triangle AMD}}{S_{梯形}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$，于是，$\frac{CN}{ND}=\frac{S_{\triangle MCN}}{S_{\triangle MDN}}=\frac{\frac{3}{4}S_{梯形}-S_{\triangle MBC}}{\frac{1}{4}S_{梯形}-S_{\triangle MAD}}=\frac{29}{3}$．

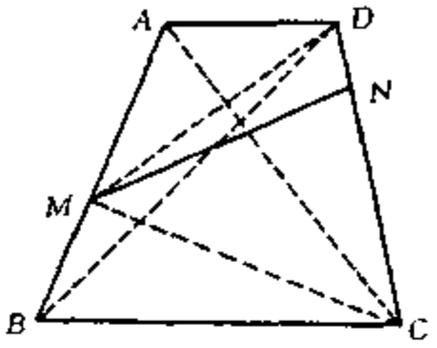


图 19.1

测试题　**1.** B　**2.** D　**3.** A　**4.** C　**5.** C　**6.** 75　**7.** 20　**8.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$　**9.** 13　**10.** 24　**11.** 过E作$EF\parallel AB$，连结ED．因为E为BC中点，$AB\parallel CD$，则F为AD中点．又因$\angle BAD=90°$，则$\angle AFE=90°$，EF为AD的中垂线，那么$AE=DE$，$\angle AEF=\angle DEF$．因为$AB\parallel EF\parallel CD$，则$\angle BAE=\angle AEF$，$\angle DEF=\angle EDC$．又$EC=CD$，则$\angle EDC=\angle DEC$．故$\angle BAE=\angle AEF=\angle DEF=\angle DEC$，所以$\angle AEC=3\angle BAE$，即$n=3$．　**12.** 设$AN=x$，由折叠方法知$NE=AN=x$．令正方形$ABCD$边长为2，那么$NB=2-x$，$BE=1$．在$Rt\triangle BNE$中，$NE^2=NB^2+BE^2$，即$x^2=1^2+(2-x)^2$，$x=\frac{5}{4}$．过$M$作$MF\perp AB$于$F$，易证$\triangle MNF\cong\triangle AEB$，则$MN=AE=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$．令$DM=AF=y$，则$FN=x-y=\frac{5}{4}-y$．在$Rt\triangle MNF$中，$(\sqrt{5})^2=2^2+\left(\frac{5}{4}-y\right)^2$，$y=\frac{1}{4}$．那么$S_1=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\right)\times 2=\frac{3}{2}$，$S_2=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$．因此$\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{5}$．

第二十讲　中位线的应用

练习题　**1.** C　**2.** A　**3.** D　**4.** C　**5.** 54°　**6.** 4　**7.** 5　**8.** 6　**9.** 由于E、N分别是BM、BC的中点，则$EN\parallel\frac{1}{2}CM=MF$，那么$ENFM$是平行四边形．连结$MN$，由于$ABCD$是等腰梯形，则$MN$是梯形的高，且等于

$\sqrt{5^2-3^2}=4$. 这时 $S_{\triangle BMN}=\frac{1}{2}BN\cdot MN=\frac{1}{2}\times 5\times 4=10$. 又 $S_{\triangle MFN}=S_{\triangle MNE}$ $=S_{\triangle BEN}=\frac{1}{2}S_{\triangle BMN}=5$，因此 $MENF$ 的面积是 $10\ \text{cm}^2$. **10.** 过 E 作 $EF\ /\!/\ AD$ 交 CD 于 F，由于 E 是 AB 中点，则 F 是 CD 的中点，且 $EF=\frac{1}{2}CD=DF$，那么 $\angle DEF=\angle EDF$. 又 $\angle DEF=\angle ADE$，则 $\angle ADE=\angle EDF$. 而 $EA\perp AD$，则 E 到 CD 的距离等于 EA. **11.** $AB=CD$ 时，$EFGH$ 是菱形. 证明略. **12.** 如图 20.1，连结 A_2A_5、A_1A_4，设 O 为 A_2A_5 的中点，连结 B_1O，则 $B_1O\ /\!/\!/\ \frac{1}{2}A_1A_5$，即 $B_1O=\frac{a}{2}$. 在四边形 $A_2A_3A_4A_5$ 中，顺次连结四边中点的四边形 $OB_2B_3B_4$ 为平行四边形，连 OB_3，则 OB_3 必过 B_2B_4 的中点 N，且 $B_3N=NO$. 在 $\triangle OB_1B_3$ 中，$MN=\frac{1}{2}OB_1=\frac{a}{4}$.

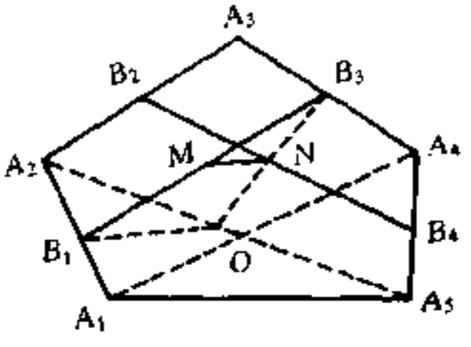


图 20.1

测试题 **1.** B **2.** C **3.** B **4.** A **5.** D **6.** 12 **7.** 2 **8.** 55° **9.** $2\sqrt{2}$ **10.** $3\sqrt{3}a^2$ **11.** 延长 BE 至 G，使 $EG=BE$，连结 GC、GD. 因为 $BM=MC$，$EG=BE$，则 $EM\ /\!/\ GC$，又 $\angle BAD=\angle CAD$，$AD\perp EM$，则 $\triangle AGC$ 为等腰三角形，$AG=AC$，$\triangle AGD\cong\triangle ADC$，$\angle ACD=\angle AGD$. 又因为 $\angle ABC=2\angle ACB=2\angle AGD$，$\angle ABC=\angle AGD+\angle BDG$，则 $\angle AGD=\angle BDG$，所以 $BD=BG=2BE$，故 $BE=\frac{1}{2}BD$. **12.** 连结 EH、HG、GF、FE. 由已知 $EH\ /\!/\!/\ \frac{1}{2}BD$，$FG\ /\!/\!/\ \frac{1}{2}BD$，则 $EH\ /\!/\!/\ FG$，那么 $EHGF$ 是平行四边形. EG 与 HF 是 $\square EHGF$ 的两对角线. 同理可证，$MHNF$ 是平行四边形，MN 和 HF 是两条对角线，故三线 EG、HF、MN 共点于它们的中点. **13.** 延长 CB、DA 交于 F，由已知得 $2EA=ED$，从而 $FA=AE=\frac{1}{2}ED=\frac{1}{4}FD$. 令 $S_1=1$，则 $S_{\triangle FCD}$ $=2S_1=2$. 两次用三角形中位线定理可得 F 到 AB 的距离是 F 到 CD 距离的 $\frac{1}{4}$，于是 $S_{\triangle FAB}=\frac{1}{16}S_{\triangle FCD}=\frac{1}{8}S_1=\frac{1}{8}$，$S_2=S_1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$. 于是 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{8}{7}$.

第二十一讲　比例线段

练习题 **1.** B **2.** D **3.** B **4.** A **5.** B **6.** 1 **7.** $\frac{15}{4}$ **8.** $\frac{ab}{a+b}$ **9.** 11 **10.** 令 $\frac{x}{y+z+t}=\frac{y}{z+t+x}=\frac{z}{t+x+y}=\frac{t}{x+y+z}=$

k. 那么 $x=k(y+z+t)$，$y=k(z+t+x)$，$z=k(t+x+y)$，$t=k(x+y+z)$. 把它们相加得：$x+y+z+t=3k(x+y+z+t)$. 若 $x+y+z+t=0$，则 $k=-1$，这时 $f=-4$ 是整数. 若 $x+y+z+t\neq 0$，则 $k=\frac{1}{3}$. 这时有：$\begin{cases}y+z+t=3x,\\ z+t+x=3y,\\ t+x+y=3z,\\ x+y+z=3t,\end{cases}$ 解得 $x=y=z=t$，这时 $f=4$ 是整数. 因此 $f=4$ 或 -4. **11.** 连结 DE. 因为 $\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$，$\frac{AE}{AB}=\frac{1}{3}$，所以 $\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}$，则 $DE\ //\ BC$. 因此 $\frac{OD}{OB}=\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{3}$. 而 $EF=AF-AE=\frac{1}{2}AB-\frac{1}{3}AB=\frac{1}{6}AB$，$BF=\frac{1}{2}AB$，则 $\frac{EF}{BF}=\frac{1}{3}$，故 $\frac{EF}{BF}=\frac{OD}{OB}$，所以，$OF\ //\ BC$. **12.** 过 H 作 $HS\ //\ BN$ 交 AD 于 S，连结 SE 并延长交 BC 于 T，连结 HT. 因为 $ND\ //\ EG\ //\ BC$，则 $\frac{DG}{GC}=\frac{EN}{BE}=\frac{SE}{ET}$，所以 $\frac{SE}{ET}=\frac{DG}{GC}$，则 $ST\ //\ DC$，故 $EGCT$ 是平行四边形，$EG=TC$. 又因为 $\frac{AH}{BH}=\frac{AS}{SN}$，$\frac{AS}{TM}=\frac{AE}{EM}=\frac{EN}{BE}=\frac{SN}{BT}$，即 $\frac{AH}{BH}=\frac{TM}{TB}$，则 $HT\ //\ AM$，那么，$FHTC$ 是平行四边形，$FH=TC$. 所以 $EG=FH$.

测试题 **1.** A **2.** C **3.** B **4.** C **5.** B **6.** $\frac{9}{4}$ **7.** $\frac{16}{3}$ **8.** 10 **9.** $\frac{23}{12}$ **10.** $\frac{12}{13}$ **11.** 有下列4种情况：$d:4=6:2$，$4:d=6:2$，$4:6=d:2$，$4:6=2:d$，分别解得 $d=12$，$\frac{4}{3}$；$\frac{4}{3}$，3. 因此当 $d=12$ 或 $\frac{4}{3}$ 或3时，它们能构成比例式. **12.** 设 $AI=x$，$IF=y$，$FB=z$. 由 $DE\ //\ AB$，$FG\ //\ BC$，$IH\ //\ AC$ 和 $AIPD$ 与 $FBEP$ 均为平行四边形，得 $DP=IA=x$，$PE=FB=z$，从而 $DE=FG=HI=x+z$. 又由 $FG\ //\ BC$，$HI\ //\ CA$ 得，$\frac{FG}{BC}=\frac{AF}{AB}$，$\frac{HI}{CA}=\frac{BI}{AB}$，即 $\frac{x+z}{8}=\frac{x+y}{12}$，则 $\frac{x+z}{8}=\frac{x+y}{12}=\frac{x+12}{20}$，$\frac{x+z}{6}=\frac{y+z}{12}=\frac{x+12}{18}$，故有 $\begin{cases}3x+5z=24,\\ 3x+2z=12.\end{cases}$ 又 $x+y+z=12$，解得 $x=\frac{4}{3}=\frac{12}{9}$，$y=\frac{60}{9}$，$z=4=\frac{36}{9}$，于是 $AI:IF:FB=12:60:36=1:5:3$. **13.** 由 $BD\ //\ l$，则有 $\frac{PM}{BO}=\frac{AP}{AO}$，$\frac{PN}{OD}=\frac{PC}{OC}$，$\frac{PR}{OB}=\frac{PC}{OC}$，$\frac{PS}{OD}=\frac{AP}{AO}$. 因此 $\frac{PM\cdot PN}{OB\cdot OD}=\frac{AP\cdot PC}{AO\cdot OC}$，$\frac{PR\cdot PS}{OB\cdot OD}=\frac{AP\cdot PC}{AO\cdot OC}$，故有 $PM\cdot PN=PR\cdot PS$.

第二十二讲　相似三角形

练习题　1. B　2. A　3. C　4. A　5. 5∶1　6. 72　7. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　8. $\frac{15}{16}\sqrt{7}$　9. 因为 $EF \parallel BC$，则 $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$，$\frac{BC}{EF}=\frac{AD}{AM}$，即 $\frac{10a+b}{c}=\frac{d}{d-c}$，而 $b=a+1$，$c=a+2$，$d=a+3$. 因此，$a^2-6a+5=0$，$(a-5)(a-1)=0$，$a=5$ 或 1. 当 $a=5$ 时，$BC=56$，$EF=7$，$AD=8$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\times AD=\frac{1}{2}\times 56\times 8=224$. 当 $a=1$ 时，$BC=12$，$EF=3$，$AD=4$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 12\times 4=24$.　10. (1) 由已知易证 $\mathrm{Rt}\triangle ABC \backsim \mathrm{Rt}\triangle ACD$，而 $\angle DAF=\angle CAE$，则 $\mathrm{Rt}\triangle ACE \backsim \mathrm{Rt}\triangle ADF$，故有 $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}=\frac{AE}{AF}$，即 $\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AC}$. (2) 因为 $FM \parallel AB$，所以 $\frac{AE}{AF}=\frac{BE}{BM}$. 又因为 AE 是 $\angle BAC$ 的平分线，则 $\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CE}$. 由 (1) 知，$\frac{BE}{BM}=\frac{BE}{CE}$，所以 $BM=CE$，因此 $CM=EB$.　11. 作 $BB' \perp AC$，$CC' \perp AB$，$DD' \perp AC$，垂足分别为 B'、C'、D'. 易见 $\triangle BOB' \backsim \triangle DOD'$，则有 $\frac{BO}{OD}=\frac{BB'}{DD'}$. 因 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CC'=\frac{1}{2}AC\cdot BB'$，得 $\frac{BB'}{CC'}=\frac{AB}{AC}$. 又已知 $\triangle ABC$ 中，有 $\angle BAC+\angle ABC+\angle BCA=180°$，可得 $\angle CAD=\angle ABC$. 从而可得 $\mathrm{Rt}\triangle BCC' \backsim \mathrm{Rt}\triangle ADD'$，则有 $\frac{BC}{AD}=\frac{CC'}{DD'}$. 所以 $\frac{BO}{OD}=\frac{BB'}{DD'}=\frac{BB'}{CC'}\cdot\frac{CC'}{DD'}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{AD}$，即 $\frac{7}{6}=\frac{5}{4}\cdot\frac{BC}{3}$，$BC=\frac{14}{5}$.　12. 因为 $\angle 2=\angle 3$，所以 $DE \parallel CA$，$\triangle BED \backsim \triangle BAC$. 又因为 $BD=6$，$DC=2$，那么 $\frac{m_1}{m}=\frac{BD}{BC}=\frac{3}{4}$. 而 $\angle C=\angle C$，$\angle 2=\angle 1$，则 $\triangle CAD \backsim \triangle CBA$，$\frac{AC}{CD}=\frac{CB}{AC}$，故 $AC^2=CD\cdot CB=2\times 8=16$，$AC=4$，$\frac{m_2}{m}=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$. 因此，$\frac{m_1+m_2}{m}=\frac{5}{4}$.

测试题　1. C　2. B　3. C　4. A　5. D　6. $\frac{4}{3}\sqrt{15}$　7. $2\sqrt{S_1S_2}$　8. $2\sqrt{3}$　9. 9∶16　10. $\frac{9}{5}$　11. 如图 22.1，在 BC 上取 D，使 $DC=AC=n$，易得 $\triangle DBA \backsim \triangle ABC$，则 $(m-n):n=n:m$，即 $n^2=m(m-n)$，$m^2=n(m+n)$，$\frac{m+n}{m-n}=\frac{m^3}{n^3}$. 又 $\frac{(m+n)^2}{mn}=\frac{[(m+n)n]^2}{mn^3}=\frac{m^4}{mn^3}=\frac{m^3}{n^3}$. 因此 $x=$

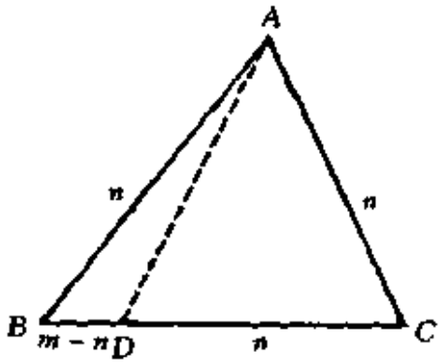


图 22.1

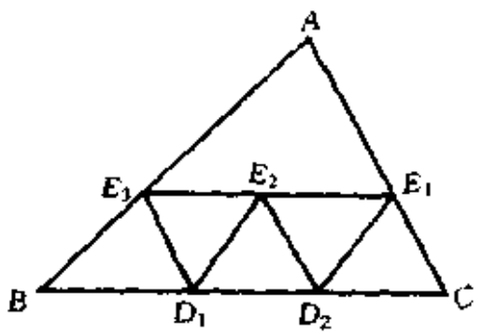


图 22.2

$y=z$. **12.** 过 A 作 BC 边的平行线交射线 BM、CN 于 B'、C'，则 $\triangle PB'C' \backsim \triangle PBC$，且有 $\frac{AN}{NB}=\frac{AC'}{BC}$，$\frac{AM}{MC}=\frac{AB'}{BC}$，相加得 $\frac{AN}{NB}+\frac{AM}{MC}=\frac{B'C'}{BC}$. 由于 $BC \parallel DE \parallel B'C'$，且 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，则 $\triangle PB'C'$ 与 $\triangle PBC$ 有一组对应高相等，从而 $\triangle PB'C' \cong \triangle PBC$，$B'C'=BC$. 所以 $\frac{AN}{NB}+\frac{AM}{MC}=1$. **13.** 如图 22.2，$D_1$、$D_2$ 是 BC 的三等分点，$CE_1=\frac{1}{3}CA$，$BE_3=\frac{1}{3}BA$，$D_1E_3 \parallel D_2E_2 \parallel CA$，$D_2E_1 \parallel D_1E_2 \parallel BA$. 易知图中 6 个三角形：$\triangle AE_3E_1$、$\triangle E_1D_2C$、$\triangle D_2E_1E_2$、$\triangle E_2D_1D_2$、$\triangle D_1E_2E_3$、$\triangle E_3BD_1$ 均与 $\triangle ABC$ 相似.

第二十三讲　平移、对称和旋转

练习题 **1.** 因为 $\triangle ABC$ 是 Rt$\triangle$，$\angle ABC=66°$，则 $\angle A=24°$. 又 $\triangle ABC$ 以 C 为中心旋转到 $\triangle A'B'C'$，所以 $\angle ACD=\angle ABA'=\angle BCB'$，而 $CB=CB'$，则 $\angle B'=\angle CBB'=66°$. 故 $\angle B'CB=180°-66°\times 2=48°$，$\angle ACD=48°$，因此 $\angle BDC=48°+24°=72°$. **2.** 作线段 CB_1，使 $CB_1 \parallel AB$，则四边形 ABB_1C 是平行四边形，那么 $AC=BB_1$. 由 $BB_1+BD \geqslant B_1D$，所以 $AC+BD \geqslant B_1D$. 又 $\triangle CB_1D$ 是等边三角形，则 $B_1D=1$. 所以 $AC+BD \geqslant 1$. **3.** 取 O 关于 AC 的对称点 D，连结 AD、BD、CD、OD. 由于 $\angle ACO=30°$，则 $\triangle ODC$ 为正三角形. 又因为 $\angle BOC=150°$，$\angle BOD=360°-150°-60°=150°$，故 D、C 关于 BO 对称，那么 $\angle BDC=\angle BCD=80°=\angle BAC$，这时 $\angle OAC=\angle DAC=\angle DBC=20°$. **4.** 以 D 为中心，将 $\triangle ADK$ 旋转至 $\triangle CDK'$，K' 在 BC 延长线上，这时 $DK=DK'$，$\angle KDK'=\angle ADC=45°$，而 $KN=K'N$，又 DN 为公共边，那么，$\triangle KDN \cong \triangle NDK'$，故 $\angle KDN=\frac{1}{2}\angle KDK'=22.5°$. **5.** 延长 CF 与 AB 交于 C'，延长 AC、BE 相交于 B'. 因为 $BE \perp AE$，$CF \perp AE$，AE 平分 $\angle BAC$，所以 B 与 B'，C 与 C' 关于 AE 对称. 因此 $BC'=B'C$，$CF=C'F$，$BE=B'E$. 又

因为 $BM = CM$，所以 $MF = \frac{1}{2}BC'$，$ME = \frac{1}{2}B'C$. 所以 $ME = MF$. 6. 将 $\triangle PBC$ 绕 B 点旋转 90° 至 $\triangle P'BA$ 位置，连结 PP'. 令 $PA = 1$，则 $PB = 2$，$PC = 3$，那么 $P'B = PB = 2$，$\angle PBP' = 90°$，所以 $\angle BPP' = 45°$，$PP' = 2\sqrt{2}$. 又因为 $PA = 1$，$AP' = CP = 3$，所以 $AP'^2 = PA^2 + PP'^2$，$\angle APP' = 90°$，因此 $\angle APB = 45° + 90° = 135°$. 7. 因为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle CDE$ 都是等边三角形，其内角都为 60°，所以可将线段 BE 绕 C 逆时针方向旋转 60°，这时点 B 落在点 A，点 E 落在 D. 因而点 N 落在点 M，这表明 $CN = CM$，$\angle NCM = 60°$，所以 $\triangle CMN$ 是等边三角形. 8. 以 B 为中心，将 $\triangle BOA$ 逆时针方向旋转 60°，则点 A 落在点 C，点 O 落在点 D. 连结 OD、CD，因为 $\triangle BOD$ 是等边三角形，所以 $OD = OB$. 又 $CD = OA$，所以 $\triangle COD$ 是以 OA、OB、OC 为边构成的三角形. 由于 $\angle BOC = 125°$，$\angle BOD = 60°$，所以 $\angle COD = 65°$. 又因为 $\angle BDC = \angle AOB = 115°$，而 $\angle ODB = 60°$，所以 $\angle ODC = 55°$，从而 $\angle OCD = 180° - 65° - 55° = 60°$. 所以求得以线段 OA、OB、OC 为边构成的三角形的各角为 65°、55° 及 60°.

测试题 1. 如图 23.1，过 M 作 DA 的平行线 MN，且使 $MN = DA$，即把 DA、CB 作平行移动. 在四边形 $MANB$ 中，易证 $AN = DM$，$BN = MC$，$MN = BC$，$MN \perp AB$，即四边形 $MANB$ 即为所求. 2. 将 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 绕 A 点顺时针旋转 90° 至 $\mathrm{Rt}\triangle ABF'$ 位置，由于 $\angle ABF'$ 与 $\angle ABE$ 均为直角，所以 E、B、F' 三点共线. 又因为 $BE + DF = EF$，则 $EF' = EF$、$AF = AF'$，那么 $\triangle AEF \cong \triangle AEF'$，故 $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle FAF' = 45°$. 3. 取 BC 中点 G，连结 CF、GF，FG 和 CE 交于 H，那么 E、C 关于 FG 对称，$AB \parallel FG$，四边形 $FGCD$ 为菱形，则 $\angle AEF = \angle EFG = \angle CFG = \angle CFD$，所以 $\angle AEF = \frac{1}{3}\angle EFD$，故 $n = 3$. 4. 作 B 关于 AC 的对称点 B'，连结 AB'，则 N 关于 AC 的对称点在 AB' 上的 N' 点. 这时，B 到 M 到 N 的最小值等于 $B \to M \to N'$ 的最小值，等于 B 到 AB' 的距离 BH'，即 $BM + MN$ 的最小值为 BH'. 连接 B 与 AB' 和 DC 的交点 P，则

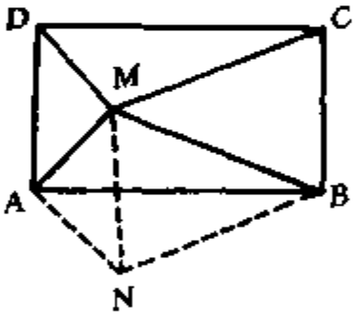


图 23.1

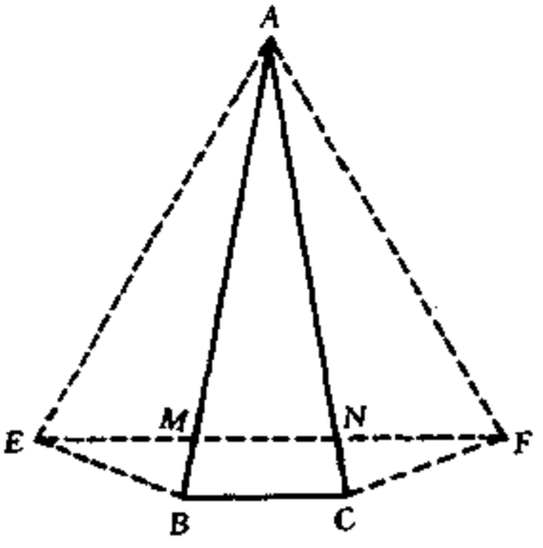


图 23.2

$\triangle ABP$ 的面积等于 $\frac{1}{2}\times 20\times 10=100\text{cm}^2$. 注意到 $PA=PC$（因为 $\angle PAC\overset{\text{对称}}{=\!=}\angle BAC\overset{\text{内错角}}{=\!=}\angle PCA$）. 设 $AP=x$，则 $PC=x$，$DP=20-x$，所以，$x^2=(20-x)^2+10^2$，$x=12.5$，故 $BH'=\frac{100\times 2}{12.5}=16\text{cm}$. 因此，$BM+MN$ 的最小值是16 cm. **5.** 如图 23.2，设 E 为 C 关于 AB 的对称点，F 为 B 关于 AC 的对称点，EF 分别交 AB、AC 于 M、N. 有 $\triangle EBM\backsim\triangle ABE$，可知 $BE^2=BM\cdot BA$，从而 $BM=\frac{b^2}{a}$，故有 $AM=AB-BM=\frac{a^2-b^2}{a}$. 由 $MN\parallel BC$ 得 $MN=\frac{AM\cdot BC}{AB}=\frac{b(a^2-b^2)}{a^2}$，则 $a=EF=EM+MN+NF=b+\frac{b(a^2-b^2)}{a^2}+b$，$a^3+b^3=3a^2b$.

第二十四讲　同　　余

练习题　1. 由 $a\equiv 2(\text{mod }7)\Rightarrow a^2\equiv 4(\text{mod }7)$，$b\equiv 5(\text{mod }7)\Rightarrow 4b\equiv 20\equiv 6(\text{mod }7)$ 得　$a^2+4b\equiv 10\equiv 3(\text{mod }7)$，$a^2-4b\equiv -2\equiv 5(\text{mod }7)$. 故 a^2+4b 和 a^2-4b 被 7 除的余数分别是 3 和 5.　**2.** 由 $2^6\equiv 64\equiv -1(\text{mod }13)$，得 $2^{1000}\equiv (2^6)^{166}\times 2^4\equiv (-1)^{166}\times 16\equiv 16\equiv 3(\text{mod }13)$，故 2^{1000} 除以 13 的余数是 3.　**3.** 因 $777\equiv 7(\text{mod }10)$ 及 $7^2\equiv 49\equiv -1(\text{mod }10)$，故 $777^{777}\equiv 7^{777}\equiv (7^2)^{388}\times 7\equiv (-1)^{388}\times 7\equiv 7(\text{mod }10)$，从而 777^{777} 的个位数字是 7.　**4.** 由 $2\,222=7\times 317+3\Rightarrow 2\,222\equiv 3(\text{mod }7)$，$3^3\equiv 27\equiv -1(\text{mod }7)$，得　$2\,222^{5\,555}\equiv 3^{5\,555}\equiv (3^3)^{1\,851}\times 3^2\equiv (-1)^{1\,851}\times 9\equiv (-9)\equiv -2(\text{mod }7)$　①. 又 $5\,555=7\times 793+4\Rightarrow 5\,555\equiv 4(\text{mod }7)$，$4^3\equiv 64\equiv 1(\text{mod }7)$，故 $5\,555^{2\,222}\equiv 4^{2\,222}\equiv (4^3)^{740}\times 4^2\equiv 1^{740}\times 16\equiv 16\equiv 2(\text{mod }7)$　②. 由 ① + ② 可知命题得证.　**5.** 由 $2\equiv -1(\text{mod }3)$，得 $2^n\equiv (-1)^n(\text{mod }3)$，即 $2^n+1\equiv (-1)^n+1(\text{mod }3)$，当 n 为奇数时，有 $2^n+1\equiv -1+1\equiv 0(\text{mod }3)$；当 n 为偶数时，有 $2^n+1\equiv 1+1\equiv 2(\text{mod }3)$. 故当 n 为一切奇数时，$3\mid(2^n+1)$.　**6.** 设所求数为 $10x+7$　（x 为正整数），则有 $7\times 10^n+x=5(10x+7)$，于是 $x=\frac{1}{7}(10^n-5)$，从而 $7\mid(10^n-5)$，即 $10^n\equiv 5(\text{mod }7)$，因为 $10\equiv 3(\text{mod }7)$，$10^2\equiv 3^2\equiv 9\equiv 2(\text{mod }7)$，$10^3\equiv 10\times 10^2\equiv 3\times 2\equiv 6(\text{mod }7)$，$10^4\equiv (10^2)^2\equiv 2^2\equiv 4(\text{mod }7)$，$10^5\equiv 10\times 10^4\equiv 3\times 4\equiv 12\equiv 5(\text{mod }7)$，所以满足要求的正整数 n 的最小值是 5，这时，$x=\frac{10^5-5}{7}=14\,285$，故所求正整数为 142 857.　**7.** 若 $8n+7$ 是三个整数的平方和，即存在三个整数 a、b、c 使得　$8n+7=a^2+b^2+c^2$　①. 当 a 为奇数时，$a^2\equiv 1(\text{mod }8)$；当 a 为偶数时，$a^2\equiv 0$ 或 $4(\text{mod }8)$. 对于任意整数 a、b、c 必有　$a^2+b^2+c^2\equiv 0,1,2,3,4,5,6(\text{mod }8)$. 但　$8n+7\equiv 7(\text{mod }8)$，则有　$8n+$

$7 \not\equiv a^2+b^2+c^2 \pmod 8$ ②. 即 ①与②矛盾，故 $8n+7 \neq a^2+b^2+c^2$. **8.** 设 $A=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_1\cdot 10+a_0$. 因 $10^k\equiv 1 \pmod 9$，$k=0,1,2,\cdots,n$. 则 $A\equiv a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0 \pmod 9$，因为 $9\mid A\Leftrightarrow A\equiv 0 \pmod 9$，所以 $9\mid A\Leftrightarrow a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0\equiv 0 \pmod 9\Leftrightarrow 9\mid a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$. **9.** 由 $2^{12}=4\,096\equiv -4 \pmod{100}$，得 $2^{999}=(2^{12})^{83}\cdot 2^3\equiv(-4)^{83}\cdot 2^3 \pmod{100}$，又 $4^6=2^{12}=4\,096\equiv -4 \pmod{100}$，则 $4^{83}=(4^6)^{13}\cdot 4^5\equiv(-4)^{13}\cdot 4^5\equiv -4^{18}\equiv -(4^6)^3\equiv 4^3\equiv 64 \pmod{100}$，$2^{999}=-64\cdot 2^3=-2^9\equiv -512\equiv 88 \pmod{100}$. 故 2^{999} 的最后两位数字是 88. **10.** 因 $47\equiv 5 \pmod 7$，则 $47^2\equiv 25\equiv 4 \pmod 7$，$47^3\equiv 5\times 4=20\equiv 6 \pmod 7$，$47^6\equiv 6^2\equiv 36\equiv 1 \pmod 7$，又 $37\equiv 1 \pmod 6$，则 $37^{37}\equiv 1^{37}=1 \pmod 6$，$37^{37}=6k+1$（$k$ 为整数），$47^{37^{37}}=47^{6k+1}=(47^6)^k\cdot 47\equiv 1^k\cdot 5=5 \pmod 7$，故 $47^{37^{37}}$ 除以 7 余 5. **11.** 因 $10^4\equiv 0 \pmod{10}$，$1^4\equiv 1 \pmod{10}$，$2^4\equiv 6 \pmod{10}$，$3^4\equiv 1 \pmod{10}$，$4^4\equiv 6 \pmod{10}$，$5^4\equiv 5 \pmod{10}$，$6^4\equiv 6 \pmod{10}$，$7^4\equiv 1 \pmod{10}$，$8^4\equiv 6 \pmod{10}$，$9^4\equiv 1 \pmod{10}$，则 $1^4+2^4+3^4+\cdots+1\,990^4+1\,991^4\equiv 199\times(1^4+2^4+\cdots+9^4)+1^4\equiv 199\times(1+6+1+6+5+6+1+6+1)+1\equiv 199\times 33+1\equiv 9\times 3+1\equiv 7+1\equiv 8 \pmod{10}$，故 $1^4+2^4+3^4+\cdots+1\,991^4$ 的个位数字是 8. **12.** 设 $S(A)$ 表示 A 的各位数字之和，$S(B)$ 表示 B 的各位数字之和，由题意可知 $S(A)=S(B)$. 因 $A\equiv S(A) \pmod 9$，$B\equiv S(B) \pmod 9$. 则 $A-B\equiv S(A)-S(B)\equiv 0 \pmod 9\Rightarrow 9\mid A-B$，即 $A-B$ 是 9 的倍数.

测试题 **1.** C **2.** B **3.** A **4.** $m\mid 90-69$，$m\mid 125-90$，$m\mid 125-69$，即 $m\mid 21$，$m\mid 35$，$m\mid 56$，则 m 是 21，35，56 的公约数，即有 $m=7$. **5.** 由 $1\,990\equiv 2 \pmod 7$ 及 $2^3\equiv 8\equiv 1 \pmod 7$，得 $1\,990^{1\,990}\equiv 2^{1\,990}\equiv(2^3)^{663}\times 2\equiv 1^{663}\times 2\equiv 2 \pmod 7$，故所求个位数字是 2. **6.** 因 $N-(4a_2+2a_1+a_0)=10^3\overline{a_na_{n-1}\cdots a_4a_3}+\overline{a_2a_1a_0}-(4a_2+2a_1+a_0)=10^3\overline{a_na_{n-1}\cdots a_4a_3}+(96a_2+8a_1)=8(125\cdot\overline{a_n\cdot a_{n-1}\cdots a_4a_3}+12a_2+a_1)$，则 $8\mid[N-(4a_2+2a_1+a_0)]$，即 $N\equiv 4a_2+2a_1+a_0 \pmod 8$，又 $4a_2+2a_1+a_0\equiv 0 \pmod 8$，则 $N\equiv 0 \pmod 8$，故 $8\mid N$. **7.** 设 N 的末三位数为 M，则 $N\equiv M \pmod{1\,000}$，而 $1\,000=125\times 8$，且 $(125,8)=1$，N 中含有 5 和 25 这两个因数，则 $125\mid N$，$125\mid M$，令 $M=125q$，又 M 是三位数，则 $1\leqslant q<8$，$N=(1\times 3\times 5\times 7)\times(9\times 11\times 13\times 15)\times\cdots\times(1\,993\times 1\,995\times 1\,997\times 1\,999)$，显然，此式每个小括号内的数都是形如 $(8k+1)(8k+3)(8k+5)(8k+7)$（k 为非负数），则 $8k+1\equiv 1 \pmod 8$，$8k+3\equiv 3 \pmod 8$，$8k+5\equiv 5 \pmod 8$，$8k+7\equiv 7 \pmod 8$，则 $(8k+1)(8k+3)(8k+5)(8k+7)\equiv 1\times 3\times 5\times 7 \pmod 8$. 而 $1\times 3\times 5\times 7\equiv 1 \pmod 8$，则 $N\equiv 1 \pmod 8$，$M\equiv 1 \pmod 8$，即 $125q\equiv 1 \pmod 8$，将 $q=1,2,\cdots,7$ 代入上式，只有当 $q=5$ 时才满足，故 $M=125\times 5=625$. **8.** 判定一个整数的奇偶性可

以取模数 2，若余 0 则为偶数，若余 1 则为奇数，此外模 2 还有些有趣的性质，如 $-a \equiv a \pmod 2$，$|a| \equiv a \pmod 2$，用此性质可大大简化问题求解．因 $b_1 + b_2 + \cdots + b_{27} = |a_1 - a_2 + a_3| + |a_4 - a_5 + a_6| + \cdots + |a_{79} - a_{80} + a_{81}| \equiv a_1 - a_2 + a_3 + a_4 - a_5 + a_6 + \cdots + a_{79} - a_{80} + a_{81} \equiv a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{79} + a_{80} + a_{81} \pmod 2$．因此将 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{81}$ 转化为 $b_1 + b_2 + \cdots + b_{27}$，并不改变奇偶性，并经过多次“运算”依然如此，故 $x \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_{81} \pmod 2$，即 $x \equiv 1 + 2 + 3 + \cdots + 81 = 81 \times 41 \equiv 1 \pmod 2$，故 x 为奇数．

第二十五讲　梅涅劳斯定理与塞瓦定理

练习题　1. 如图 25.1，显然 $AE = AF$．设 $AC = a$，$CF = b$，则 $AE = a + b$，考虑 $\triangle ABC$ 的截线 EDF，由梅涅劳斯定理得 $\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BE}{EA} = 1$．又 $CD = DB$，则上式变为 $\frac{a+b}{b} \cdot \frac{BE}{a+b} = 1$，得　$BE = b = CF$．所以 $\frac{1}{2}(AB - AC)$

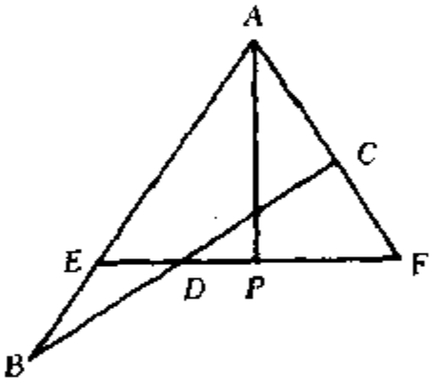


图 25.1

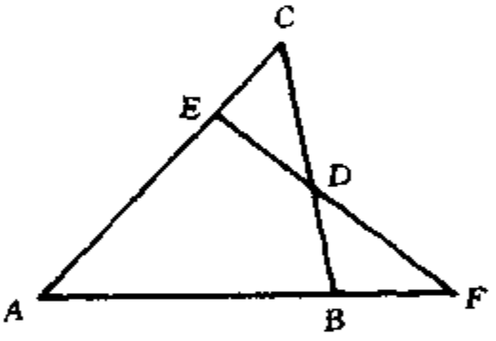


图 25.2

$= \frac{1}{2}(AE + EB - AC) = \frac{1}{2}(a + b + b - a) = b = CF$．　2. 如图 25.2 视直线 EDF 为 $\triangle ABC$ 的截线，由梅氏定理得　$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$．又 $CD = DB$，得 $\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{BF}$．3. 设 AX、BY、CZ 是外角平分线，则 $\frac{Bx}{XC} \cdot \frac{Cy}{YA} \cdot \frac{Az}{ZB} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1$，即 x、y、z 三点共线．　4. 如图 25.3 过点 A 引 OA 的垂线，交 Ox 于点 M，交 Oy 于点 N，显然有 $AM = AN$，$OM = ON$，把 Ox 视为 $\triangle ANQ$ 的截线，则有 $\frac{NO}{OQ} \cdot \frac{QP}{PA} \cdot \frac{AM}{MN} = 1$，因为 $MN = 2AM$，则有 $\frac{NO}{OQ} = \frac{2PA}{QP}$　①．同样，若视 Oy 为 $\triangle AMP$ 的截线则有　$\frac{MO}{OP} = \frac{2QA}{QP}$　②．① + ② 可得　$\frac{NO}{OQ} + \frac{MO}{OP} = \frac{2PA}{QP} + \frac{2QA}{QP} = 2$．因此 $\frac{1}{OP} + \frac{1}{OQ} = \frac{2}{OM}$ 为定值．　5. 如图 25.4 设 AD，BE，CF 是 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上的高．因 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，则 D、E、F 分别在

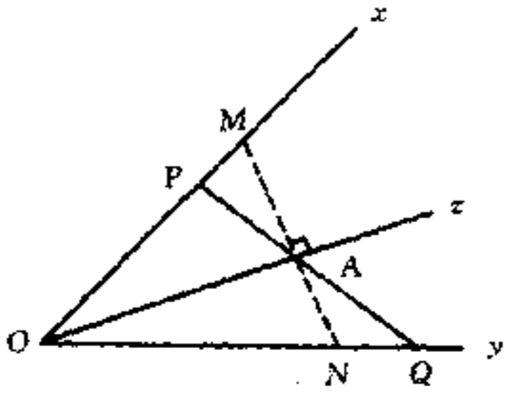


图 25.3

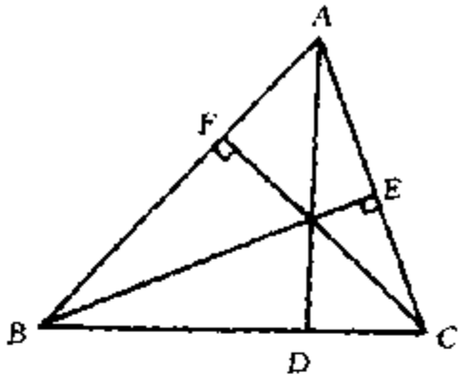


图 25.4

边 BC，CA，AB 上．因 $\angle EBC+\angle BCE=90°$，$\angle DAC+\angle BCE=90°$，则 $\angle EBC=\angle DAC$，于是 $\triangle EBC\backsim\triangle DAC$，$\frac{CE}{DC}=\frac{BC}{CA}$．同理 $\frac{AF}{EA}=\frac{CA}{AB}$，$\frac{BD}{FB}=\frac{AB}{BC}$．三式相乘得 $\frac{CE}{DC}\cdot\frac{AF}{EA}\cdot\frac{BD}{FB}=\frac{BC}{CA}\cdot\frac{CA}{AB}\cdot\frac{AB}{BC}=1$．即 $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$．　**6.** 如图 25.5 设 AA_1、BB_1、CC_1 交边 BC，CA，AB 的交点分别记为 A_2，B_2，C_2．$\frac{BA_2}{A_2C}=\frac{S_{\triangle ABA_1}}{S_{\triangle ACA_1}}=\frac{AB\cdot BA_1\cdot\sin(\angle ABC+\alpha)}{CA\cdot CA_1\cdot\sin(\angle ACB+\alpha)}=\frac{AB\cdot\sin(\angle ABC+\alpha)}{CA\cdot\sin(\angle ACB+\alpha)}$．

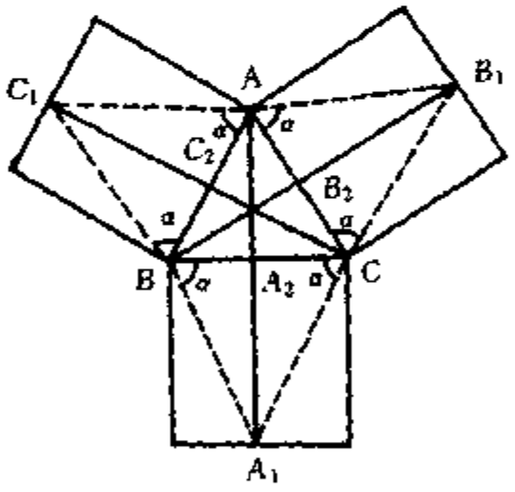


图 25.5

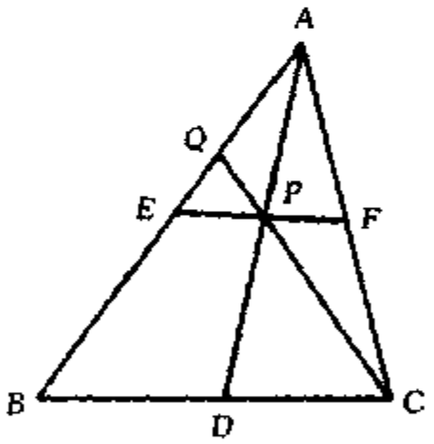


图 25.6

同理 $\frac{CB_2}{B_2A}=\frac{BC}{AB}\cdot\frac{\sin(\angle ACB+\alpha)}{\sin(\angle BAC+\alpha)}$，$\frac{AC_2}{C_2B}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{\sin(\angle BAC+\alpha)}{\sin(\angle ABC+\alpha)}$．三式相乘，得 $\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}\cdot\frac{AC_2}{C_2B}=1$．因此，$AA_1$，$BB_1$，$CC_1$ 交于一点．　**7.** 如图 25.6 将 CPQ 看成是 $\triangle ABD$ 的截线，于是有 $\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DP}{PA}=1$．又 $BC=2CD$，且易知 $AP=PD$，从而 $\frac{AQ}{QB}=\frac{1}{2}$．因此 $3AQ=AB$．　**8.** 如图 25.7 由 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$，$\frac{CE}{EA}=\frac{BC}{BA}$，$\frac{AF}{FB}=\frac{AC}{BC}$．得 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$．由梅氏逆定理可知 D、E、F 三点共线．　**9.**

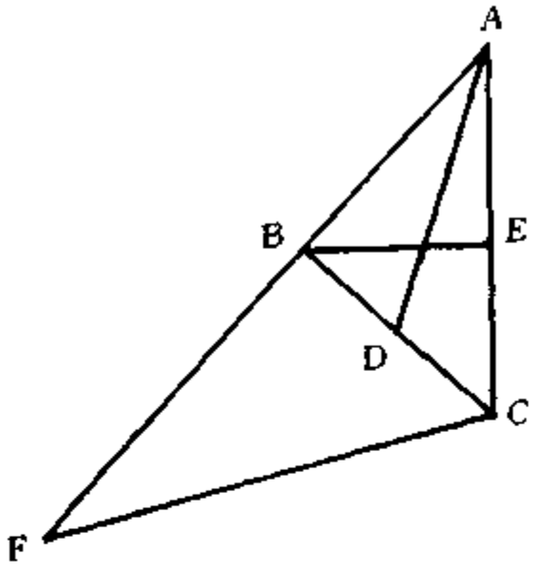


图 25.7

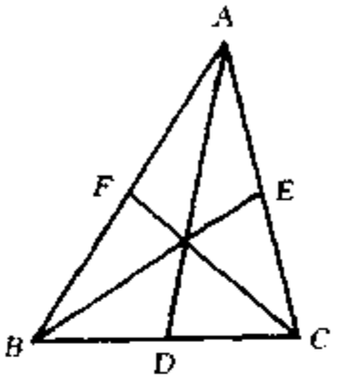


图 25.8

如图 25.8 设 AD、BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的三条角平分线，则有 $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$，$\frac{CE}{EA}=\frac{BC}{AB}$，$\frac{AF}{FB}=\frac{AC}{BC}$，三式相乘得 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$. 故 AD，BE，CF 交于一点. **10.** 如图 25.9 已知：在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，直线 AA'，BB'，CC' 交于一点 O，又知直线 AC 与 $A'C'$ 交于 P，直线 BC 与 $B'C'$ 交于 R，直线 AB 与 $A'B'$ 相交于 Q. 求证：P、Q、R 共线. 证明：视直线 $A'B'Q$ 为 $\triangle OAB$ 的截线，则有 $\frac{OA'}{A'A}\cdot\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BB'}{B'O}=1$. 同理 $\frac{OB'}{B'B}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CC'}{C'O}=1$，$\frac{OC'}{C'C}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AA'}{A'O}=1$. 三式相乘得 $\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CP}{PA}=1$. 即 P、Q、R 分别在 $\triangle ABC$ 三边所在的直线上，由梅氏逆定理可得 P、Q、R 三点共线.

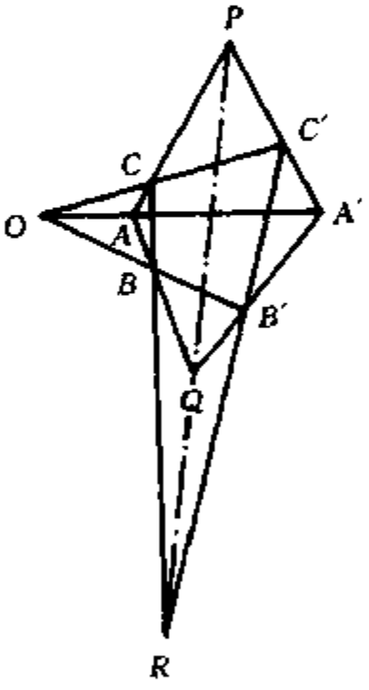


图 25.9

测试题 **1.** C. **2.** B. **3.** C. **4.** $\frac{1}{6}$. **5.** 共点. **6.** 如图 25.10 把直线 BFE 视为 $\triangle ACD$ 的截线，可有 $\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DF}{FA}\cdot\frac{AE}{EC}=1$. 结合已知条件得 $\frac{m+1}{m}\cdot\frac{DF}{FA}\cdot\frac{1}{n}=1$. 则 $\frac{DF}{FA}=\frac{mn}{m+1}$，$\frac{AF}{AD}=\frac{m+1}{mn+m+1}=\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ABD}}$，又 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{BD}{BC}=\frac{m}{m+1}$. 所以 $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{m}{mn+m+1}$. **7.** 如图 25.11 设 AL、BM、CN

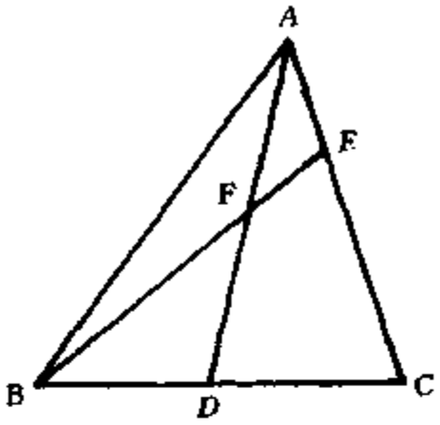


图 25.10

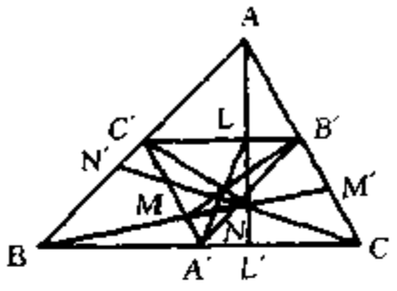


图 25.11

分别与 BC, CA, AB 相交于 L'、M'、N'. 在 $\triangle A'B'C'$ 内应用塞瓦定理有 $\frac{A'N}{NB'}\cdot\frac{B'L}{LC'}\cdot\frac{C'M}{MA'}=1$. 但易知有 $\frac{A'N}{NB'}=\frac{BN'}{N'A}$, $\frac{B'L}{LC'}=\frac{CL'}{L'B}$, $\frac{C'M}{MA'}=\frac{AM'}{M'C}$. 因此 $\frac{AN'}{N'B}\cdot\frac{BL'}{L'C}\cdot\frac{CM'}{M'A}=1$. 所以 AL', BM', CN' 三线共点. **8.** 如图 25.12 设 $A'B$, $B'C$, $C'A$ 三直线交成的三角形是 $\triangle MNP$. 把直线 ABC 看作 $\triangle MNP$ 的截线, 于是 $\frac{NC}{CM}\cdot\frac{MB}{BP}\cdot\frac{PA}{AN}=1$, 把直线 $A'B'C'$ 看成 $\triangle MNP$ 的截线, 于是 $\frac{NB'}{B'M}\cdot\frac{MA'}{A'P}\cdot\frac{PC'}{C'N}=1$. 把直线 $C'DB$ 视为 $\triangle MNP$ 的截线, 有 $\frac{NC'}{C'P}\cdot\frac{PB}{BM}\cdot\frac{MD}{DN}=1$. 再把直线 $A'EC$ 看作 $\triangle MPD$ 的截线, 从而 $\frac{NE}{EP}\cdot\frac{PA'}{A'M}\cdot\frac{MC}{CN}=1$. 最后把直线 $B'FA$ 看成 $\triangle MNP$ 的截线, 于是 $\frac{NA}{AP}\cdot\frac{PF}{FM}\cdot\frac{MB'}{B'N}=1$. 以上五式相乘, 有 $\frac{NE}{EP}\cdot\frac{PF}{FM}\cdot\frac{MD}{DN}=1$. 故 D、E、F 三点共线.

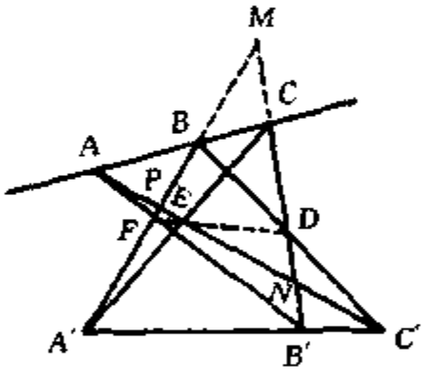


图 25.12

第二十六讲　面 积 方 法

练习题 **1.** 如图 26.1 过 E 作 $EG\parallel BD$ 交 AD 于 G 则 G 为 AD 中点. 因 $AD:DC=2:3$, 则 $GD:DC=1:3$, $EF:FC=1:3$. 设 $S_{\triangle DEF}=x$, 因 $S_{\triangle DEF}:S_{\triangle DFC}=EF:FC=1:3$, 则 $S_{\triangle DFC}=3S_{\triangle DEF}=3x$. 则 $S_{\triangle CDE}=4x$. 同理得 $S_{\triangle ADE}=\frac{2}{3}S_{\triangle CDE}=\frac{8}{3}x$. 由已知得 $S_{\triangle ABC}=20$, 则 $4x+\frac{8}{3}x=20$. 即有 $x=3$, 于是 $S_{\triangle CDF}=3x=9$. 因此 $S_{\text{四边形}AEFD}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle CDF}=20-9=11$. **2.** 如图 26.2 要证 $S_4=S_2+S_6$, 而 $S_4=S_{\triangle ANB}-S_1-S_5$, $S_2=S_{\triangle BCM}-S_1$, $S_6=$

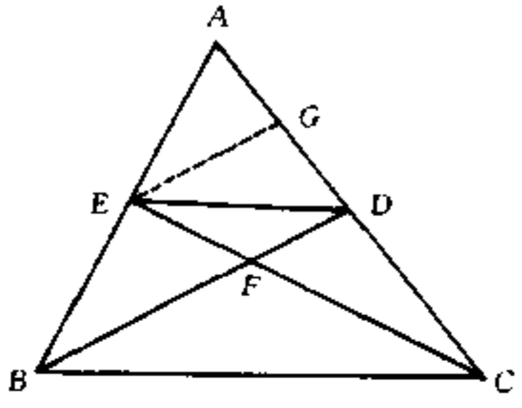


图 26.1

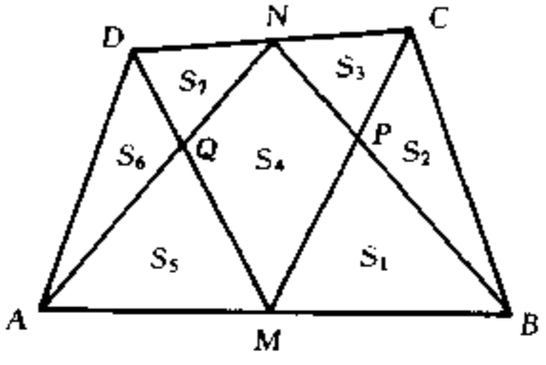


图 26.2

$S_{\triangle DAM}-S_5$. 只需证:$S_{\triangle ANB}=S_{\triangle BCM}+S_{\triangle DAM}$. 而 N 是 DC 中点,设 N 到 AB 距离为 h,点 C、D 到 AB 之距离分别为 h_1、h_2,则 $h=\frac{1}{2}(h_1+h_2)$,由此可知 $S_{\triangle ANB}=S_{\triangle BCN}+S_{\triangle DAM}$,因此 $S_4=S_2+S_6$. **3.** 如图 26.3 设未知的两个小三角形的面积为 x 和 y,则 $\frac{BD}{DC}=\frac{40}{30}=\frac{84+x}{70+y}$, $\frac{84+x}{70+y}=\frac{4}{3}$ ①, $\frac{AE}{EC}=\frac{70}{y}=\frac{84+x}{40+30}$, $\frac{84+x}{70}=\frac{70}{y}$ ②. ① ÷ ② 得 $\frac{70}{70+y}=\frac{4}{3}\cdot\frac{y}{10}$, $y=35$,再由 ② 得 $x=56$,

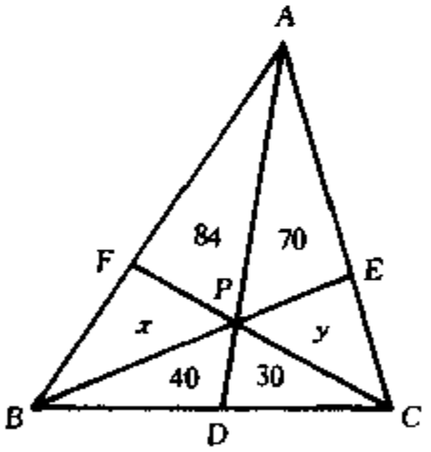


图 26.3

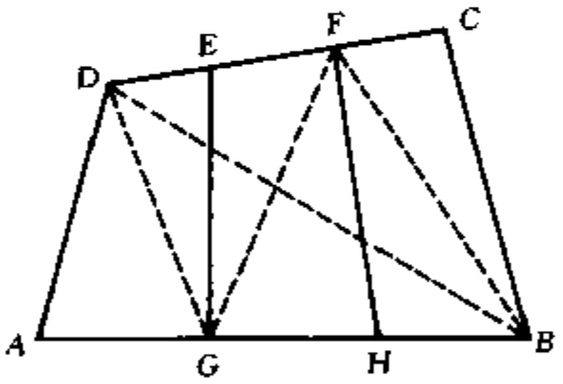


图 26.4

故 $S_{\triangle ABC}=84+70+56+35+40+30=315$. **4.** 如图 26.4 连接 FG, DG, FB. 由 $S_{\triangle EGF}=S_{\triangle EGD}$, $S_{\triangle HFG}=S_{\triangle HFB}$,则 $S_{四边形DGBF}=2S_{EFHG}$ ①. 连接 BD,因 $DE=EF=FC$, $AG=GH=HB$,则 $S_{\triangle DBC}=3S_{\triangle FBC}$, $S_{\triangle DBA}=3S_{\triangle DGA}$,故 $S_{ABCD}=3(S_{\triangle FBC}+S_{\triangle DGA})$. 于是 $S_{\triangle FBC}+S_{\triangle DGA}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$ ②. ① + ② 得 $S_{ABCD}=2S_{EFHG}+\frac{1}{3}S_{ABCD}$. 由此可得 $S_{ABCD}=3S_{EFHG}$. **5.** 如图 26.5 连接 PA, PB, PC,把 $\triangle ABC$ 分成三个小三角形,则 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PCB}=\frac{1}{2}cz+$

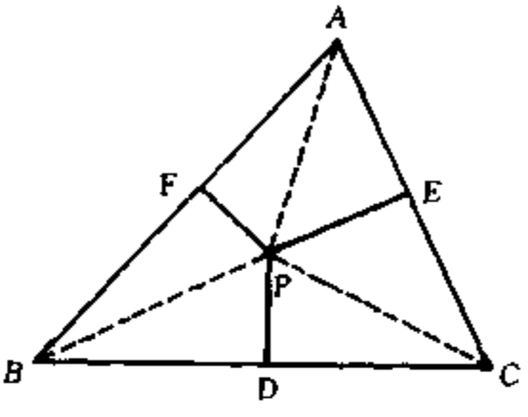


图 26.5

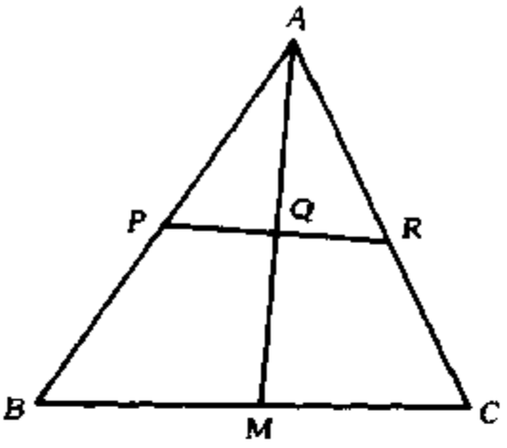


图 26.6

$\frac{1}{2}by+\frac{1}{2}ax$. 故 $ax+by+cz=2S_{\triangle ABC}$(常数). **6.** 如图 26.6 因 Q、M 分别是 PR 与 BC 中点，则 $S_{\triangle APQ}=S_{\triangle AQR}$，$S_{\triangle ABM}=S_{\triangle AMC}$. 从而 $\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABM}}=\frac{S_{\triangle AQR}}{S_{\triangle AMC}}$. 即 $\frac{AP}{AB}=\frac{AR}{AC}$. 故 $PR\ /\!/\ BC$. **7.** 如图 26.7 连结 BQ、DP. 因 $AD\ /\!/\ BP$，则 $S_{\triangle BAP}=S_{\triangle BDP}$. 同理 $S_{\triangle DAQ}=S_{\triangle DBQ}$. 又 $S_{\triangle BAP}=S_{\triangle DAQ}$，则 $S_{\triangle BDP}=S_{\triangle DBQ}$，故 $PQ\ /\!/\ BD$.

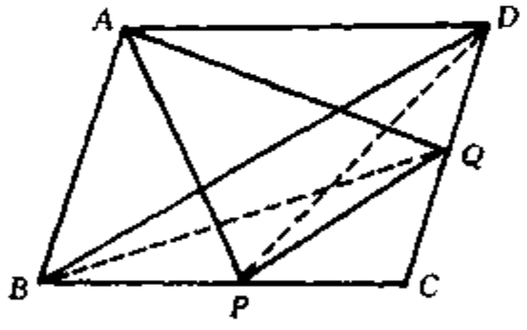


图 26.7

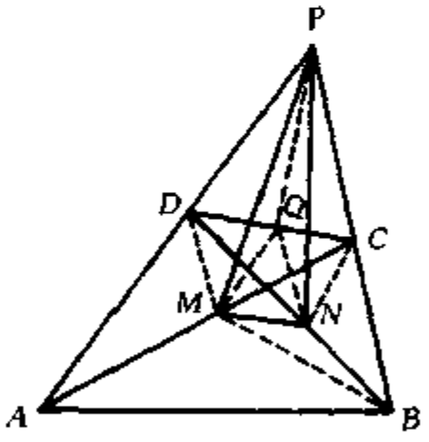


图 26.8

8. 如图 26.8 取 CD 的中点 Q，连接 PQ、QM、QN、DM、CN，则 $QM\ /\!/\ AP$、$QN\ /\!/\ BP$，由等积变形定理得 $S_{\triangle QDM}=S_{\triangle PQM}$，$S_{\triangle QCN}=S_{\triangle PQN}$. 则 $S_{\triangle PMN}=S_{DMNC}$ ①. 连接 MB，则 $S_{\triangle DMN}=\frac{1}{2}S_{\triangle DMB}$，$S_{\triangle DNC}=\frac{1}{2}S_{\triangle DCB}$. 于是 $S_{四边形DMNC}=S_{\triangle DMN}+S_{\triangle DNC}=\frac{1}{2}S_{\triangle DMB}+\frac{1}{2}S_{\triangle DCB}=\frac{1}{2}S_{DMBC}$ ②. 又 $S_{\triangle CMD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ACD}$，$S_{\triangle CMB}=\frac{1}{2}S_{\triangle ACB}$，则 $S_{DMBC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$ ③. 由①、②、③知 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$. **9.** 设 P 到 BC、CA、AB 的距离分别为 t_a、t_b、t_c，BC、CA、AB 边上的高分别为 h_a、h_b、

h_a. 因 $\frac{PF}{AF}=\frac{S_{\triangle PFC}}{S_{\triangle AFC}}=\frac{t_a}{h_a}$，则$\frac{t_a}{h_a}=\frac{3}{x+3}$. 同理$\frac{t_b}{h_b}=\frac{3}{y+3}$，$\frac{t_c}{h_c}=\frac{3}{z+3}$. 又由面积方法可得$\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}=1$，所以$\frac{3}{x+3}+\frac{3}{y+3}+\frac{3}{z+3}=1$，于是有$3[(y+3)(z+3)+(x+3)(z+3)+(x+3)(y+3)]=(x+3)(y+3)(z+3)$，$3[(xy+yz+xz)+6(x+y+z)+27]=xyz+3(xy+yz+zx)+9(x+y+z)+27$. 故 $xyz=9(x+y+z)+54$. **10.** 由勾股定理知，$BC=5$，设$PF=x$，$PE=y$，$PD=z$，则$\frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{5}{z}=12$ ①. 因$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}=S_{\triangle ABC}$，则$\frac{1}{2}AB\cdot x+\frac{1}{2}AC\cdot y+\frac{1}{2}BC\cdot z=\frac{1}{2}AB\cdot AC$，$4x+3y+5z=12$ ②. ①＋②得 $4x+3y+5z+\frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{5}{z}=24$. $\left(\sqrt{4x}-\sqrt{\frac{4}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{3y}-\sqrt{\frac{3}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{5z}-\sqrt{\frac{5}{z}}\right)^2=0$. 则 $\sqrt{4x}-\sqrt{\frac{4}{x}}=0$，$\sqrt{3y}-\sqrt{\frac{3}{y}}=0$，$\sqrt{5z}-\sqrt{\frac{5}{z}}=0$. 解得 $x=1$，$y=1$，$z=1$. 即 $PD=PE=PF=1$. **11.** 欲证$S_{FDCE}=5S_{\triangle BDF}$，连结 DE，由于$S_{FDCE}=S_{\triangle CED}+S_{\triangle EFD}$，则只需证$S_{\triangle CED}=2S_{\triangle BED}$，且$S_{\triangle BDF}=S_{\triangle EFD}$. 根据已知条件和共高比例定理，显然有$S_{\triangle CED}=2S_{\triangle BED}$. 欲证$S_{\triangle BDF}=S_{\triangle EFD}$，又由共高比例定理，只需证$EF=FB$. EF、FB是BE被AD所截成的两段，而AD是$\triangle ABD$与$\triangle AED$的公共边，由公共边比例定理，应有$\frac{EF}{FB}=\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ADB}}=\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ADC}}\cdot\frac{S_{ADC}}{S_{\triangle ADB}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}=1$. 即 $EF=FB$. **12.** 如图 26.9 P，Q，R，S的速度分别为$\frac{AB}{2}$、$\frac{BC}{1}$、$\frac{CD}{2}$、$\frac{DA}{1}$. 经$t(0<t\leqslant 1)$秒后，有$AP=\frac{t}{2}AB$，$BQ=tBC$，$CR=\frac{t}{2}CD$，$DS=tDA$. 则 $S_{\triangle APS}=\frac{1}{2}AP\cdot AS\sin A=\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{2}(1-t)AB\cdot AD\sin A=\frac{t}{2}(1-t)S_{\triangle ABD}$. **13.** 如图

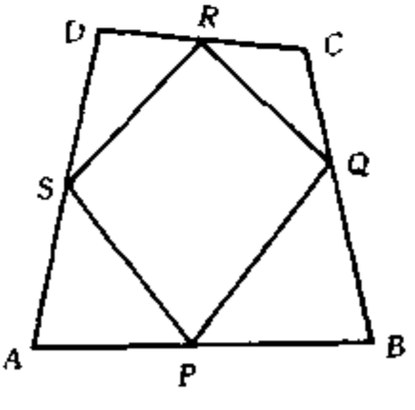


图 26.9

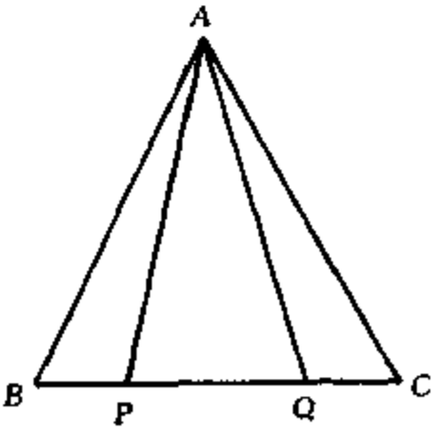


图 26.10

26.10 因 $\angle PAB = \angle QAC$，则 $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle AQC}} = \frac{AB \cdot AP}{AC \cdot AQ}$. $\triangle ABP$ 与 $\triangle AQC$ 既等高又等底，则 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle AQC}$. 故 $\frac{AB \cdot AP}{AC \cdot AQ} = 1$，同理 $\frac{AB \cdot AQ}{AC \cdot AP} = 1$，两式相乘得：$\frac{AB^2}{AC^2} = 1$，即 $AB = AC$，故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

测试题 1. B 2. A. 假设 BD 不平行 PQ，在 SP 上取一点 D'，使 $BD' \parallel PQ$，于是 $S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD'} = S_{四边形ABCD'} = \frac{1}{2}S_{\square BQFD'} + \frac{1}{2}S_{\square BD'SR} = \frac{1}{2}S_{\square PQRS} = S_{四边形ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}$，从而 $S_{\triangle ACD'} = S_{\triangle ACD}$，说明 D、D' 到 AC 之距相等，故 $AC \parallel DD'$，即 $AC \parallel PS \parallel QR$，可见若 BD 与 PQ 不平行，则 $AC \parallel QR$. 同理可证明若 AC 与 QR 不平行，则 $BD \parallel PQ$，这样一来，$AC \parallel QR$ 与 $BD \parallel PQ$ 两者当中至少有一个成立，但并不一定两个都成立，所以选 A，而不能选 B 3. C. 显然 $S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADE} = S_{五边形ABCDE} = 5S_{\triangle COD}$，则 $S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADE} = 5S_{\triangle COD}$，即 $\frac{1}{2}CD \cdot AP + \frac{1}{2}BC \cdot AQ + \frac{1}{2}ED \cdot AR = 5 \cdot \frac{1}{2}CD \cdot OP$. 由 $CD = BC = DE$，有 $AP + AQ + AR = 5OP$. 又 $OP = 1$，$AP = AO + OP$，故 $AO + 1 + AR + AQ = 5$，即 $AO + AQ + AR = 5 - 1 = 4$.

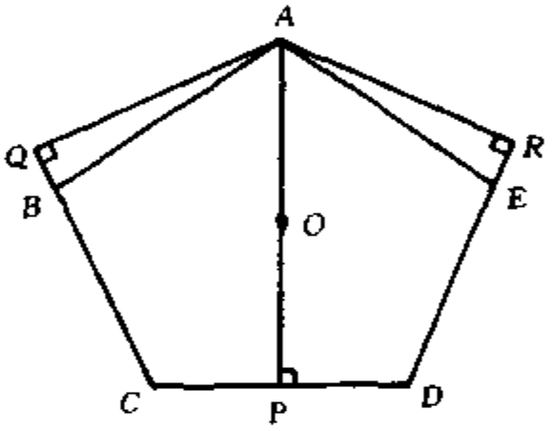


图 26.11

4. $\frac{3n}{2} + \frac{m}{2}$. 连接 AC，设 $\triangle ADF$ 边 DF 上的高为 h_1，则 $\triangle AFC$ 边 FC 上的高也为 h_1，设 $\triangle AEC$ 边 EC 上的高为 h_2，则 $\triangle ABE$ 边 BE 上的高也是 h_2. 于是 $S_{\triangle AFC} = \frac{1}{2} \cdot FC \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot h_1 = S_{\triangle ADF} = m$，又 $S_{四边形ABCF} = n$，则 $S_{\triangle ABC} = n - m$. $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}BE \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}CE \cdot h_2 = \frac{1}{2}S_{\triangle AEC} = \frac{n-m}{2}$，故 $S_{四边形ABCD} = m + n + \frac{n-m}{2} = \frac{3n}{2} + \frac{m}{2}$. 5. $S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} = 3$ ①，$S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} = 8$ ②，由 $S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD} = 9$ ③，$S_{\triangle AOD} + S_{\triangle AOB} = 4$，$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{AO}{CO} = \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}}$ 得 $\frac{S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{S_{\triangle AOD} + S_{\triangle COD}}{S_{\triangle COD}}$ 由 ①、③ 得 $\frac{3}{S_{\triangle BOC}} = \frac{9}{S_{\triangle COD}}$，即 $S_{\triangle COD} = 3S_{\triangle BOC}$. 代入 ② 得 $S_{\triangle BOC} = 2$，$S_{\triangle COD} = 6$. 从而 $S_{\triangle AOB} = 1$，$S_{\triangle AOD} = 3$. 故 $S_{\triangle AOB} + 2S_{\triangle BOC} + 3S_{\triangle COD} + 4S_{\triangle DAO} = 35$. 6. 由 $\frac{S_{\triangle OMN}}{S_{\triangle AMO}} = \frac{ON}{OA} = \frac{S_{\triangle BON}}{S_{\triangle ABO}}$，得 $S_{\triangle OMN} = 1.5$，$\frac{S_{\triangle BMN}}{S_{\triangle MNC}} =$

$\frac{BN}{NC}=\frac{S_{\triangle ABN}}{S_{\triangle NAC}}$，所以 $S_{\triangle CMN}=\frac{45}{2}\text{cm}^2$. 7. 连接 EH、HK，则 $HE\ /\!/\ BD\ /\!/\ KM$，于是 $S_{\triangle HKE}=S_{\triangle HME}$，从而 $S_{AEMH}=S_{AEKH}$. 又 $KE\ /\!/\ \frac{1}{2}BC$，$HK\ /\!/\ \frac{1}{2}CD$. 则 $S_{\triangle AEK}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle AHK}=\frac{1}{4}S_{\triangle ACD}$. 于是 $S_{AEMH}=S_{AEKH}=S_{\triangle AEK}+S_{\triangle AHK}=\frac{1}{4}(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD})=\frac{1}{4}S_{ABCD}$. 同理 $S_{BFME}=S_{CGMF}=S_{DHMG}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$.

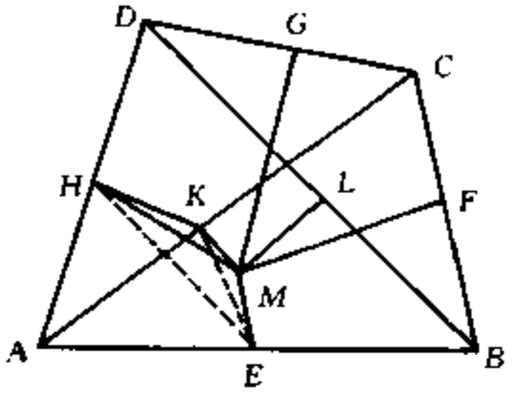


图 26.12

8. $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ABM}=2S_{\triangle ACM}$. $\frac{S_{\triangle APN}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle APN}}{2S_{\triangle ABM}}=\frac{AP\cdot AN}{2AB\cdot AM}$ ①. $\frac{S_{\triangle AQN}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle AQN}}{2S_{\triangle ACM}}=\frac{AQ\cdot AN}{2AC\cdot AM}$ ②. ① + ②，得 $\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{AN}{AM}\left(\frac{AP}{AB}+\frac{AQ}{AC}\right)$. 而 $\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC}$. 故 $\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC}=\frac{AN}{2AM}\left(\frac{AP}{AB}+\frac{AQ}{AC}\right)$.

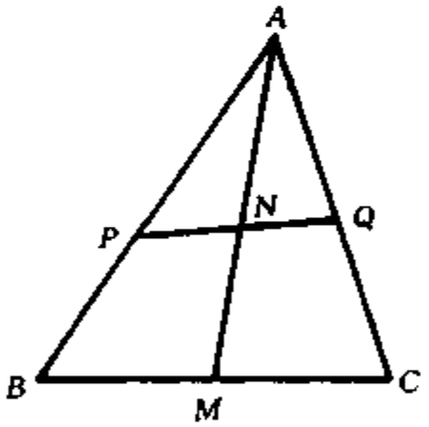


图 26.13

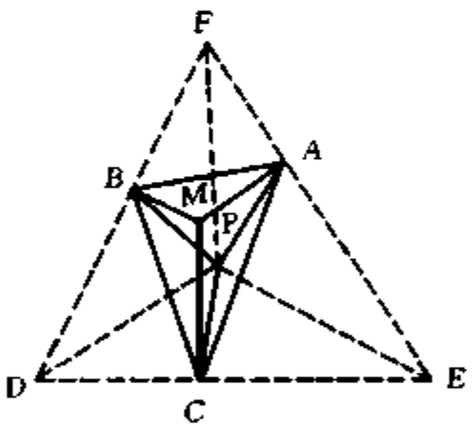


图 26.14

即 $\frac{2AM}{AN}=\frac{AB}{AP}+\frac{AC}{AQ}$. 9. 考虑到已知 $\angle AMB=\angle BMC=\angle CMA=120°$，过 A、B、C 分别作 MA、MB、MC 的垂线，这三条垂线交成一个等边三角形 DEF，于是有 $MA\cdot EF+MB\cdot FD+MC\cdot DE=2S_{\triangle DEF}$，$PA\cdot EF+PB\cdot FD+PC\cdot DE\geqslant 2S_{\triangle DEF}$. 设 $a=DE=DF=EF$，得 $(PA+PB+PC)a\geqslant(MA+MB+MC)a$，两边约去 a，即得所证不等式.

第二十七讲　分类与讨论

练习题 1. 分 $x<-3$，$-3\leqslant x<1$，$x\geqslant 1$ 三类讨论求得 $x=-5$ 或 $x=-1$ 或 $x=3$. 2. 方程可变为 $(m-1)(m+1)x>(m+1)(m-2)$. 当

$m<-1$ 或 $m>1$ 时，$x>\frac{m-2}{m-1}$；当 $-1<m<1$ 时，$x<\frac{m-2}{m-1}$；当 $m=-1$ 时，不等式无解；当 $m=1$ 时，不等式的解为全体实数． 3. 当 $a<1$ 时，$\frac{8}{9}<x<\frac{2a-3}{a-1}$，当 $1\leqslant a\leqslant\frac{19}{10}$ 时，$x>\frac{8}{9}$，当 $a>\frac{19}{10}$ 时，$x>\frac{2a-3}{a-1}$． 4. 依题意知 a 的个位数不为 0 和 5．(1) 当 a 的个位数字是 1、3、7、9 时，则 a^4 的个位数字是 1，则 a^4-1 能被 5 整除． (2) 当 a 的个位数字是 2、4、6、8 时，则 a^4 的个位数字是 6，则 a^4-1 的个位数字是 5，故 a^4-1 能被 5 整除． 5. 对 N 按模 3 分类讨论．(1) 若 $N=3k$ $(k\geqslant 3)$，这时给顾客 k 包 3 千克糖即可． (2) 若 $N=3k+1$ $(k\geqslant 3)$，因为 $3k+1=3(k-3)+2\times 5$，所以，给顾客 $(k-3)$ 包 3 千克糖及 2 包 5 千克的糖即可． (3) 若 $N=3k+2$ $(k\geqslant 2)$，因为 $3k+2=3(k-1)+5$，所以给顾客 $k-1$ 包 3 千克糖及 1 包 5 千克的糖即可． 6. (1) 若 $ABCD$ 形成凸四边形，则凸四边形至少有一个内角不为锐角(否则，四个角都为锐角，内角和小于 360°，与内角和定理矛盾)，因此，所说三角形中至少一个不是锐角三角形． (2) 若 $ABCD$ 不构成凸四边形，则必有一点在其他三点构成的三角形内部，不妨设 D 在三角形 ABC 内部．由于 $\angle ADB+\angle BDC+\angle CDA=360°$．所以三个角中至少有一个角不小于 120°，即此三角形中至少有一个不为锐角三角形．综上所述，满足条件的四个三角形都是锐角三角形的四点是不存在的． 7. 分两种情况讨论：(1) 如图 27.1(甲)，若四点 A、B、C、D 都是凸四边形的顶点，由于 $\angle ABC+\angle BCD+\angle CDA+\angle DAB=360°$，所以其中至少有一个角小于等于 90°，不妨设 $\angle DAB\leqslant 90°$，则 $\angle DAC$ 和 $\angle CAB$ 中至少有一个角不超过 45°． (2) 如图 27.1(乙)，若 A、B、C、D 不是凸四边形的顶点，不妨设 D 点在 $\triangle ABC$ 内，由于 $\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB=180°$，所以其中至少有一个角小于等于 60°，不妨设 $\angle CAB=60°$，则 $\angle BAD$ 和 $\angle CAD$ 中至少有一个角不超过 30°，更不会超过 45°．总之，在 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle ACD$、$\triangle BCD$ 中至少

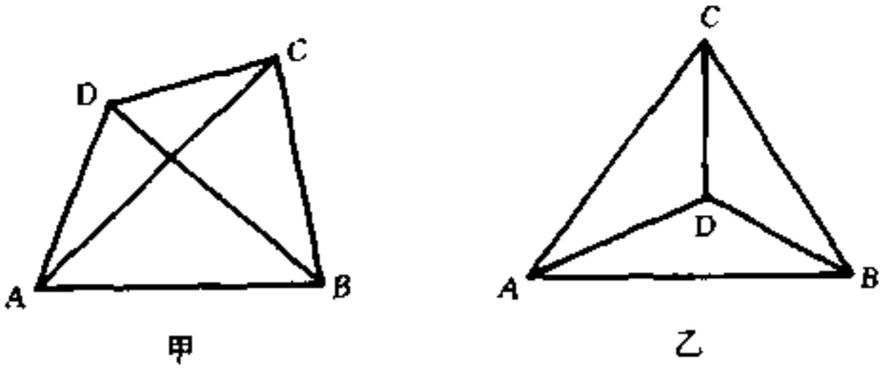


图 27.1

有一个角不超过 45°． 8. 方程化为 $(m-1)(m+1)x=(m-2)(m-1)$，当 $m\neq\pm 1$ 时，方程有唯一解，$x=\frac{m-2}{m+1}$；当 $m=-1$ 时，方程无解；当 $m=1$ 时，

方程的解为一切实数．　**9.** 当$x\leqslant -5$时，不等式无解；当$-5<x\leqslant\frac{1}{2}$时，不等式的解为$-\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{1}{2}$；当$x>\frac{1}{2}$时，不等式的解为$x>\frac{1}{2}$．　**10.** $a\neq 0$，$3a>b$或$a=0$，$b<0$．　**11.** 情形1：$m>0$，$n>0$．　(1) $m>n$，原式$=\dfrac{2n\left(\sqrt{\frac{m}{n}}-\sqrt{\frac{n}{m}}\right)}{\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}-\left(\sqrt{\frac{m}{n}}-\sqrt{\frac{n}{m}}\right)}=m-n$．　(2) $m<n$．原式$=\dfrac{2n\left(\sqrt{\frac{n}{m}}-\sqrt{\frac{m}{n}}\right)}{\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{m}{n}}-\sqrt{\frac{n}{m}}}=\dfrac{n(n-m)}{m}$．　情形2：$m<0$，$n<0$．　(1) $m>n$．注意到$\sqrt{\frac{m}{n}}-\sqrt{\frac{n}{m}}<0$，原式$=\dfrac{n(n-m)}{m}$．　(2) $m<n$．原式$=m-n$．综上所述，当$m>n>0$，或者$m<n<0$时，原式$=m-n$；当$n>m>0$或者$n<m<0$时，原式$=\dfrac{n(n-m)}{m}$．　**12.** 如果k为奇数，设$k=2m+1$，则$2k+1=2(2m+1)+1=4m+3$；如果k为偶数，设$k=2m$，则$2k-1=4m-1=4(m-1)+3$．由此可知，$2k+1$、$2k-1$中至少有一个被4除余3．如果a、b都是奇数，则$a^2+b^2=4m_1+1+4m_2+1=4m+2$；如果$a$、$b$都是偶数，则$a^2+b^2=4m_1+4m_2=4m$；如果$a$、$b$为一奇一偶，则$a^2+b^2=4m_1+1+4m_2=4m+1$．可知任何两整数的平方和被4除余数不为3．换言之，被4除余数为3的整数不可能等于两整数平方和．　**13.** 把分式变为整式这是研究有关整数问题常用的方法．本题$\frac{2p-1}{q}$，$\frac{2q-1}{p}$都是整数，当然可以设它们为r、s，但字母设多了也难免使问题复杂化，我们可设$\frac{2p-1}{q}\cdot\frac{2q-1}{p}=m$　①．可以通过化简后对m作些分析．由①式得$(2p-1)(2q-1)=m\cdot pq$．即$(4-m)pq+1=2(p+q)$．可知$m<4$（否则等式不成立）．取$m=1$，2，3分别研究p、q．(1) 如果$m=1$，即$\frac{2p-1}{q}\cdot\frac{2q-1}{p}=1$，只能$\frac{2p-1}{q}=1$，$\frac{2q-1}{p}=1$．得唯一解$p=1$、$q=1$，这与已知$p>1$，$q>1$不合（舍去）．　(2) 如果$m=2$，

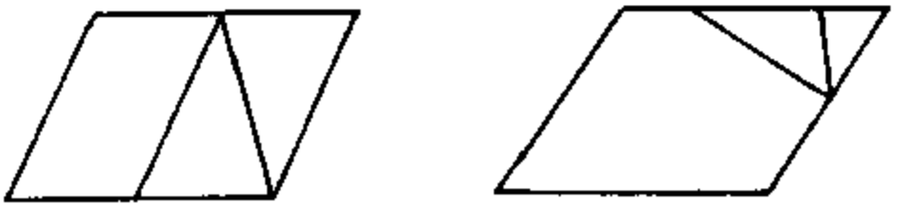


图 27.2

即$\frac{2p-1}{q}\cdot\frac{2q-1}{p}=2$，则有$\frac{2p-1}{q}=2$，$\frac{2q-1}{p}=1$. 或$\frac{2p-1}{q}=1$，$\frac{2q-1}{p}=2$. 但$2p-1=2q$或$2q-1=2p$都是不可能的.因为奇数≠偶数故$m=2$时无解. (3) 如果$m=3$，即$\frac{2p-1}{q}\cdot\frac{2q-1}{p}=3$.则有$\frac{2p-1}{q}=3$，$\frac{2q-1}{p}=1$. 或$\frac{2p-1}{q}=1$，$\frac{2q-1}{p}=3$. 解得$p=5$、$q=3$. 或$p=3$，$q=5$. 故$p+q=8$. **14.** 分两种情况：(1) 如图 27.2，若三角形两顶点同在平行四边形一边上，则三角形的底和高不超过平行四边形的底和高. (2) 如图 27.3，若三角形三顶点在平行四边形的不同边上，则必有两点分别在一组对边上，从第三点作平行于这组对边的直线，即过E作$EK\parallel AB$. 则$ABKE$、$KCDE$是平行四边形. 而$S_{\triangle EFH}\leqslant\frac{1}{2}S_{ABKE}$，$S_{\triangle EHG}\leqslant\frac{1}{2}S_{KCDE}$. 所以 $S_{\triangle EFG}\leqslant\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

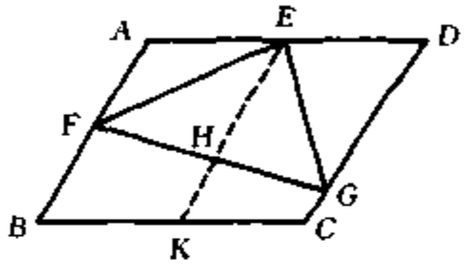


图 27.3

测试题 **1.** $\frac{a}{9}\leqslant x<\frac{b}{8}$，其解仅是 1，2，3，则有$0<\frac{a}{9}\leqslant 1$，$3<\frac{b}{8}\leqslant 4$，故$0<a<9$，$a=1,2,\cdots,9$，共 9 个. $3<\frac{b}{8}\leqslant 4\Rightarrow 3\times 8<b\leqslant 4\times 8\Rightarrow b=3\times 8+1,3\times 8+2,3\times 8+3,\cdots,3\times 8+8$，共 8 个. 故共有$9\times 8=72$(个). **2.** 不妨设$a<b<c$，则由 $a+b=30-c$，$a+b>c$. 得$c<15$. 又$c>\frac{30}{3}=10$，则$10<c<15$. 又c为整数，则$c=11,12,13,14$. 当$c=11$时，$b=10$，$a=9$；当$c=12$时，$b=11$，$a=7$；$b=10$，$a=8$；当$c=13$时，$b=12$，$a=5$；$b=11$，$a=6$；$b=10$，$a=7$；$b=9$，$a=8$；当$c=14$时，$b=13$，$a=3$；$b=12$，$a=4$；$b=11$，$a=5$；$b=10$，$a=6$；$b=9$，$a=7$. 故满足条件的三角形有 12 个. **3.** 8. **4.** 由已知必有$7<c<7+a$，$a\leqslant 7$且a为整数，则$a=1,2,3,4,5,6,7$，即分别有符合条件的三角形个数为 1 个，或 2 个，或 3 个，或 4 个，或 5 个，或 6 个，共计 21 个. **5.** 因为$0<a<b<c<d$. 所以$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}>\frac{1}{d}>0$. 因此$\frac{4}{a}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$，从而$1<a<4$，$a$只能取 3 与 2. 情形 1：$a=3$. 由题设知$b$，$c$，$d$至少应分别取 4，5，6，于是$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$的最大值为$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{19}{20}<1$，由此可见，当$a=3$时，原不定方程无解. 情形 2：$a=2$. 由题设知$\frac{3}{b}>\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=1-\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$，故$\frac{3}{b}>\frac{1}{2}$，即$2<b<6$，进一步考察$b$的各种取值情形. (1) 当

$b=5$ 时，$\frac{2}{c}>\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{3}{10}$，即 $c<\frac{20}{3}$. 再由 $c>d=5$，立知 $c=6$，此时 $\frac{1}{d}=\frac{3}{10}-\frac{1}{6}=\frac{2}{15}$，因 d 不是正整数，故当 $b=5$ 时，不定方程无解. (2) 当 $b=4$ 时，仿上述讨论有 $\frac{2}{c}>\frac{1}{4}$，得 $4<c<8$. 因此 $c=5,6,7$. 进一步讨论可知，当 $c=7$ 时无解；当 $c=6$ 时，$d=12$；当 $c=5$ 时，$d=20$，于是求得两组解 (a,b,c,d) 的取值为 $(2,4,6,12)$、$(2,4,5,20)$. (3) 当 $b=3$ 时，仿上述讨论有 $\frac{2}{c}>\frac{1}{6}$，得 $3<c<12$，类似于上面的试验可知，当 $c=11,6,5,4$ 时无解；当 $c=10$ 时，$d=15$；当 $c=9$ 时，$d=18$；当 $c=8$ 时，$d=24$；当 $c=7$ 时，$d=42$，又可得 4 组解. $(2,3,10,15)$、$(2,3,9,18)$、$(2,3,8,24)$、$(2,3,7,42)$. 最后，得本题 6 组解是：$(2,4,6,12)$、$(2,4,5,20)$、$(2,3,10,15)$、$(2,3,9,18)$、$(2,3,8,24)$、$(2,3,7,42)$. **6.** 设继第 i 号后叫到的学生是第 j 号，则 $j=\begin{cases}2i, & 2i\leqslant n,\\ 2i-n, & 2i>n.\end{cases}$ 因此，若 $i=n$，则 $j=n$，从而当第一次被叫到的是第 n 号时，其余学生永远叫不到，设第一次叫到的不是第 n 号学生：(1) 若 n 是偶数，则 j 必为偶数. 由于 $n\geqslant 3$，所以至少有一个奇数号学生叫不到. (2) 当 n 是奇数，则 $2i\neq n$，$i\neq n$，$2i\neq 2n$，$2i-n\neq n$. 所以 $j\neq n$，即第 n 号学生永远叫不到. **7.** 设 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 的中点，显然 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BDF}=S_{\triangle DCE}=S_{\triangle AFE}$. (1) 如图 27.4(甲)，若 M、L、K 中有两点在折线 FAE、DBF、EDC 中某段上，M、L 在 FAE 上，显然 $S_{\triangle AML}\leqslant S_{\triangle AEF}$

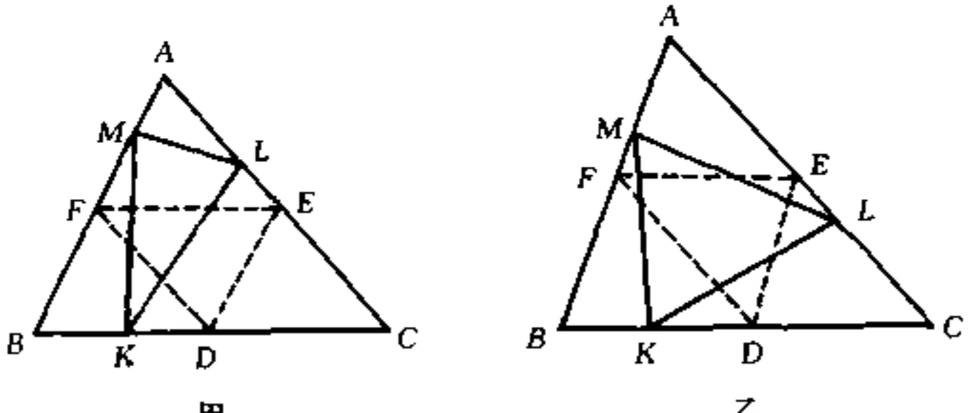
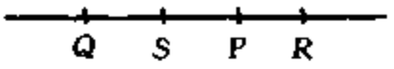


图 27.4

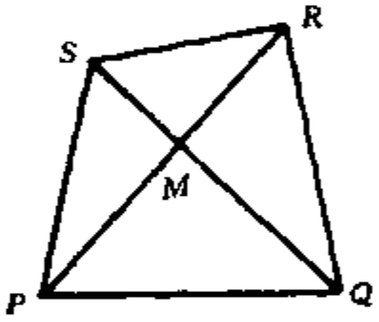
$=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$. (2) 如图 27.4(乙)，若 M，K，L 分别在上述三条折线上，过 M、F、K、D 作 AC 的垂线，垂线长分别为 h_M、h_F、h_K、h_D. 由 $h_K\geqslant h_D=h_F\geqslant h_M$，得 $S_{\triangle LKE}\geqslant S_{\triangle LME}$，$S_{\triangle MKL}\geqslant S_{\triangle MKE}$. 过 E、D、K 作 AB 的垂线，由 $h_E=h_D\geqslant h_K$，所以 $S_{\triangle EMF}\geqslant S_{\triangle KMF}$，$S_{\triangle MKE}\geqslant S_{\triangle FKE}=S_{\triangle FDE}$. 因此 $S_{\triangle MKL}\geqslant S_{\triangle FDE}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle AML}+$

$S_{\triangle BKM}+S_{\triangle CKL}\leqslant\frac{3}{4}S_{\triangle ABC}$. 则 $\triangle AML$, $\triangle BKM$, $\triangle CKL$ 中至少有一个的面积不大于 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{1}{4}$. 8. 首先注意到如果 A、B 是一张圆纸片上的两点，则线段 AB 上的所有点都在这张圆纸片上，若 A、B、C 是圆纸片上的三点，则 $\triangle ABC$ 及其内部的所有点都在此圆纸片上. 任取 O_1、O_2、O_3 的公共点 P，O_1、O_2、O_4 的公共点 Q，Q_1，O_3，O_4 的公共点 R，O_2、O_3、O_4 的公共点 S.

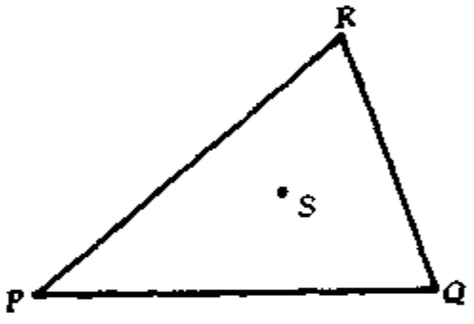


甲

(1) 设 P，Q，R、S 四点共线，不妨设它们的位置如图甲所示，因点 P、Q 在 O_1 及 O_2 内，故线段 PQ 在 O_1 及 O_2 内，同理线段 RS 在 O_3 及 O_4 内；从而，PQ 与 RS 的公共部分 PS 上任一点为四个圆纸片共有. (2) 若 P，Q，R，S 四点不共线，又可分为两种情况. a. 四点成凸四边形 $PQRS$(如图乙)，与(1) 同理，线段 PR 在 O_1 及 O_3 内，QS 在 O_2 及 O_4 内，故 PR 与 QS 的交点是四个圆纸片的公共点.



乙



丙

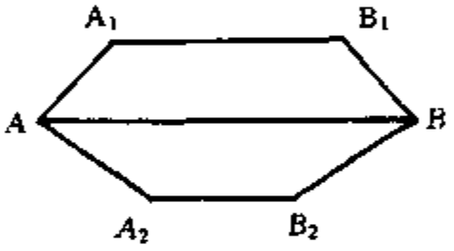
b. 四点不成凸四边形，这时必有一点在其余三点所成三角形的内部或边上. 不妨设 S 在 $\triangle PQR$ 的内部或边上(如图丙). 因 P，Q，R 都在 O_1 内，故 $\triangle PQR$ 内部及其边上的所有点都在 O_1 内；从而 S 在 O_1 内，又由取法知 S 在 O_2，O_3，O_4 内，所以 S 为四个圆纸片所共有.

第二十八讲　逻辑推理

练习题　1. 首先我们注意到(1) 与(3) 互相矛盾；按“矛盾律”，两件矛盾的事，不能都是真的，必有一假；按“排中律”，它们又不能都假，必有一真，从而(1)、(3) 中有一句真话，一句假话(但是还不能判断哪一句为真). 而题设真话只有一句，这样就推出(2) 必是假话，从而苹果在黄箱子里. 2. 当 $n=4k+r+1$ $(1\leqslant r\leqslant 3,\ r\in \mathrm{N})$ 时，先走者必胜，只要他第一步走 r 格，以后每次走的格与对方前一次走的格数正好凑成 4. 当 $n=4k+1$ $(k\in \mathrm{N})$ 时，后走者必胜，因为他每一步走的格子数都能和对方前一步走的格子凑成 4. 3. S、J 和 R 担任刹车员、司炉和司机，共有 6 种可能，如表

人员	假设					
	1	2	3	4	5	6
刹车员	S	S	J	J	R	R
司炉	J	R	S	R	S	J
司机	R	J	R	S	J	S

由信息(6)知S不会是司炉，所以上面图中的假设3和5不可能成立．乘客的地址有三个：芝加哥、底特律和这两地之间的某地．此外，我们还知道，这三位乘客分住三地．已知信息说R先生住在底特律，所以，只有两种可能：J先生住芝加哥而S先生住在底特律和芝加哥之间．已知J先生恰好挣2000元一年，而2000元不能被3整除．但刹车员的邻居，即J先生住芝加哥而S先生住芝加哥和底特律之间．已知信息(3)说住芝加哥的乘客和刹车员同姓，所以，刹车员是J．这一结果一下子就排除了上图中的假设1、2，5和6，但我们已排除了3．所以，只剩下4和已知信息相容，故S是司机(J是刹车员，而R是司炉)．　4．用n个顶点代表这n个人，用连线代表"认识"，于是问题化为一个图来表示．当A与B认识时，我们只需证明A认识的人数与B认识的人数一样多．设若A认识A_1，则B不认识A_1，从而A_1与B有(除了A外)另一个共同熟人B_1，每个A认识的A_i都相应有一个B认识的B_i，反之亦然．于是A的熟人个数等于B的熟人个数，这相当于说图中任一对相邻点A、B它们的度数相同．当A与B不认识时，由假设A，B必有共同的邻点C，由前证知A与C有相同的度数，从而A与B的度数相等，即熟人的个数也一样多．　5．中文系冠军，历史系亚军，数学系第三，生物系第四．　提示：假定第三个学生说生物系得亚军是真的，那么由第一个学生说的数学系第三和第三个学生说的数学系第四同为真，这是不可能的．因此生物系不是亚军，再由最后一个学生所说得知中文系冠军，以下类推．　6．先把各人预测的结果列成表



	1	2	3	4	5
甲		B	A		
乙		D		E	
丙	E				C
丁			D	C	
戊		A			B

由表的第一列可见，E 第 1 名(因只有丙一人预测 E 第一)，以下依次推出 D 第 2 名；C 第 4 名；A 第 3 名；B 第 5 名． 7. 由结局人手分析．甲方要想取到最后一个棋子，则倒数第 2 次取子时应给乙方剩下 4 个棋子，往上推倒数第 3 次取子时应给乙方剩 8 个棋子．余此类推，甲第一次取子时能给乙留下 $4k$ 个棋子，甲必胜． (1) 如果棋子数 $n=4k+r$ $(r=1,2,3)$，则甲先取 r 个，然后乙方每取 a 个$(1\leqslant a\leqslant 3)$，甲便取 $4-a$ 个，则甲必胜； (2) 如果棋子数 $n=4k$，甲每取 a 个$(1\leqslant a\leqslant 3)$，乙便取 $4-a$ 个，则乙必胜．这里使用了从结论人手倒推的方法．找出 $4k+r$ $(1\leqslant r\leqslant 3)$ 是甲的临胜态，$4k$ 是乙的临胜态． 8. 注意表格的结构，从左上方到右下方，横走 7 步(从一个方格移到相邻的方格称为走一步)、纵走 7 步即可，这表明从“1”到“64”最多不超过 14 步，由 $64=14\times 4+8$ 知，必有相邻两格的数字差大于 4．下面用反证法来叙述．假设表中任意两个相邻的数之差都小于 5，那么从“1”逐格移动到“64”最多走 14 步，数字增加不超过 $14\times 4=56$．不可能得到 64．所以必存在相邻的两格，相邻数字之差不小于 5． 9. 设甲、乙、丙、丁、戊最后读的书的书名依次为 A，B，C，D，E．根据题设条件可列出表 1．这个表的结构是，每一行每一列都出现 A，B，C，D，E 各一次．因为表 1 中的人乙和书 C 出现的已知信息最多，因而应从乙的第 3 次交换人手来解决问题．从列看，第 3 次读的书不是 A、B、C；从行看又不能是 C、D，故必为 E，从而乙第一次读的是 D． 这时第 3 次交换的信息量最多，故考虑甲的第 3 次交换．行看不是 C、D、E，列看不是 A，故甲第三次读的必为 B．从而 Y 为 A．再看 X，由丙看 X 不是 A、C、D，由甲看 X 不是 A、B，故 X 为 E．如此继续可得出表 2．

表 1

书名 / 人名 / 次序	甲	乙	丙	丁	戊
1	X		Y		
2		A	X	?	
3			D	Y	C
4		C			
5	A	B	C	D	E

表 2

书名 / 人名 / 次序	甲	乙	丙	丁	戊
1	E	D	A	C	B
2	C	A	E	B	D
3	B	E	D	A	C
4	D	C	B	E	A
5	A	B	C	D	E

由表 2 知，丁第 2 次阅读的书戊最先读． 10. 逆向思考，最后留下者，最后一轮必报 2，在倒数第 2 轮必报 4，倒数第三轮必报 8，…… 如此倒推回去，顺序为 2，4，8，16，32，64，128．再推已超过 160 了．故第一次报的数是 128． 11. 赛法有甲乙、丙甲、甲丁、乙丙、乙丁、丙丁共计 6 盘．根据已知条件，丁已败给乙，所以

丁胜的盘数只能少于 3. 若丁胜 1 盘，则甲、乙、丙共胜 5 盘. 若丁胜 2 盘，则甲、乙、丙共胜 4 盘. 这两种情况都不能使甲、乙、丙胜的盘数相同，所以丁胜 0 盘，甲、乙、丙等人各胜 2 盘. **12.** 从图中可以看出，a 的对面不可能是 d 和 f；a 的对面不可能是 b 和 c，故 a 的对面一定是 e. 同理 d 的对面是 b；c 的对面是 f，所以字母 a、b、c、d、e、f 的对面分别是字母 e、d、f、b、a、c. **13.** 假设结论(1)正确："有毛笔的同学也有钢笔"，据结论(Ⅰ)"有钢笔的同学，没有圆珠笔"，推出"有毛笔的同学没有圆珠笔"，这与结果(Ⅱ)"有圆珠笔，也有毛笔"矛盾. 故结论(Ⅰ)不正确. 同样，假设结论(2)正确，结合结果(Ⅰ)得，"没有毛笔的同学也没有圆珠笔"，也就是说"有圆珠笔，也有毛笔"，这正是结果(Ⅱ)，但这并不表明结论(2)正确. 不妨考虑直接推理. 由(Ⅱ)、(Ⅳ)得"没有铅笔的同学，有毛笔"，此点结合(Ⅲ)，可知，铅笔和毛笔和圆珠笔是"共有共无"，所以结论(3)、(4)正确. 这样，又根据结果(Ⅰ)，"有钢笔的同学，没有圆珠笔，也就没有毛笔，从而就有铅笔"，即结论(5)正确. 对于结论(2)，既不是结果(Ⅰ)(Ⅱ)(Ⅲ)(Ⅳ)的推论，也没有在假定正确的前提下导出矛盾，可以认为结论(2)不一定正确. 综上所述：(1) ×； (2) ×； (3) √； (4) √； (5) √.

测试题 **1.** 用 A 表示 A 说真话，$\overline{A}$ 表示 A 撒谎，对 B、C、D 也用类似记号，这里用穷举法逐一排除，直到找出谁是肇事者. (1) 若 B 是肇事者，则 A、$\overline{B}$、C、D，矛盾. (2) 若 A 是肇事者，则 A 说的"B 打破的"是一句假话，即有 $\overline{A}$，同理有 $\overline{B}$，C，D，这样 C，D 两人都说了真话，与所设矛盾，即 A 不是肇事者. (3) 若 D 是肇事者，则 $\overline{A}$、B、C、$\overline{D}$，矛盾. (4) 若 C 是肇事者，则 $\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$，这符合题设. 因此 D 说了真话，C 是肇事者. **2.** 用倒推方法，列表如下：

	甲	乙	丙
第三次结束	8 颗	8 颗	8 颗
第二次结束	4 颗	4 颗	16 颗
第一次结束	2 颗	14 颗	8 颗
起点	13 颗	7 颗	4 颗

3. 设有下表，则 $50 = a + b + c + d$ 因为 $a = 14$，则 $b + c + d = 50 - 14 = 36$. 因为 $b + d = 31$，$c + d = 18$，则 $b + c + d + d = 49$，故 $d = 49 - 36 = 13$.

眼睛 \ 肤色	白色	浅黑色
蓝色	a	b
褐色	c	d

4. 列出表 1，把条件(1)、(4) 的结论用

表 1

结论 项目 / 演员	歌唱	相声	舞蹈	上海	北京	武汉
张						
李		0				0
王	0					

"1"或"0"填入表内，接着推理如下：由条件(3)，相声演员出生在北京，推出不是相声演员就不出生在北京，即小李不是北京人，从而推出小李是上海人，把这个结论用"0"或"1"的形式填入表内．由条件(2)，歌唱演员不出生在上海，推出出生在上海的不是歌唱演员，即推出小李不是歌唱演员，从而是舞蹈演员，同时推出小张是歌唱演员，把这些结论用"0"或"1"的形式填入表内．　这样推理下去可得表 2，由表 2 得小张是出生在武汉的歌唱演员，小李是出生在上海的舞蹈演员，小王是出生在北京的相声演员．

表 2

结论 项目 / 演员	歌唱	相声	舞蹈	上海	北京	武汉
张	1	0	0	0	0	1
李	0	0	1	1	0	0
王	0	1	0	0	1	0

5. 由题设条件，画出图 28.1，由图推理如下：(1) 由丙队赛了 3 场，说明丙与甲、乙、丁队各赛了 1 场．(2) 由甲队赛了 1 场，甲队只与丙队赛了 1 场．(3) 乙队赛了 2 场，除了和丙队外，只会和丁队赛了 1 场．(4) 由图可知，丁队赛了 2 场．

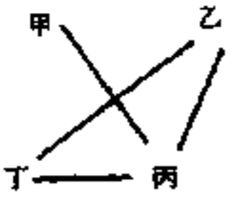


图 28.1

6. 根据"下雨"和"晴"的机会相等，以及如期收到帐篷的机会相等，那么有如下的情形：

天气
- 下雨
  - 若如期收到帐篷，则不淋雨．
  - 若不如期收到帐篷，则淋雨．
- 晴
  - 若如期收到帐篷，则不淋雨．
  - 若不如期收到帐篷，则不淋雨．

由此可见，赴会者淋雨的机会是

$\frac{1}{4}$. 7. 把 8 个人用平面上 8 个点来表示，若两人握手，就在代表这两人的两点间连一条实线．于是可得一个凸八边形，如图 28.2 所示，其中顶点表示人，边和对角线表示握手(图中只画出了代表性的一部分握手)，这样原来的问题便转化为求“一个凸 n 多边形的对角线数加边数的和”．因而总的握手次数为 $\frac{8(8-3)}{2}+8=28$.

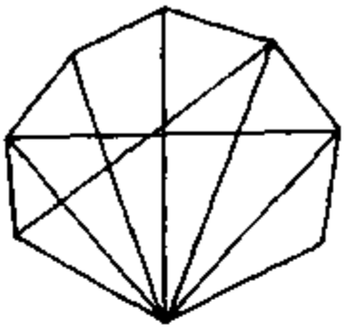


图 28.2

第二十九讲　染色问题

练习题　1. 若第一张纸上的黑格 A 与第二张 A' 重合．如果第一张纸上 A 格所在列的其他黑格(奇数个)都与第二张纸的黑格重合，则由第二张纸上这一列黑格个数为偶数知必有一黑格 B' 与第一张上的红格 B 重合．同理在 A、B 所在行上各有一个方格 C、D 与第二张纸上重合的方格 C'、D' 的颜色不同．　2. 设红、黄、蓝玻璃片各有 x、y、z 块．则由 $x+y+z=1987$ 不能被 3 整除知 x、y、z 被 3 除后的系数必有两个相等．令 $x=3a+m$，$y=3b+n$，$z=3c+n$．不妨设 $c\geqslant b$．若 $c=b$，本题显然成立；若 $c>b$，可取黄蓝各 $3b+n$ 片，按规则操作得红片 $3a+6b+2n+m$，黄片为 0，蓝片为 $3(c-b)$．然后取红、蓝各一片，产生黄片 2 片．再取黄、蓝 2 片，产生红片 4 片，这时红片为 $3a+6b+2n+m+3$，黄片为 0，蓝片为 $3(c-b-1)$．如果 $c-b-1=0$，本题得证，否则继续这种操作，直至 $c-b-k=0$，这时所有玻璃片都涂上红色．(2) 从上面解法知道，将各色玻璃片数除以 3，必有两个余数相等，第三个余数不等．只要最后变成这个不等于余数所对应的颜色，便与操作顺序无关．　3. (1) 首先，设有两点 A、B 使 $AB=2$ 且 A、B 不同色，现设 AB 中点为 C，不妨设它与 A 同色，作正 $\triangle ACD$ 和正 $\triangle ACE$，由题设 D、E 不能与 A、C 同色那么将与 B 同色．于是 $\triangle BDE$ 是边长 $\sqrt{3}$ 的正三角形，其三个顶点同色．其次，在平面上任取一点 A，以 A 为中心，4 为半径作圆，若圆内的点都与 A 同色，则在圆内显然存在边长为 $\sqrt{3}$ 且三个顶点同色的三角形，否则圆内至少有一点 C 与 A 不同色，这时 $AC<4$，作等腰三角形 $\triangle ABC$，使 $AB=BC=2$，则 B 与 A 或 C 中一个异色．即存在线段长为 2 且两端异色的线段．由第一段证明知这时也存

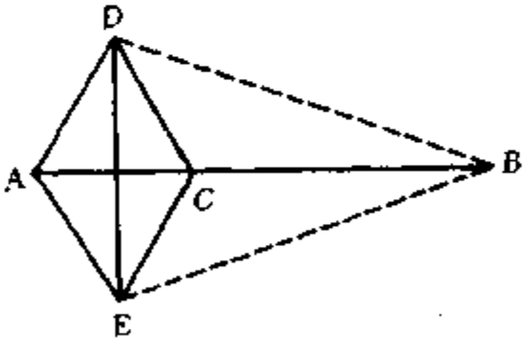


图 29.1

在边长为 $\sqrt{3}$ 且三个顶点同色的正三角形．(2) 将平面分成宽度为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的水平带状区域，且每个区域含下界直线，不含上界直线．让相邻带状区域染成不同色即可． 4. 不失一般性可设第一个球为红色，第二个球为蓝色，如果它们重量不同，则结论成立．如果它们有相同重量，例如同是 1 磅，就是重 2 磅的第三个球，它与第一球或第二球中一个必是有不同重量和不同颜色的球． 5. 设 9 点为 $A_i(i=1,2,\cdots 9)$．那么存在一点，从这点出发的 8 条线段中涂红色的不是 5 条（因 $\frac{1}{2}\times 5\times 9$）不是整数．不妨设此点为 A_0．(1) 若从 A_0 出发的 8 条线段中有 6 条或 6 条以上线段为红色，不妨设 $A_0A_i(i=1,2,\cdots 6)$ 为红色．则 6 个点 $A_1, A_2\cdots A_6$，用两种颜色去涂任意两点连线，必有同色三角形，$\triangle A_iA_jA_k(1\leqslant i<j<k\leqslant 6)$，由题意它只能是红色的，此时 A_0、A_i、A_j、A_k 四点中每两点连线为红色．(2) 若从 A_0 出发的线段中只有 4 条或 4 条以下为红色，则至少有 4 条为蓝色，不妨设 $A_0A_i(i=1,2,3,4)$ 为蓝色．依题意，A_1，A_2，A_3，A_4 每两点间的连线为红色． 6. 用圆周上 9 个点代表 9 位数学家，若两人认识则对应点之间连红色线段，若两人不认识则对应点之间连蓝色线段，下面证明与第 5 题相同． 7. 先利用图 29.2 证明“若平面上有两个异色的点距离为 2，那么必定可以找到符合题意的三角形”．再找长为 2，端点异色的线段；以 O（白色）为圆心，4 为半径作圆，如圆内皆白点，问题已证．否则圆内有一黑点 P，以 OP 为底作腰长为 2 的 $\triangle OPR$，则 R 至少与 O、P 中一点异色，这样的线段找到．

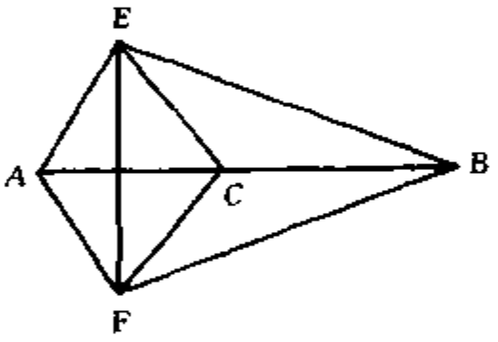


图 29.2

8. 用点 A_1、$A_2\cdots$、A_{100} 表示客人，红、蓝的连线分别表示两人相识或不相识．因为由一个顶点引出的蓝色线段最多有 32 条．所以其中至少有三点之间连红线，这三点（设为 A_1、A_2、A_3）引出的蓝色的线段最多为 96 条．去掉所有这些蓝色线段（连同每条线段上的一个端点 $A_i, i\neq 1、2、3$），这样，在图中至少还剩下四点，除 A_1、A_2、A_3 外，设第 4 点为 A_4，这四个点中 A_1、A_2、A_3 每一点与其他的点都以红色的线段相连，于是客人 A_1、A_2、A_3、A_4 彼此两两相识． 9. 设线段 AB 的中点为 M，如图 29.3，所有红点到 A 的距离之总和为 $S_{红}$，所有蓝点到 B 的距离之和为 $S_{蓝}$，记 $S_{红}-S_{蓝}=P$．若 n 个蓝点均分布在 M 左边，n 个红点均分布在 M 右边．设这种分布为均匀分布状态，显然在均匀分布状态下，有 $S_{红}=S_{蓝}$，此时 $P=0$．若 n 个蓝点与 n 个红点呈非均称分布，则 M 左边至少有一红点，M 右边至少有一蓝点．我们取 M 左边任一红点改涂为蓝色，将 M 右边任一蓝点改涂为红点，其余各点颜色不变．则红点到 A 距离总和为 $S'_{红}=S_{红}+$

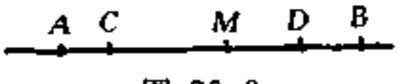


图 29.3

CD，蓝点到 B 距离总和也增加 CD，成为 $S'_{蓝}=S_{蓝}+CD$. 显然 $S'_{红}-S_{蓝}=(S_{红}+CD)-(S_{蓝}+CD)=S_{红}-S_{蓝}=P$. 这表明，将 M 左边一点由红换涂为蓝色，M 右边一点由蓝换涂红色，$S_{红}$ 与 $S_{蓝}$ 显然都没有变化，但它们的差值 $S_{红}-S_{蓝}=P$ 不变. 于是，我们总可以调换有限次数的涂色，把 M 左边的 n 个点全调换成蓝点，M 右边的 n 个点全调换成红点，即调成均匀分布状态，而 $S_{红}-S_{蓝}=P$ 仍保持不变，但由均匀分布可确定 $P=0$，因此，得证对 n 个蓝点与 n 个红点的任意分布状态，都有 $S_{红}-S_{蓝}=0$，即 $S_{红}=S_{蓝}$ 成立. 也就是所有红点到 A 的距离之和等于所有蓝点到 B 的距离之和.

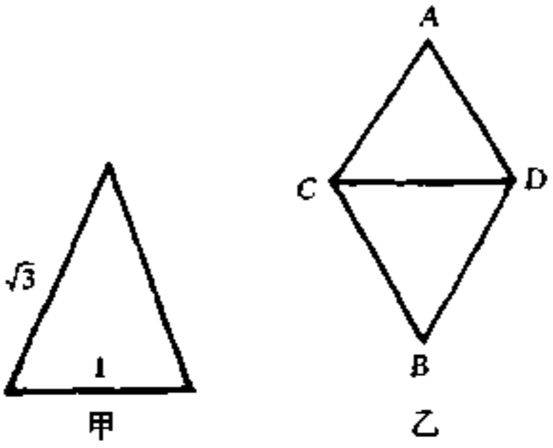


图 29.4

10. 若平面上没有距离为 1 的同色点. (1) 任取两点，距离为 1，分别被染上不同颜色，分别以这两点为圆心，以 $\sqrt{3}$ 为半径作圆，两圆必有交点. 无论交点染上什么颜色都将出现一对距离为 $\sqrt{3}$ 的异色点. 所以平面上存在距离为 $\sqrt{3}$ 的异色点，如图 29.4(甲). (2) 取一对距离为 $\sqrt{3}$ 的异色点，分别以 A、B 为圆心，1 为半径画圆弧交 C、D 二点，则 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BCD$ 都是边长为 1 的正三角形. 这两个正三角形的公共边在 A、B 两点的垂直平分线上，由于只能使用 3 种不同的颜色，可见一方面 C、D 两点必须染成与 A、B 不同的颜色，否则将有两同色距离为 1；而另一方面，C、D 距离为 1 且同色，这也不可能. 由此可见平面上必有距离为 1 的同色点，如图 29.4(乙).

测试题 **1.** 将 10×2 个位置按奇数位染白色，偶数位染黑色，于是黑、白点各有 10 个，因为相同两个偶数之间有偶数个点，相同两个奇数之间有奇数个点，则相同的两个偶数要么占据两个白点，要么占据两个黑点，于是 10 个偶数 0、0、2、2、4、4、6、6、8、8 共占据 5 个黑点和 5 个白点. 而 10 个奇数 1、1、3、3、5、5、7、7、9、9 中占据黑点位置的必为偶数个，设为 $2a$，于是 $5+2a=10$，得 $5=2a$ 为偶数. 这是不可能的. 因此符合题目条件的排法是不存在的.

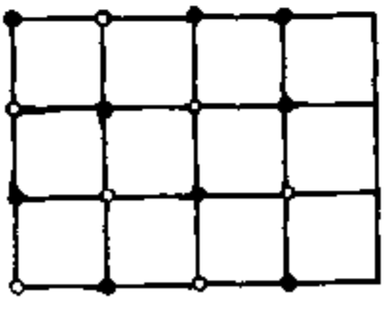


图 29.5

2. 如图 29.5，把正方形纸片上的结点相间染色(实点表示黑点，空点表示白点). 通过线段端点的奇偶个数的分析，易知所有满足条件的折线共包含偶数个结点. 但整个正方形纸片除顶点外只包含奇数个结点，则其中至少有一个结点不在折

线上，命题得证. 3. 如图 29.6，若只连一条对角线 A_1A_i，则把原凸多边形分成两部分，只要把一侧涂成红色，就可以形成一个外侧涂成红色的凸多边形，比如 $A_1A_2\cdots A_i$. 若再连一条对角线，不外乎有两种情形：(1) 此对角线不穿过多边形 $A_1A_2\cdots A_i$，此时 $A_1A_2\cdots A_i$ 仍为所求. (2) 此对角线穿过多边形 $A_1A_2\cdots A_i$. 比如对角线 A_2A_{i+1}，设 A_2A_{i-1} 交 A_1A_i 于点 P，则 A_2A_{i+1} 将一个外侧为红色的凸 i 边形 $A_1A_2\cdots A_i$ 又分成两个新的凸多边形，同样其中必有一个是外侧为红色的凸多边形. 如此下去，有限步后，无论作什么样的对角线，总是至少有一个外侧完全涂成红色的多边形. 4. 仿照例 5 的证法 5. 将 23×23 的正方形地面中第 1、4、7、10、13、16、19、22 列中的小方格全染成黑色，剩下的小方格全染成白色，于是白色的小方格个数为 15×23，这是一个奇数，因为每块 2×2 瓷砖总是盖住两黑格和两白格或者盖住四白格，每块 3×3 的瓷砖总是盖住三黑格和六白格. 故无论多少 2×2 及 3×3 的瓷砖盖住的白格数总是一个偶数，不可能盖住 15×23 个白格，所以只用 2×2 及 3×3 的瓷砖不能盖住 23×23 的地面. 6. 如图 29.7 涂色. 若有一种剪法能剪出七个相邻两个小正方形组成的矩形，则每个矩形一定由一个涂色小正方形和一个不涂色小正方形构成. 因此，应该有七个涂色小正方形和七个不涂色的小正方形. 但图中有八个涂色小正方形，六个不涂色小正方形，因此适合题意的剪法不存在. 7. 设 $m\times n$ 棋盘由 k 个 L 形纸片所覆盖，而 L 形是由 4 个 1×1 小方格所组成，则可令 $mn=4k$. 由此得出 m、n 中至少有一个偶数，不失一般性. 可令 n 为偶数，即共有偶数 n 列. 现在对“列”进行黑、白交替染色，可得黑、白格各共有 $2k$ 个. 易见每个 L 形纸片无论怎样配置，总是盖住奇数个黑格. 今共有 $2k$ 个黑格，因此必须有偶数个 L 形，从而证得 mn 是 8 的倍数.

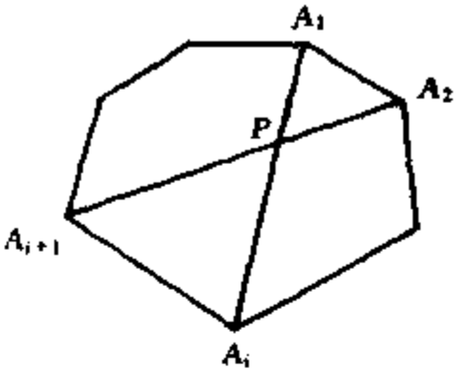


图 29.6

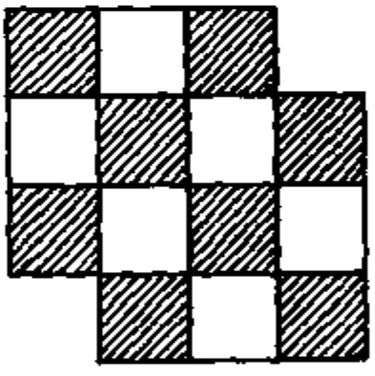


图 29.7

第三十讲　实际问题的数学解法

练习题

1. 由题意每天每间房价为 160 元，140 元，120 元，100 元，则每天收入分别为 $160\left(100\cdot\frac{55}{100}\right)=8\,800$(元)，$140\left(100\cdot\frac{65}{100}\right)=9\,100$(元)，$120\left(100\cdot\frac{75}{100}\right)=$

$9\,000$(元)，$100\left(100\cdot\frac{85}{100}\right)=8\,500$(元)．由此可知每天每间房间定价为140元时，收入最高达到9 100元．　2．设这批货成本为a元，月初出售到月末可获利润　$p_1=1\,000+(a+1\,000)\times 1.5\%=0.015a+1\,015$．月末出售可获利润$p_2=1\,200-50=1\,150$元，$p_1-p_2=0.015(a-9\,000)$．故当$a>9\,000$时，月初出售好；当$a=9\,000$时，月初、月末出售相同；当$a<9\,000$时，月末出售好．3．设这件服装的进价为$x$元，如果老板以高出进价的50%标价，则$(1+50\%)x=200$，解得　$x\approx 133$．如果老板以高出进价的100%标价，则$(1+100\%)x=200$解得　$x=100$　可见进价在100元～133元之间，因此还价范围可定为120元～160元．　4．设犯有贪污、受贿罪的官员中健康人数占$x\%$，廉洁官员中健康人数占$y\%$，根据题意，可得$600\times y\%-580\times x\%=272$，$600(1-y\%)+580(1-x\%)=444$．解得$x=40$，$y=84$．因此，贪污、受贿的官员的健康人数仅占40%，而廉洁官员的健康人数可占84%．　5．设每件商品的销售价为x(元)．根据题意得不等式组$\begin{cases}x-8.5\geqslant 1\\ \dfrac{x-8.5}{x}\leqslant 15\%\end{cases}$　解得　$9.5\leqslant x\leqslant 10$．　6．该台机器不加修理时，每使用一次折合使用费为$\frac{N}{n}$元，修理后每使用一次折合使用费为$\frac{N+P}{m}$元，当修理后每次使用费小于不加修理时每次使用费较为合算．由　$\frac{N}{n}-\frac{N+P}{m}>0$．可得$P<\frac{m-n}{n}N$．所以，当$P<\frac{m-n}{n}N$时，修理后再使用较为合算．　7．由于机器人具有相同的性能，因此它们行走的速度是一样的，于是机器人取零件花费的总时间最少的问题，实质上是它们每次取零件所走路程之和最短的问题．“路程之和最短”的目标以及生活经验告诉我们，设置零件箱的位置P应该在A_1与A_5之间．不妨设P点在A_3与A_4之间，则A_1，A_2，A_3，A_4，A_5到点P的距离之和为$A_1P+A_2P+A_3P+A_4P+A_5P=A_1A_5+A_2A_4+A_3P$．要使此和为最小，只有调整$P$，使$A_3P$为最小，显然应使点$P$与$A_3$重合．因此，零件箱放在$A_3$处为最佳，此时距离之和最小，其值为$A_1A_5+A_2A_4$．8．设球员接球时位于$C$，他尽力向球门冲近到$D$，此时不仅距离球门近了，射门更为有力，而且对球门$AB$的张角也扩大了，球更容易射中．　9．肖工程师购房时共付款$1\,188\times 70=83\,160$元．设公司实际收到钱款为x元，则公司应从肖工程师交的83 160元中拿出$(83\,160-x)$元参加银行五年定期储蓄，并且$(83\,160-x)(1+9.00\%\times 5)=83\,160$．解这个方程，得　$x\approx 25\,808$．因此，公司实际收到25 808元．　10．决定何时出售这批货可获利最大，是与货物的成本相关的，设这批货的成本费为a元，分情况考虑如下：若本月初出售，到下月初共获利润$100+(a+100)\times 0.5\%=\frac{5}{1\,000}a+100.5$(元)．若下月初出售，共获

纯利润 120 − 5 = 115 元. 因此,若本月初出售最好. 则$\frac{5}{1\,000}a + 100.5 > 115$, 解得$a > 2900$. 即当这批货的成本费$a > 2900$时,本月初出售最好. 当$a = 2\,900$时,则$\frac{5}{1\,000}a + 100.5 = 115$. 即本月初或下月初出售所获利润相同. 当$a < 2\,900$时,则$\frac{5}{1\,000}a + 100.5 < 115$. 即下月初出售最好. **11.** 设 A 城化肥运往 C 地 x 吨,运往 D 地$(200 - x)$吨;B 城化肥运往 C 地$(220 - x)$吨,运往 D 地$(80 + x)$吨,需要总的费用为 y 元,由题意,得:$y = 20x + 25(200 - x) + 15(220 - x) + 22(80 + x)$. 化简得 $y = 2x + 10\,060$ $(0 \leqslant x \leqslant 200)$. 当 $x = 0$ 时,$y_{min} = 10\,060$. 故运费最少为10060元,只要从 A 城运往 D 地200吨,从 B 城运往 C 地220吨,运往 D 地80吨. **12.** 连接 ME、MF,因为 $AB \parallel CD$,所以 $\angle B = \angle C$. 又 $BE = CF$, $BM = CM$. 所以 $\triangle BME \cong \triangle CMF$,可得 $\angle EMB = \angle FMC$. $\angle EMF = \angle EMB + \angle BMF = \angle FMC + \angle BMF = \angle BMC = 180°$. 故 E、M、F 在同一直线上. **13.** 如图 30.1,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$AB = 2.5$、$BC = 0.7$,所以 $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} \approx \sqrt{2.5^2 - 0.7^2} = 2.4$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1B_1C$ 中,$A_1B_1 = 2.5$, $A_1C = AC - AA_1 = 2.4 - 0.4 = 2$. 所以 $B_1C = \sqrt{A_1B_1^2 - A_1C^2} = \sqrt{2.5 - 2^2} = 1.5$,

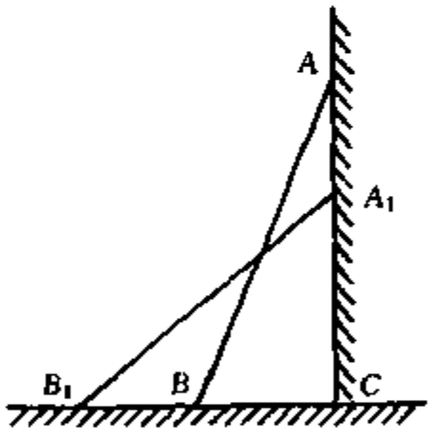


图 30.1

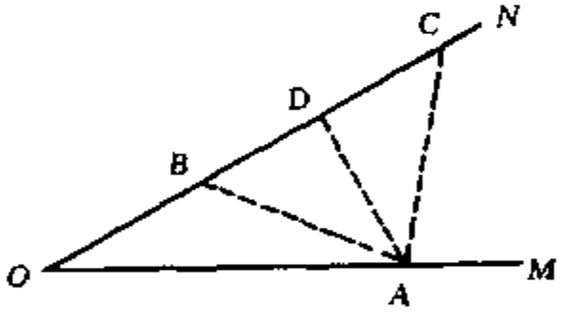


图 30.2

$B_1B = B_1C - BC = 1.5 - 0.7 = 0.8$. **14.** 如图 30.2 所示,作 $AD \perp ON$ 交 ON 于 D,由 $\angle MON = 30°$ 知,$AD = \frac{1}{2}OA = 40$ 米 < 50 米,所以,小学受噪音影响. 设拖拉机行驶到 B 点处开始产生影响. 行驶到 C 点处时无影响,则 $AB = AC = 50$(米). 从而,$BC = 2BD = 2\sqrt{AB^2 - AD^2} = 60$(米). 而拖拉机的速度,$v = \frac{18\,000}{3\,600} = 5$(米/秒). 所以得到影响的时间 $t = \frac{60}{5} = 12$(秒). **15.** 要使修路费用最少,在保证小路质量要求的前提下,关键要使古迹与两座小桥所连成的三角形周长最小,先假设两座桥址 Q、R 已选好,作古迹 P 关于 OM 的对称点

P'，关于ON的对称点P''，连$P'Q$、$P''R$，则$P'Q=PQ$、$P''R=PR$，这样的$\triangle PQR$的周长就展开成$P'Q+QR+RP''$，要使$\triangle PQR$的周长最小，就是要使P'、Q、R、P''在一条直线上，而P'、P''作为P的对称点已经确定，因此，直线$P'P''$可以确定．这样，$P'P''$与OM、ON的交点Q、R就是我们所要选的桥址．

测试题 1. 设明年产量为x台，则依题意可得到：$12x\leqslant 80\times 2\,400$，$5x\leqslant 2\,000+80\,000$．$x\leqslant 16\,000$，$x\leqslant 16\,400$．即$x\leqslant 16\,000$．即明年公司的产量可能的最大值是16 000台． 2. 因为粗管可供足够的水，全部用粗管当然可以达到供水目的，但花费过多，而如果全部用细管，从县城至每村都要分别安装1根，共需10根，显然不是最节省的方案，比如，OA段用粗管耗资$30\times 8\,000=240\,000$元，而用10根细管则用$10\times 30\times 2\,000=600\,000$元，费用高得多，所以必须粗细管适当搭配．由于粗管安装费用是细管的4倍，因此，需要用4根细管的路段采用粗管花费相同，需要用多于4根细管的路段采用粗管较合算．由县城$O—A—B—C—D—E—F$宜采用粗管，$F—G$用粗管或细管均可，$G—H$，$G—M$，$G—N$分别安装一根细管，总费用是$S=(30+5+2+4+2+3)\times 8\,000+2\times 8\,000+2\times 2\,000+(2+2)\times 2\,000+(2+2+5)\times 2\,000=414\,000$(元)． 3. 设等边三角形边长为1，则$AB+BC=2$，$AD+BC=\frac{\sqrt{3}}{2}+1\approx 1.866$，$OA+OB+OC=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}\approx 1.732$．可知第三种方案最短． 4. 如图30.3，过点$A$作$AC\perp OB$与$OB$的延长线交于点$C$．因为$\angle AOC=30°$，所以 $AC=\frac{1}{2}OA$．又$\angle ABC=45°$，所以 $AC=BC$．设$BC=x$海里，则$AC=x$海里，$OA=2x$海里．在$Rt\triangle OAC$中，由勾股定理得，$AC^2+OC^2=OA^2$，$x^2+OC^2=(2x)^2$．所以 $OC=\sqrt{3}x$，因此 $x+20=\sqrt{3}x$，$x=\frac{20}{\sqrt{3}-1}=(10\sqrt{3}+10)$．所以，再向西航行$(10\sqrt{3}+10)$海里，船离电视塔最近．

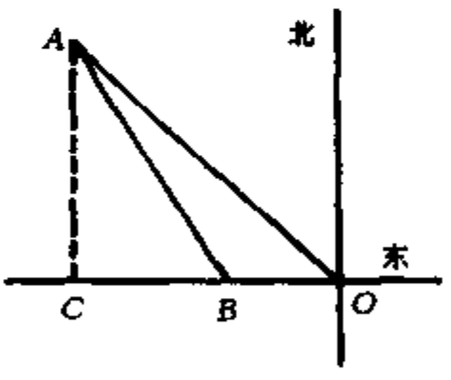


图 30.3

5. 本题实际上是在线段AB间找一点M，使$S=AM+CM+DM+BM$最小，可就M在AC间，CD间(含C、D)，DB间三种情况分别求出S，再进行比较，找出符合要求的M点．若加油站选在AC间，设为M'，则$S_1=AM'+CM'+DM'+BM'=(AM'+BM')+(CM'+DM')=AB+CD+2CM'$．若加油站选在$CD$间(包括$C$、$D$)，设为$M''$，则$S_2=AM''+CM''+DM''+BM''=(AM''+BM'')+(CM''$

$+ DM'') = AB + CD$. 若加油站选在 DB 间，设为 M'''，则 $S_3 = AB + CD + 2DM'''$. 可见 S_1、S_2、S_3 中 S_2 最小，并且 S_2 是一个固定的值. 所以加油站 M 选在 CD 段(包括 C、D) 任一点均可. 6. 假设 M 点在四边形 $ABCD$ 外，如图 30.4(1)，$M_1A + M_1C > AC$，$M_1D + M_1B > DB$，M_1 到 A、B、C、D 的距离之和 $M_1A + M_1B + M_1C + M_1D > AC + BD$，即供应站不应该设在 M_1 处. 假设 M 设在 A、B、C、D 四点之一，不妨设在 A 点，如图 30.4(2)，$M_2D + M_2B > DB$，M_2 到四工厂距离之和 $M_2D + M_2B + M_2C > BD + AC$，供应站不应设在 M_2 处. 假设 M 设在四边形 $ABCD$ 的一边上，不妨设在 DC 边上，如图 30.4(3)，$M_3A + M_3C > AC$，$M_3B + M_3D > BD$，$M_3A + M_3B + M_3C + M_3D > AC + BD$，即供应站不应设在 M_3 处. 最后假设 M 设在四边形 $ABCD$ 内，如图 30.4(4)，$M_4A + M_4C > AC$，$M_4B + M_4D > BD$，$M_4A + M_4B + M_4C + M_4D > AC + BD$，即 M 不应建在 M_4 处. 综上所述，M 应设在四边形 $ABCD$ 面对角线 AC、BD 交点.

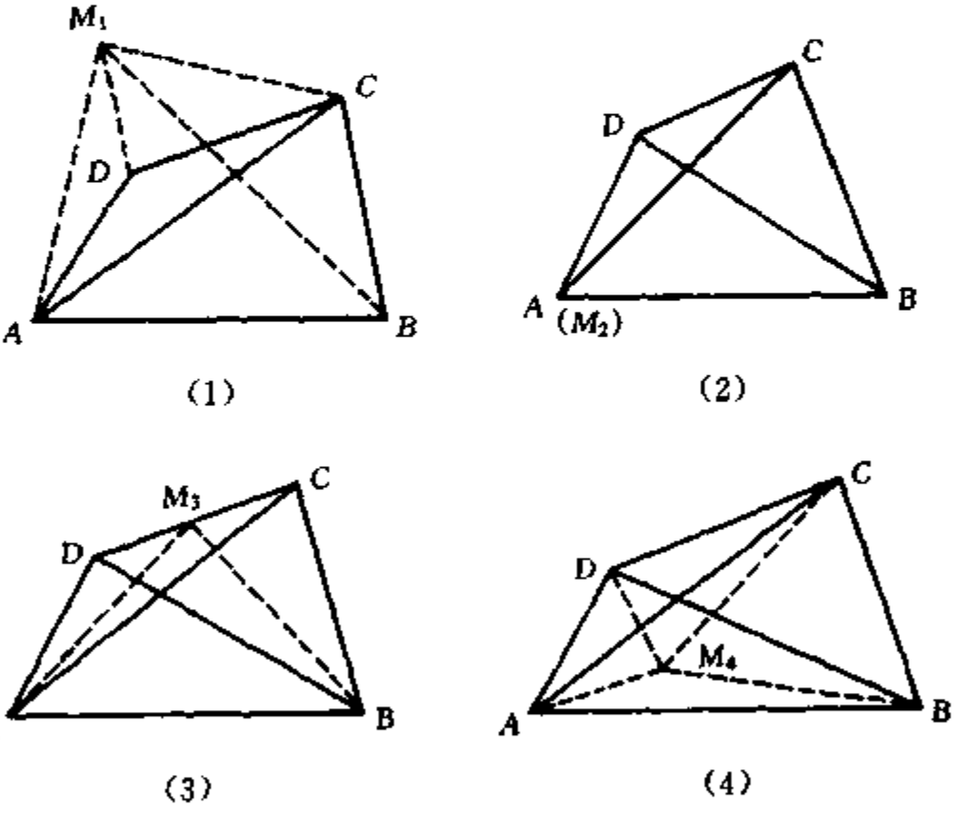


图 30.4

7. 虽然 A、B 间的最短线路是 AB，但由于草地上的车速较慢(需 3 小时)，如果利用一段公路，即使路途长了，而时间有可能缩短. (如先从公路上开到 C，再从 C 开到 B，只需 2.414 小时)，那么在何处离开公路最好呢？假设在 P 处离开，从草地开往 B，行车时间最短. 由于公路上速度是草地上速度的 2 倍. 设想把公路上行驶路程变为草地上行驶路程. 如图 30.5，过 A 作 $\angle CAE = 30°$，过 P 作 $PF \perp AE$ 于 F，则 $PF = \frac{1}{2}AP$. 但从 B 点到定射线 AE 的最短线段是线段 BE，BE 交 AC

于 D，因此 P 点应与 D 点重合(否则 $BP+PF>BD+DE$)．又因为 $BE\perp AE$，$BC\perp AC$，所以 $\angle DBC=\angle DAE=30°$，$BC=30$，$AB=90$．则 $AC=\sqrt{90^2-30^2}=60\sqrt{2}$，$DC=10\sqrt{3}$．$AD=60\sqrt{2}-10\sqrt{3}$，$BD=20\sqrt{3}$．$DE=30\sqrt{2}-5\sqrt{3}$．所以最短行车时间为 $\dfrac{BD+DE}{30}=\dfrac{2\times(30\sqrt{2}+15\sqrt{3})}{60}=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 2.28$(小时)．

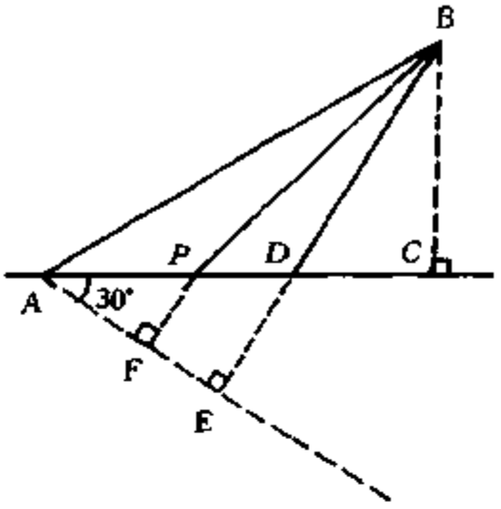


图 30.5

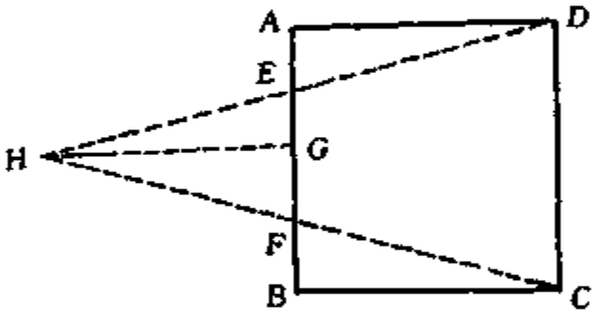
8. 医院应建在使最远的病人走的路尽可能短为好．为研究方便起见，令 A_i 与其他顶点的距离为 $d(A_i, A_1)$，$d(A_i, A_2)$，…$d(A_i, A_{10})$，把这 10 个距离中最大的称为顶点 A_i 的最大服务距离，记作 $D(A_i)$．考虑 A_1 与其他顶点的距离．A_1 与 A_2，线路 $A_1\to A_2$，$d(A_1, A_2)=5$，A_1 与 A_3，线路 $A_1\to A_3$，$d(A_1, A_3)=3$，A_1 与 A_4，线路 $A_1\to A_2\to A_4$，$d(A_1, A_4)=6$，A_1 与 A_5，线路 $A_1\to A_3\to A_5$，$d(A_1, A_5)=5$，A_1 与 A_6，线路 $A_1\to A_3\to A_6$，$d(A_1, A_6)=10$，A_1 与 A_7，线路 $A_1\to A_3\to A_5\to A_8\to A_7$，$d(A_1, A_7)=10$，$A_1$ 与 A_8，线路 $A_1\to A_3\to A_5\to A_8$，$d(A_1, A_8)=9$，A_1 与 A_9，线路 $A_1\to A_3\to A_5\to A_8\to A_9$，$d(A_1, A_9)=12$，$A_1$ 与 A_{10}，线路 $A_1\to A_3\to A_5\to A_8\to A_7\to A_{10}$，$d(A_1, A_{10})=13$．从而 $D(A_1)=13$．同法可得其他各点间的距离如下表，从而很容易求出每个顶点对应的最大服务距离．

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
A_1	0	5	3	6	5	10	10	9	12	13
A_2	5	0	2	1	4	9	6	7	10	9
A_3	3	2	0	3	2	7	7	6	9	10
A_4	6	1	3	0	5	7	5	6	9	8
A_5	5	4	2	5	0	5	5	4	7	8
A_6	10	9	7	7	5	0	2	1	4	5
A_7	10	6	7	5	5	2	0	1	4	3
A_8	9	7	6	6	4	1	1	0	3	4
A_9	12	10	9	9	7	4	4	3	0	5
A_{10}	13	9	10	8	8	5	3	4	5	0

其他各顶点的最大服务距离为 $D(A_2)=10$，$D(A_3)=10$，$D(A_4)=9$，$D(A_5)=8$，$D(A_6)=10$，$D(A_7)=10$，$D(A_8)=9$，$D(A_9)=12$，$D(A_{10})=13$. 因此，把医院建在 A_5 为较好的选择.

综合测试题一

1. C **2.** B **3.** A **4.** C **5.** C **6.** B **7.** A **8.** B **9.** D **10.** D **11.** -3 **12.** $\frac{a+b}{a-b}$ **13.** 5∶4，2∶1 **14.** 1 **15.** 18 **16.** 0 **17.** 6 **18.** 2 **19.** 45 **20.** 441(利用面积比) **21.** 若 $ax^2+bx+c=(d_1x+e_1)(d_2x+e_2)$，其中 d_1、d_2、e_1、e_2 都是非零整数. 于是 $d_1d_2=a>0$. 不妨设 d_1、d_2 同为正，则 $|1\,991d_1+e_1|\cdot|1\,991d_2+e_2|=p$，$p$ 为素数，左边两个绝对值必有一个为 1. 不妨设 $|1\,991d_1+e_1|=1$，若 $e_1<0$，因 $e_1e_2=c>0$，则 $e_2<0$，于是 $b=d_1e_2+d_2e_1$ 是负数，与 b 为正整数矛盾. 只能 $e_1>0$，则 $1\,991d_1+e_1>1$，与 $|1\,991d_1+e_1|=1$ 也矛盾. **22.** 连接 PM、PN. $\triangle MPN\cong\triangle MAN$，故 $\angle MPN=60°$，$\angle BMP=\angle NPC$，从而 $\triangle BPM\backsim\triangle CNP$. 故 $\frac{BP}{CN}=\frac{BM}{PC}$ **23.** 在 AB 上取 E、F，使 $AE<BF$，且 $AE+BF=EF=\frac{1}{2}AB$. 沿 ED、FC 剪开，拼成 $\triangle HCD$，易知 $CD<HD<HC$，$\angle CHD<\angle HCD<\angle HDC<90°$.



综合测试题二

1. D **2.** B **3.** A **4.** C **5.** B **6.** B **7.** A(作 $\angle C$ 的三等分角线，再用相似三角形性质) **8.** B **9.** C **10.** C[注意到 $x^2+y^2=\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(x-y)^2$] **11.** 12 **12.** $(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$ **13.** $\frac{\sqrt{5}}{2}a$ **14.** 3，-3 **15.** $2\sqrt{2}$ **16.** x **17.** 1 **18.** $\frac{1}{10}$(用塞瓦定理) **19.** $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\frac{11\sqrt{6}}{6}$ **20.** $\frac{2}{9}$ **21.** 取 $x=0$、1 代入已知，得 $m^4=d$，$(1+m)^4=65+d$. 解得 $d=16$. **22.** 由 $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$，得 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 与 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 要么同为无理数，要么同为有

理数，再利用 $\sqrt{x}$ 为无理数，且 $(\sqrt{x}-\sqrt{y})+(\sqrt{x}+\sqrt{y})=2\sqrt{x}$.

23. 设 $BD=x$，$CE=y$，$AF=z$，由勾股定理求得 $x=\frac{9}{4}$，$y=\frac{9}{2}$，$z=\frac{5}{8}$. 于是 $\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{81}{256}$，$\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{9}{16}$，$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{64}$，从而 $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{27}{256}$.

24. 用三角形全等证得 $\angle DQC=45°$.

25. 取 4 个无理数 $\{\sqrt{2},\sqrt{3},-\sqrt{2},-\sqrt{3}\}$，显然不满足条件，故 $n\geqslant 5$. 设 5 个无理数 a、b、c、d、e，视为 5 个点，若两数和为有理数，则相应两点间连红线，否则连蓝线.（1）无红色三角形. 否则，不妨设 $a+b$，$b+c$，$c+a$ 都是有理数，由 $(a+b)+(c+a)-(b+c)=2a$，与 a 为无理数矛盾.（2）必有同色三角形. 否则，图中必有一红圈，顶点上 5 个数中，两两之和均为有理数，设 $a+b$，$b+c$，$c+d$，$d+e$，$e+a$ 为有理数，由 $(a+b)-(b+c)+(c+d)-(d+e)+(e+a)=2a$ 推出矛盾. 这样，同色三角形必为蓝色三角形，n 的最小值是 5.

目　录

第一讲　一元二次方程 …… 1
第二讲　可化为一元二次方程的方程 …… 11
第三讲　一元二次方程的判别式 …… 19
第四讲　根与系数的关系及其应用 …… 27
第五讲　二元二次方程组 …… 37
第六讲　函数的基本概念与性质 …… 50
第七讲　一次函数与反比例函数 …… 59
第八讲　二次函数 …… 74
第九讲　函数的最大值与最小值 …… 87
第十讲　一元二次不等式 …… 99
第十一讲　锐角三角函数 …… 110
第十二讲　解直角三角形 …… 119
第十三讲　圆的基本性质 …… 132
第十四讲　直线与圆 …… 143
第十五讲　两圆的位置关系 …… 156
第十六讲　圆中的比例线段 …… 167
第十七讲　四点共圆 …… 180
第十八讲　一元二次方程的整数根 …… 192
第十九讲　不定方程 …… 202
第二十讲　$[x]$与$\{x\}$ …… 211
第二十一讲　几何定值问题 …… 223
第二十二讲　三角形的“五心” …… 236
第二十三讲　几何不等式 …… 254
第二十四讲　极端原理 …… 266

第二十五讲　数学建模…… 275

综合测试题一…… 294
综合测试题二…… 297

习题解答…… 299

第一讲　一元二次方程

一、知识要点和基本方法

一元二次方程的一般形式是

$$ax^2 + bx + c = 0,\ (a \neq 0)$$

它的简单形式就是 $Ax^2 = B$.

我们解一元二次方程，就是把所给的方程转化为形如 $Ax^2 = B$ 的方程来解. 这里的转化方式就是配方. 具体做法是：

因为　$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right] + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

所以　$ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ 就转化为

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0,$$

即

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \qquad ①$$

从而利用平方根的意义得到方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解.

配方法是解一元二次方程的基本方法，而公式法是由配方法演绎得到的. 由①式就可以得到解一元二次方程的求根公式：

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ (b^2 - 4ac \geqslant 0) \qquad ②$$

用求根公式解一元二次方程的方法称为公式法.

有时,用因式分解法解一元二次方程.

如果一元二次方程的两根为 x_1、x_2,那么我们就有基本等式

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),\ (a\neq 0) \qquad ③$$

这是一个非常有用的基本等式.

如果我们对式②的形式 $x_{1,2}=A\pm\sqrt{B}\ (B\geqslant 0)$"追根究源",就可以知道 $A\pm\sqrt{B}$ 一定是一个一元二次方程的根,从而必有形如 $ax^2+bx+c=0$ 的等式成立(这里 $x=A\pm\sqrt{B}$). 利用这一结果常可以简化一些复杂的数值计算.

二、例题精讲

例 1 已知 b、c 为方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根,且 $c\neq 0$,$b\neq c$. 求 b、c.

解 因为 b、c 是方程 $x^2+bx+c=0$ 的两个根,所以

$$\begin{cases} b^2-4c\geqslant 0, & ④\\ b^2+b^2+c=0, & ⑤\\ c^2+bc+c=0. & ⑥ \end{cases}$$

由⑥式及 $c\neq 0$ 得 $c=-b-1$,把它代入⑤式得

$$2b^2-b-1=0$$

即 $b=-\frac{1}{2}$,或 $b=1$.

当 $b=-\frac{1}{2}$ 时,$c=-b-1=-\frac{1}{2}$,则 $b=c$. 这与题意不符.

于是 $b=1$,$c=-b-1=-2$.

说明 如果 x_0 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根,那么就有 $ax_0^2+bx_0+c=0$. 反之亦然.

例 2 已知 m、n 是有理数,方程 $x^2+mx+n=0$ 有一个根是 $\sqrt{5}-2$. 求 $m+n$ 的值.

解 由题意得

$$(\sqrt{5}-2)^2+m(\sqrt{5}-2)+n=0,$$

即

$$(9-2m+n)+(m-4)\sqrt{5}=0.$$

因为 m、n 是有理数，所以必有

$$\begin{cases}9-2m+n=0,\\ m-4=0,\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}m=4,\\ n=-1.\end{cases}$$

于是 $$m+n=3.$$

例 3 已知 a 是方程 $x^2+x-\frac{1}{4}=0$ 的根，求 $\frac{a^3-1}{a^5+a^4-a^3-a^2}$ 的值.

解 由题意得

$$a^2+a-\frac{1}{4}=0,$$

即

$$a^2=\frac{1}{4}-a,\ a^2+a=\frac{1}{4}.$$

于是

$$\frac{a^3-1}{a^5+a^4-a^3-a^2}=\frac{a\left(\frac{1}{4}-a\right)-1}{a^3(a^2+a)-a(a^2+a)}$$

$$=\frac{\frac{a}{4}-a^2-1}{\frac{1}{4}a(a^2-1)}$$

$$=\frac{\frac{a}{4}-\left(\frac{1}{4}-a\right)-1}{\frac{1}{4}a\left(\frac{1}{4}-a-1\right)}$$

$$= \frac{5a-5}{\frac{a}{4}-\frac{1}{4}}$$

$$= 20.$$

例 4 设 x_1、x_2 是方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根，求 $x_1^3-4x_2^2+19$ 的值.

解 由题意得 $x_1 \neq x_2$，且

$$x_1^2 = 3-x_1,\ x_2^2 = 3-x_2.$$

于是

$$\begin{aligned} x_1^3-4x_2^2+19 &= x_1(3-x_1)-4(3-x_2)+19 \\ &= 3x_1-(3-x_1)+4x_2+7 \\ &= 4(x_1+x_2)+4. \end{aligned}$$

而 $x_2^2-x_1^2=(3-x_2)-(3-x_1)=x_1-x_2$，

即

$$(x_2-x_1)(x_2+x_1)=x_1-x_2.$$

又 $x_1 \neq x_2$，所以 $x_1+x_2=-1$.

故 $$x_1^3-4x_2^2+19=0.$$

说明 计算 x_1+x_2 可直接用第 3 讲中根与系数关系(即韦达定理)得到. 利用方程的根所满足的等式，去处理一些代数式的计算，可以起到“降次”作用而简化计算.

例 5 已知 $x=-\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$，求 $\sqrt{x^3+4x^2+x+9}$ 的值.

解 由题意得 $$x=\sqrt{3}-2,$$

即 $$x+2=\sqrt{3},$$

于是有 $$(x+2)^2=(\sqrt{3})^2,$$

即 $$x^2+4x+1=0.$$

所以 $\sqrt{x^3+4x^2+x+9}=\sqrt{x(x^2+4x+1)+9}$

$$=\sqrt{9}=3.$$

例 6 已知首项系数不相等的两个二次方程

$$(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0$$

及

$$(b-1)x^2+(b^2+2)x+(b^2+2b)=0$$

(a、b 是正整数)有一个公共根,求 $\dfrac{a^a+b^b}{a^{-b}+b^{-a}}$ 的值.

解 由题意知 $a>1$, $b>1$, $a\neq b$. 利用因式分解可解得上述两个方程的根分别为

$$a,\ \frac{a+2}{a-1};\quad b,\ \frac{b+2}{b+1}.$$

因为题中两个方程有一个公共根,则必有

$$a=\frac{b+2}{b+1}\quad 或\quad \frac{a+2}{a-1}=b.$$

上述两式都化简为

$$ab-a-b-2=0,$$

即

$$(a-1)(b-1)=3.$$

所以由 a、b 是大于 1 的正整数得

$$\begin{cases}a-1=1,\\ b-1=3\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}a-1=3,\\ b-1=1.\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}a=2,\\ b=4\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}a=4,\\ b=2.\end{cases}$$

故 $$\frac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}=a^bb^a=4^2\cdot 2^4=256.$$

说明 还可以设题中两个方程的公共根为 x_0,则就有

$$\begin{cases}(a-1)x_0^2-(a^2+2)x_0+(a^2+2a)=0,\\(b-1)x_0^2-(b^2+2)x_0+(b^2+2b)=0.\end{cases}$$

消去上述两式中的 x_0^2 项，就得到

$$(x_0-1)(a-b)(ab-a-b-2)=0,$$

因而得到

$$ab-a-b-2=0.$$

例7 已知方程 $ax^2+bx+c=x$ $(a>0)$ 的两个根 x_1、x_2 满足 $0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$. 当 $0<x<x_1$ 时，证明 $x<ax^2+bx+c<x_1$.

解 由题意得方程 $ax^2+(b-1)x+c=0$ 的两根为 x_1、x_2，所以，就有

$$ax^2+(b-1)x+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

因为 $0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$，$0<x<x_1$.

则 $$0<x<x_1<x_2<\frac{1}{a},$$

所以 $$x-x_1<0,\ x-x_2<0,$$

所以 $$(ax^2+bx+c)-x=a(x-x_1)(x-x_2)>0,$$

即

$$ax^2+bx+c>x.$$

又

$$\begin{aligned}&(ax^2+bx+c)-x_1\\&=[ax^2+(b-1)x+c]+x-x_1\\&=(x-x_1)[a(x-x_2)+1],\end{aligned}$$

且 $x_2<\frac{1}{a}$，即 $-x_2>-\frac{1}{a}$，$-ax_2>a\left(-\frac{1}{a}\right)=-1$，

则 $$1+a(x-x_2)>1-ax_2>1-a\cdot\frac{1}{a}=0,$$

所以

$$(ax^2+bx+c)-x_1<0,$$

即

$$ax^2+bx+c<x_1.$$

于是，当 $0<x<x_1$ 时，有

$$x<ax^2+bx+c<x_1.$$

练　习　题

A　组

1. 设 b、c 是整数，当 x 依次取 1、3、6、11 时，小明算得多项式 x^2+bx+c 的值分别为 3、5、21、93. 经验证，只有一个结果是错误的. 这个错误的结果是(　　).

(A) 当 $x=1$ 时，$x^2+bx+c=3$

(B) 当 $x=3$ 时，$x^2+bx+c=5$

(C) 当 $x=6$ 时，$x^2+bx+c=21$

(D) 当 $x=11$ 时，$x^2+bx+c=93$

2. 解方程 $x^2-|x|-1=0$.

3. 方程 $x^2+bx+1=0$ 与方程 $x^2-x-b=0$ 有一个公共实根，求 b 的值.

4. 已知 $x+\dfrac{1}{x}=3$，求 $x^4+3x^3-16x^2+3x-17$ 的值.

5. 已知 $x=\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}$，求 $x^4-12x^3-12x^2+36x+38$ 的值.

6. 关于 x 的一元二次方程 $3x^2+2ax-a^2=0$ 的一个解是 -1，求 a 的值.

7. 解方程　$573x^2-11x-584=0$.

8. 已知 c 是实数，$x^2-3x+c=0$ 的一个解的相反数是方程 $x^2+3x-c=0$ 的一个解. 求方程 $x^2-3x+c=0$ 的解.

B　组

9. 已知 $x=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$，求 $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值.

10. 解方程　$x^2-|2x-1|-4=0$.

11. 解方程　$x^2+2a|-x|-3a^2=0$.

12. 已知 $m^2=m+1$，$n^2=n+1$，$m\neq n$，求 m^5+n^5 的值.

13. 已知二次方程

$$a(x+1)(x+2)+b(x+2)(x+3)+c(x+3)(x+1)=0$$

有根 0 与 1，试求 $a:b:c$.

14. 设等腰三角形的一腰与底边的长分别是方程 $x^2-6x+a=0$ 的两根，当这样的三角形只有一个时，试求 a 的取值范围.

测 试 题

1. 已知 a 是方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的根，求 $\dfrac{2a^5 - 5a^4 + 2a^3 - 8a^2}{a^2 + 1}$ 的值.

2. 已知关于 x 的二次方程

$$3x^2 - (2a - 5)x - 3a - 1 = 0$$

的一个根是 2，求此方程的另一根及 a 的值.

3. 解方程 $(3x - 1)(x + 1) = (4x + 1)(x + 1)$.

4. 已知 x_0 是一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$$

的根，试求 $\Delta = b^2 - 4ac$ 与 $M = (2ax_0 + b)^2$ 的大小关系.

5. 解关于 x 的方程

$$(2x^2 - 3x - 2)a^2 + (1 - x^2)b^2 = ab(1 + x^2).$$

6. 当 a、b 为何值时，方程

$$x^2 + 2(1 + a)x + (3a^2 + 4ab + 4b^2 + 2) = 0$$

有实数根.

第二讲　可化为一元二次方程的方程

一、知识要点和基本方法

在中学里，对于次数超过 2 的整式方程（称为高次方程），通常运用因式分解和换元法，把它转化为一元二次方程或一元一次方程去求解.

对于分式方程，其求解的基本思想是转化为整式方程求解. 转化的基本方法是去分母和换元. 当然需针对分式方程特点进行恰当的去分母或换元.

对于无理方程，其求解的基本思想是转化为有理方程. 常用方法是：配方法、换元法、因式分解法.

二、例题精讲

例 1　解方程 $x^4+(x-4)^4=626$.

解　设法化为双二次方程.

设 $x=y+2$，则 $x-4=y-2$. 于是方程化为

$$(y+2)^4+(y-2)^4=626,$$

即
$$y^4+24y^2-297=0.$$

因式分解得
$$(y^2-9)(y^2+33)=0,$$

所以由 $y^2=-33$ 无实数解得 $y^2=9$，即

$$y=\pm 3,$$

从而
$$x=5 \quad 或 \quad x=-1.$$

说明 遇到类似于例1的方程，常取平均数(如 $(x+x-4)\div 2=x-2$)设元代换，可以简化问题.

例2 解方程 $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$.

解 观察特点，发现方程中各项系数关于中间项对称.

由方程可知 $x\neq 0$，则在方程两边同除以 x^2，得

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0.$$

令
$$x+\frac{1}{x}=y,$$

则
$$y^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2,$$

即
$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

于是上述方程化为

$$2y^2+3y-20=0.$$

解这个方程得 $y=\frac{5}{2}$ 或 $y=-4$.

当 $y=\frac{5}{2}$ 时，$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$，

即
$$2x^2-5x+2=0,$$

解之得
$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=2.$$

当 $y=-4$ 时，$x+\frac{1}{x}=-4$，

即
$$x^2+4x+1=0,$$

解之得
$$x_3=-2-\sqrt{3},\ x_4=-2+\sqrt{3}.$$

所以，原方程的解为

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=2,\ x_3=-2-\sqrt{3},\ x_4=-2+\sqrt{3}.$$

说明 类似于例 2 的方程称为倒数方程. 解这样的方程通常运用例 2 的解法求得结果.

例 3 解方程 $(x^2-x-1)^{x+2}=1$.

解 因为 $x^2-x-1\neq 0$, 所以考虑两种情形: (1) $x^2-x-1\neq\pm 1$. (2) $x^2-x-1=\pm 1$.

当 $x^2-x-1\neq\pm 1$ 时, $x+2=0$, 则 $x=-2$ 满足题意.

当 $x^2-x-1=1$ 时, 有 $(x^2-x-1)^{x+2}=1$, 则由 $x^2-x-1=1$ 得 $x=2$, 或 $x=-1$, 符合题意.

当 $x^2-x-1=-1$ 时, 有 $x=0$, 或 $x=1$. 但 $x=1$ 时, $(x^2-x-1)^{x+2}=(-1)^3=-1\neq 1$, 所以 $x=1$ 不是原方程的解.

于是, 原方程的解为 $x=-2$, 或 $x=-1$, 或 $x=0$, 或 $x=2$.

例 4 解方程 $|x|-\dfrac{4}{x}=\dfrac{3|x|}{x}$.

解 由题意得 $x\neq 0$.

当 $x>0$ 时, 原方程化为

$$x-\frac{4}{x}=3,$$

即

$$x^2-3x-4=0,$$

解这个方程得 $x=4$ 或 $x=-1$.

因 $x>0$, 则 $x=-1$ 不合要求舍去.

当 $x<0$ 时, 原方程化为

$$-x-\frac{4}{x}=-3,$$

即

$$x^2-3x+4=0.$$

因为 $x^2-3x+\dfrac{9}{4}+\dfrac{7}{4}=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$,

所以方程 $x^2-3x+4=0$ 无解.

故原方程的解为 $x=4$.

例 5 解方程

$$2x^2 - 15x - \sqrt{2x^2 - 15x + 1\,998} = -18.$$

解 由题意得 $2x^2 - 15x + 1\,998 \geqslant 0.$ ①

令 $y = \sqrt{2x^2 - 15x + 1\,998}$，则 $y \geqslant 0$，且原方程化为

$$y^2 - y - 1\,980 = 0.$$

解之得 $y = 45$，或 $y = -44$. 但 $y \geqslant 0$，
所以 $y = -44$ 不符合舍去.

于是有 $\sqrt{2x^2 - 15x + 1\,998} = 45$，即

$$2x^2 - 15x - 27 = 0.$$

解之得 $$x = 9 \quad 或 \quad x = -\frac{3}{2}.$$

由 $x = 9$ 和 $x = -\frac{3}{2}$ 都使得①式成立，可知原方程的解为

$$x = 9 \quad 或 \quad x = -\frac{3}{2}.$$

例 6 已知 a、b 都是负实数，且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a-b} = 0$，求 $\frac{b}{a}$ 的值.

解 由 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a-b} = 0$ 得

$$a^2 - b^2 - ab = 0,$$

即

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{b}{a} - 1 = 0.$$

因为 a、b 都是负实数，所以求 $\frac{b}{a}$ 的值就是求方程

$$x^2 + x - 1 = 0$$

的正根.

解这个方程得 $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 或 $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

因此 $\frac{b}{a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

例7 已知 $a\geqslant -6$，解关于 x 的方程

$$x^4-10x^3-2(a-11)x^2+2(5a+6)x+2a+a^2=0.$$

解 观察方程难以直接求得 x，考虑"退而求 a".

原方程可以变形为关于 a 的方程

$$a^2-2(x^2-5x-1)a+(x^4-10x^3+22x^2+12x)=0,$$

解之得

$$a=x^2-6x,\text{ 或 }a=x^2-4x-2.$$

对于 $a=x^2-6x$，即为 $x^2-6x-a=0$，

解之得 $$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9+a}\ (a\geqslant -6).$$

对于 $a=x^2-4x-2$，即为 $x^2-4x-2-a=0$，

解之得 $$x_{3,4}=2\pm\sqrt{6+a}.$$

所以，原方程的解为

$$x_1=3+\sqrt{9+a},\ x_2=3-\sqrt{9+a},\ x_3=2+\sqrt{6+a},$$

$$x_4=2-\sqrt{6+a}\ (a\geqslant -6).$$

例8 已知 $a\geqslant 2$，求方程

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$$

的所有实根之和.

解 由题意得 $x\geqslant 0$，$a+x>0$，$a\geqslant\sqrt{a+x}$，且有

$$a-\sqrt{a+x}=x^2.$$

令 $\sqrt{a+x}=y$，则 $a\geqslant y>0$，且有

$$a-y=x^2.$$

又 $$y^2 = a + x,$$

于是 $$a - y - y^2 = x^2 - y^2,$$

得 $$-(x + y) = (x - y)(x + y).$$

而 $$x + y > 0.$$

所以 $$x + y = -1,$$

即 $$x + \sqrt{a + x} = -1.$$

两边平方上述方程得 $x^2 + x + 1 - a = 0$,

解之得 $$x = \frac{-1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2}.$$

$x \geqslant 0$,所以满足要求的实数根为 $x = \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}$. 故原方程的实根之和为 $x = \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}$.

说明 此题求解也可运用例 7 的思路,有兴趣的读者可以自行尝试.

练　习　题

A　组

1. 解方程 $x^3-3x+2=0$.

2. 解方程 $(x+1)^4+(x+3)^4-272=0$.

3. 解方程 $2x^4+3x^3-x^2+3x+2=0$.

4. 解方程 $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=1$.

5. 解方程 $(4+\sqrt{15})^x+(4-\sqrt{15})^x=62$.

6. 解方程 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$.

7. 解方程 $\frac{4x}{x^3+2x^2+x}+\frac{5x}{x^3+2x^2-5x}+\frac{3}{2}=0$.

8. 解方程 $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{2x^2+x+2}{x^2+x+1}=\frac{19}{6}$.

9. 解方程 $4x^2+2x\sqrt{3x^2+x}+x-9=0$.

10. 解方程 $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+4x+3}=\sqrt{3x^2+4x+1}$.

B　组

11. 解方程 $6x^4-25x^3+12x^2+25x+6=0$.

12. 解方程 $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6$.

13. 解方程 $\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{2}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-3}$.

14. 解方程 $\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-11}=9$.

15. 已知 $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2x+2\sqrt{x^2+7x}-35=0$，求 $\sqrt{x}-\sqrt{x+7}$ 的值.

16. 解方程 $\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{\sqrt{3}+x}}=x$.

测 试 题

1. 解方程 $x^2+18x+30=2\sqrt{x^2+18x+45}$.

2. 解方程

$$\frac{1}{x^2+11x-8}+\frac{1}{x^2+2x-8}+\frac{1}{x^2-13x-8}=0.$$

3. 解关于 x 的方程

$$\frac{a+x}{b+x}+\frac{b+x}{a+x}=\frac{5}{2}.$$

4. 解方程

$$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z).$$

5. 解方程

$$\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{\ddots\qquad\ddots\\ 2+\cfrac{x}{1+\sqrt{x+1}}}}}=1.$$

第三讲　一元二次方程的判别式

一、知识要点和基本方法

我们已经知道一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 可以通过配方转化为

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a},$$

即

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

根据平方根的定义，当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，方程才有实数解；当 $b^2-4ac<0$ 时，方程无实数解. 人们把 b^2-4ac 称为一元二次方程的判别式，记为 Δ.

当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$，那么方程有两个相同的根（称为重根）；当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不同的实根，分别为 $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$，$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

由此可知，Δ 的正负性关联着方程有无实根.

因此说，有方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 就有 Δ. 反之有 Δ，可考虑到一元二次方程. 具有了这样的基本意识，往往方便我们解题.

二、例题精讲

例 1　已知 a，b，c 是三角形的三边，试判别方程 $b^2x^2+(b^2+c^2$

$-a^2)x+c^2=0$ 有无实根?

解 方程 $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$ 的判别式

$$\Delta=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2.$$

因为 $\Delta=(b-c-a)(b-c+a)(b+c-a)(a+b+c)$, $b+c>a$, $a+b>c$, $c+a>b$, 所以 $b-c-a<0$, $b-c+a>0$, $b+c-a>0$. 于是有

$$\Delta<0,$$

由此推知方程无实根.

例 2 当 a, b 为何值时, 方程 $x^2+2(1+a)x+3a^2+4ab+4b^2+2=0$ 有实根.

解 要使关于 x 的一元二次方程 $x^2+2(1+a)x+3a^2+4ab+4b^2+2=0$ 有实根, 则必有 $\Delta\geqslant 0$, 即

$$4(1+a)^2-4(3a^2+4ab+4b^2+2)\geqslant 0,$$

得

$$(a+2b)^2+(a-1)^2\leqslant 0.$$

因为 $$(a+2b)^2+(a-1)^2\geqslant 0,$$

所以 $$(a+2b)^2+(a-1)^2=0,$$

得

$$a=1,\ b=-\frac{1}{2}.$$

例 3 当 a 在什么范围内取值时, 方程 $|x^2-5x|=a$ 有且只有相异两实数根?

解 (1) 当 $a>0$ 时, 原方程化为

$$x^2-5x-a=0, \qquad ①$$

或

$$x^2-5x+a=0. \qquad ②$$

方程①的判别式为 $25+4a$, 因 $a>0$, 则 $25+4a>0$, 所以方程①必有两个相异两实根. 于是根据题意方程②必无实根, 那么方程

②的判别式 $25-4a$ 必须小于 0，即 $25-4a<0$，得 $a>\frac{25}{4}$.

所以，当 $a>\frac{25}{4}$ 时，方程 $|x^2-5x|=a$ 有且只有两个相异的实根.

(2) 当 $a=0$ 时，原方程变为 $x^2-5x=0$，有两个相异实根 $x=0$ 和 $x=5$.

(3) 当 $a<0$ 时，$|x^2-5x|=a$ 无实根.

综上所述，符合题意的 a 的范围是 $a=0$ 或 $a>\frac{25}{4}$.

例 4 设非零实数 a，b，c，d 满足

$$(a^2+b^2)d^2+b^2+c^2\leqslant 2b(a+c)d,$$

试判别一元二次方程 $ax^2-2bx+c=0$ 的实根个数.

解 由不等式

$$(a^2+b^2)d^2+b^2+c^2\leqslant 2b(a+c)d$$

得

$$(ad-b)^2+(bd-c)^2\leqslant 0.$$

于是

$$ad-b=bd-c=0,$$

即

$$b^2=ac.$$

方程 $ax^2-2bx+c=0$ 的判别式为

$$\Delta=(-2b)^2-4ac=4(b^2-ac)=0,$$

所以，此方程有两个相等的实数根.

例 5 已知三个关于 x 的方程 $x^2-x+m=0$，$(m-1)x^2+2x+1=0$ 和 $(m-2)x^2+2x-1=0$. 若其中至少有两个方程有实根，求实数 m 的取值范围.

解 方程 $x^2-x+m=0$ 的判别式

$$\Delta_1=1-4m,$$

方程 $(m-1)x^2+2x+1=0$ 的判别式

$$\Delta_2 = 4 - 4(m-1) = 4(2-m),$$

方程 $(m-2)x^2 + 2x - 1 = 0$ 的判别式

$$\Delta_3 = 4 + 4(m-2) = 4(m-1).$$

当 $m \leqslant \frac{1}{4}$ 时，$\Delta_1 \geqslant 0$，$\Delta_2 > 0$，$\Delta_3 < 0$；

当 $\frac{1}{4} < m < 1$ 时，$\Delta_1 < 0$，$\Delta_2 > 0$，$\Delta_3 < 0$；

当 $1 \leqslant m \leqslant 2$ 时，$\Delta < 0$，$\Delta_2 \geqslant 0$，$\Delta_3 \geqslant 0$；

当 $m > 2$ 时，$\Delta_1 < 0$，$\Delta_2 < 0$，$\Delta_3 > 0$.

所以当 $m \leqslant \frac{1}{4}$ 或 $1 \leqslant m \leqslant 2$ 时，至少有两个方程有实根.

例 6 求方程 $x + y = x^2 - xy + y^2 + 1$ 的实数解.

解 将方程 $x + y = x^2 - xy + y^2 + 1$ 看作为关于 x 的一元二次方程

$$x^2 - (y+1)x + (y^2 - y + 1) = 0.$$

要使得此方程有实数根 x，则必有

$$\Delta = (y+1)^2 - 4(y^2 - y + 1)$$

$$= -3(y-1)^2 \geqslant 0,$$

因为 $$-3(y-1)^2 \leqslant 0,$$

所以 $$y - 1 = 0,$$

即 $$y = 1.$$

把 $y = 1$ 代入方程得

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$

即 $$x = 1.$$

故方程的实数解为 $x = 1$，$y = 1$.

说明 在求解二元二次(或含字母)方程时，其基本思路之一，就是根据方程解的实数性，运用判别式分离变元而逐一讨论，求得

结果.

例 7 已知 $(x-z)^2-4(x-y)(y-z)=0$，试求 $x+z$ 与 y 的关系.

解 看到“$(x-z)^2-4(x-y)(y-z)=0$”，想到“$b^2-4ac=0$”(基本意识之一)，努力化为一元二次方程的等根问题解决.

当 $x-y\neq 0$ 即 $x\neq y$ 时，作方程

$$(x-y)t^2-(x-z)t+(y-z)=0,$$

因为 $\Delta=(x-z)^2-4(x-y)(y-z)=0$，

所以上述方程有两个相等的实根.

又 $(x-y)-(x-z)+(y-z)=0$，则这个方程的实数根为 $t_1=t_2=1$. 于是

$$(x-y)t^2-(x-z)t+(y-z)=(x-y)\cdot(t^2-2t+1).$$

从而推得 $x-z=2(x-y)$，$y-z=x-y$，即有

$$x+z=2y.$$

当 $x-y=0$ 即 $x=y$ 时，由题中等式得 $x-z=0$，即 $x=z$. 于是 $x+z=2y$.

故 $$x+z=2y.$$

练　习　题

A　组

1. 已知关于 x 的方程 $(a^2-1)x^2-2(a+1)x+1=0$ 恰有一个实根. 求 a 的值.

2. 已知方程 $2x(kx-4)-x^2+6=0$ 无实数根，求 k 的取值范围.

3. 已知关于 x 的方程

$$x^2-2\sqrt{-a}x+\frac{(a-1)^2}{4}=0$$

有实数根，其中 a 为实数，求 $a^{1999}+x^{1999}$ 的值.

4. 已知 x、y 为实数，且满足 $y=\dfrac{2x}{x^2+x+1}$，求 y 的最大值和最小值.

5. m 为何值时，方程

$$2(m+1)x^2+4mx+3m-2=0$$

有两个不相等的实数根.

6. 已知关于 x、y 方程

$$5x^2-3xy+\frac{1}{2}y^2-2x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}=0,$$

求它的实数解.

7. 已知二次方程 $(b-c)x^2+(a-b)x+c-a=0$ 有相等的两实根，求 a、b、c 之间关系.

8. 已知实数 a、b、c、r、p 满足 $pr>1$，$pc-2b+ra=0$，求证：一元二次方程

$$ax^2+2bx+c=0$$

必有实数根.

B 组

9. 证明：对于正数 a、b、c，如果方程

$$c^2x^2+(a^2-b^2-c^2)x+b^2=0$$

没有实数解，那么，以 a、b、c 为长的线段能够组成一个(面积不为零的)三角形.

10. 设 a、b、c、x 都是实数，$a^2+b^2\neq 0$，且 $(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0$，证明：$b^2=ac$，且 $x=\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$.

11. 若 $a>0$，且 $a^2-2ab+c^2=0$ 和 $bc>a^2$，试判断 a、b、c 的大小.

12. 已知 a、b、c、d 为实数，满足 $ac=2(b+d)$，求证：方程 $x^2+ax+b=0$ 和 $x^2+cx+d=0$ 至少有一个实数解.

13. 试求分式 $\dfrac{2x-3}{x^2-x+1}$ 的最大值与最小值.

14. 已知实数 x、y、z 满足

$$x+y+z=5,\ xy+yz+zx=3.$$

求 z 的最大值.

15. 已知实数 x、y、z 满足 $x+y+z=a$，$x^2+y^2+z^2=\dfrac{a^2}{2}$，求证：$x$、$y$、$z$ 都不大于 $\dfrac{2}{3}a$ $(a>0)$.

16. 设 a、b、c 为实数，且对任何实数 p，方程 $ax^2+bx+c+p=0$ $(b\neq 0)$ 至少有一个实根. 求 a 的值.

测　试　题

1. 判别方程 $(x-a)(x-a-b)=1$ 的实根个数，这里 a、b 是实数.

2. 设 a、b、c 为互不相等的实数. 求证：二次方程 $ax^2+2bx+c=0$，$bx^2+2cx+a=0$，$cx^2+2ax+b=0$ 不可能同时都有等根.

3. 已知 x、y 是实数满足 $(x-3)^2+(y-3)^2=6$，求 $\frac{y}{x}$ 的最大值.

4. 已知实数 a、b、c 满足 $a=6-b$，且 $c^2=ab-9$，求 $a^{1999}-b^{1999}$ 的值.

第四讲　根与系数的关系及其应用

一、知识要点和基本方法

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的两根为 x_1、x_2，那么就有

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

比较等式两边对应项的系数，得

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, & ① \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. & ② \end{cases}$$

①式与②式也可以运用求根公式得到.

上述公式①与②，人们称之为韦达定理，即根与系数的关系.

因此，我们知道，给定一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 就一定有①与②式成立. 反过来，如果有两数 x_1，x_2 满足①与②，那么这两数 x_1，x_2 必是一个一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根. 利用这一基本知识常可以简捷地处理问题.

利用根与系数关系，我们可以不直接求方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，而知其根的正、负性.

在 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$ 的条件下，我们有如下结论：

当 $\dfrac{c}{a}<0$ 时，方程的两根必一正一负. 又若 $-\dfrac{b}{a}\geqslant 0$，则此方程的正根不小于负根的绝对值；又若 $-\dfrac{b}{a}<0$，则此方程的正根小于

负根的绝对值.

当 $\frac{c}{a}>0$ 时，方程的两根同正或同负. 又若 $-\frac{b}{a}>0$，则此方程的两根均为正根；又若 $-\frac{b}{a}<0$，则此方程的两根均为负根.

二、例题精讲

例 1 已知 $5a^2-1\,999a+8=0$ 及 $8b^2+1\,999b+5=0$，求 $\frac{a}{b}$ 的值.

解 因为 $$5a^2+1\,999a+8=0,$$

$$5\left(\frac{1}{b}\right)^2+1\,999\left(\frac{1}{b}\right)+8=0,$$

又 $1\,999^2-4\times5\times8>0$，所以 a、$\frac{1}{b}$ 是方程

$$5x^2+1\,999x+8=0$$

的两个不同的根. 于是由根与系数关系得

$$a\cdot\frac{1}{b}=\frac{8}{5},$$

即 $$\frac{a}{b}=\frac{8}{5}.$$

例 2 已知方程 $x^2-3x+2-k^2=0$，k 为实数且 $k\neq0$，试证明此方程有两实根，其中一根大于 1，另一根小于 1.

解 方程 $x^2-3x+2-k^2=0$ 的判别式

$$\Delta=(-3)^2-4(2-k^2)=1+4k^2>0,$$

所以方程有两实根 α、β，且 $\alpha\neq\beta$.

由根与系数关系得

$$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=2-k^2,$$

则

$$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$$

$$=2-k^2-3+1$$

$$=-k^2<0\ (k\neq 0),$$

于是可知 α 与 β 中一个大于 1，另一个小于 1.

说明 本题可转化方程为 $y^2-y-k^2=0$（这里 $y=x-1$）直接讨论.

例 3 解方程

$$\frac{x^2+3x}{2x^2+2x-8}+\frac{x^2+x-4}{3x^2+9x}=\frac{11}{12}.$$

解 观察方程中各项之间关系，发现方程左边两项. 故可令

$$\frac{x^2+3x}{2x^2+2x-8}=A,\ \frac{x^2+x-4}{3x^2+9x}=B.$$

则

$$\begin{cases}A+B=\dfrac{11}{12},\\ AB=\dfrac{1}{6}.\end{cases}$$

所以 A、B 是方程

$$t^2-\frac{11}{12}t+\frac{1}{6}=0$$

的两根，解之得

$$t_1=\frac{2}{3},\ t_2=\frac{1}{4}.$$

当 $t=\frac{2}{3}$ 时，有 $\frac{x^2+3x}{2x^2+2x-8}=\frac{1}{4}$，得 $x_1=\frac{5+\sqrt{89}}{2}$，$x_2=\frac{5-\sqrt{89}}{2}$；

当 $t=\frac{1}{4}$ 时，有 $\frac{x^2+3x}{2x^2+2x-8}=\frac{2}{3}$，得 $x_3=-1$、$x_4=-4$.

易知 x_1、x_2、x_3、x_4 均符合题意.

故原方程的解为

$$x_1=\frac{5+\sqrt{89}}{2},\ x_2=\frac{5-\sqrt{89}}{2},\ x_3=-1,\ x_4=-4.$$

说明 可采用第 2 讲中的换元手法，令 $y=\frac{x^2+3x}{x^2+x-4}$，把方程化为 $\frac{1}{2}y+\frac{1}{y}=\frac{11}{12}$ 解得 y 而解得 x.

例 4 解方程

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=4.$$

解 因 $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$，则令 $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=a$，$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=b$，有

$$\begin{cases}a+b=4,\\ ab=1.\end{cases}$$

所以 a、b 是方程

$$t^2-4t+1=0$$

的两根，解之得 $t=2\pm\sqrt{3}$，即

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=2\pm\sqrt{3},$$

得

$$x=2 \text{ 或 } x=-2.$$

说明 此题还可采用第 2 讲的换元手法得到结果.

例 5 设实数 a、b、c 满足

$$a^2-bc-8a+7=0, \qquad ①$$

$$b^2+c^2+bc-6a+6=0, \qquad ②$$

求 a 的取值范围.

解 由①得

$$bc = a^2 - 8a + 7. \qquad ③$$

把③代入②整理得

$$(b + c)^2 = bc + 6a - 6 = (a - 1)^2,$$

即

$$b + c = \pm (a - 1). \qquad ④$$

由③式及④式可得 b、c 是关于 t 的方程

$$t^2 \mp (a - 1)t + a^2 - 8a + 7 = 0$$

的两根. 因为 a、b、c 都是实数,所以 $\Delta \geqslant 0$,即

$$[\mp (a - 1)]^2 - 4(a^2 - 8a + 7) \geqslant 0.$$

得

$$1 \leqslant a \leqslant 9.$$

例 6 已知方程 $x^2 + 5x + 1 = 0$ 的两根为 α、β,方程 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 的两根为 γ、δ,求 $(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta)$ 的值.

解 由题意的根与系数关系得

$$\alpha + \beta = -5,\ \alpha\beta = 1;$$

$$\gamma + \delta = -3,\ \gamma\delta = 1,$$

所以

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta)$$

$$= [\alpha\beta - (\alpha + \beta)\gamma + \gamma^2][\alpha\beta + (\alpha + \beta)\delta + \delta^2]$$

$$= [1 + 5\gamma + \gamma^2][1 - 5\delta + \delta^2].$$

又 γ、δ 是方程 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 的两根,则有

$$1 + \gamma^2 + 3\gamma = 0,\ 1 + \delta^2 + 3\delta = 0,$$

于是

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta)$$

$$= 2\gamma \cdot (-8\delta)$$

$$= -16\gamma\delta$$

$$= -16.$$

说明 此题的上述解法是利用了根与系数关系及根的定义，还可以直接利用求根公式或者仅用根与系数的关系求得.

例 7 已知 a、b、c 为实数，且 $a>0$，$b^2-ac<0$，x_1、x_2 是方程 $x^2-(a+c)x-b^2+ac=0$ 的两根. 证明：

(1) x_1、x_2 都是正数.

(2) 若 $x_1 \geqslant x_2$，则 $x_1 \geqslant a$，$x_2 \geqslant c$.

证 (1) 因为 $a>0$，$b^2-ac<0$，即 $0 \leqslant b^2<ac$，所以 $c>0$.

方程 $x^2-(a+c)x-b^2+ac=0$ 的判别式

$$\Delta=(a+c)^2-4(-b^2+ac)=(a-c)^2+4b^2 \geqslant 0,$$

则方程有两个实根 x_1、x_2. 因此由根与系数的关系得

$$\alpha+\beta=a+c>0,$$

$$\alpha\beta=-b^2+ac>0,$$

由此可知方程两根 x_1、x_2 都是正数.

(2) 因为方程的两根为 x_1、x_2，则有

$$x^2-(a+c)x-b^2+ac=(x-\alpha)(x-\beta),$$

于是

$$(a-\alpha)(a-\beta)=-b^2 \leqslant 0.$$

又 $\alpha \geqslant \beta$，则 $\beta \leqslant a \leqslant \alpha$.

同样地，有

$$(c-\alpha)(c-\beta)=-b^2 \leqslant 0,$$

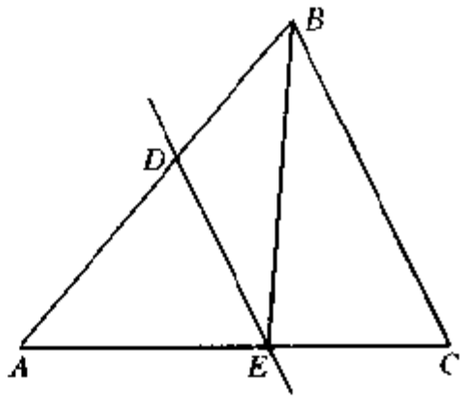
则由 $\alpha \geqslant \beta$ 得

$$\beta \leqslant c \leqslant \alpha.$$

故结论成立.

例 8 如图，已知$\triangle ABC$ 和平行于 BC 的直线 DE，且 $S_{\triangle BDE}=$

k^2（定值），这里 $S_{\triangle BDE}$ 是 $\triangle BDE$ 的面积，问当 k^2 与 $S_{\triangle ABC}$ 之间满足什么关系时，存在直线 DE，有几条？



解 设 $\dfrac{AD}{AB}=x$，$S_{\triangle ABC}=S$，则

$$S_{\triangle ADE}=x^2S,\ S_{\triangle ABE}=xS.$$

于是由 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ADE}+S_{\triangle BDE}$ 得

$$xS=x^2S+k^2,$$

即

$$x^2S-xS+k^2=0.$$

此方程的判别式 $\Delta=S^2-4k^2S$，要使此方程有实数根，则

$$S^2-4k^2S\geqslant 0,$$

即

$$S\geqslant 4k^2.$$

设这个方程的两根为 x_1、x_2，则由根与系数关系得

$$x_1+x_2=1,$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{k^2}{S}.$$

所以 x_1、x_2 都为非负数，又 $S\geqslant 4k^2$，则有

$$0\leqslant x_1,\ x_2<1.$$

于是，当 $S=4k^2$ 时，$x_1=x_2$，即只有一条直线 DE；当 $S>4k^2$ 时，$x_1\neq x_2$，即有这样的两条直线 DE 满足要求.

练　习　题

A　组

1. 已知方程 $(1\,999x)^2 - 1\,998 \times 2\,000x - 1 = 0$ 的较大根为 m，$x^2 + 1\,998x - 1\,999 = 0$ 的较小根为 n，求 $m - n$ 的值.

2. 设 a，b 是相异两实数，满足

$$a^2 = 4a + 3,\ b^2 = 4b + 3,$$

求 $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$ 的值.

3. 已知 $m^2 + 71m - 1\,999 = 0$，$n^2 + 71n - 1\,999 = 0$，且 $m \neq n$，求 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的值.

4. 设实数 a、b 分别满足

$$19a^2 + 99a + 1 = 0,\ b^2 + 99b + 19 = 0,$$

且 $ab \neq 1$，求 $\frac{ab + 4a + 1}{b}$ 的值.

5. 设方程 $2x^2 - 3x + m = 0$ 的一根为另一根的 2 倍，求 m 的值.

6. 设方程 $2x^2 - (a - 1)x + a + 3 = 0$ 的两根差为 1，求 a 的值.

7. 已知一元二次方程 $x^2 - 4ax + 5a^2 - 6a = 0$ 有两个实根，且两根之差的绝对值为 6，求 a 的值.

8. 已知一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根之比为 2∶3，求证：$6b^2 = 25ac$.

9. 已知方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两实根是 a，c $(ac \neq 0)$，则方程 $9cx^2 + 3bx + a = 0$ 的根的情况是(　　).

(A) 必有一根为 $\frac{1}{3}$　　(B) 必有一根为 $\frac{1}{9}$

(C) 两根分别为$\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{3}$　　(D) 必有一根为$\frac{1}{3}$或$-\frac{1}{3}$.

B　组

10. 已知关于x的一元二次方程$ax^2+bx+c=0$没有实数解，甲由于看错了二次项系数，误求得两根为2和4，乙由于看错了其一项系数的符号，误求得两根为-1和4，求$\frac{2b+3c}{a}$的值.

11. 求证：对任何矩形A，总存在一个矩形B，使得矩形B与矩形A的周长和面积比等于常数k($k\geqslant 1$).

12. 已知a是实数，求证：方程$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+a^2}=0$(1)当$a$为正数时，有两个异号的实数根；(2)当$a$为负数时，正根必小于$-\frac{2}{3}a$，负根必大于$-\frac{2}{3}a^2$.

13. 已知方程$x^2-(2+\sqrt{3})x+2\sqrt{3}=0$的一根为直角三角形的斜边$c$，另一根为直角边$a$，求此直角三角形的第三边$b$.

14. 已知x的二次方程

$$x^2-ax+a^2-4=0$$

(1)a为何值时，方程有两个正根？(2)a为何值时，方程只有一个正根？(3)a为何值时，方程有一正根、一负根？

15. 已知x_1、x_2是方程

$$x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$$

的两实根，求$x_1^2+x_2^2$的最大值.

测　试　题

1. 已知方程 $x^2+2ax=3$ 的两根的平方和为 10，求 $|a|$ 的值.

2. 方程 $(a-2)x^2-2ax+a-1=0$ 有两个负根，求 a 的取值范围.

3. a 为何值时，方程

$$(a+1)x^2+(a-5)x+(a+6)=0$$

的一个根比另一个根的 2 倍小 1？

4. 已知方程 $x^2-2ax+a+b=0$ 的两根为 α、β，试求 $(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ 的最小值.

第五讲　二元二次方程组

一、知识要点和基本方法

解二元二次方程组的基本思想是“消元”和“降次”.

在解二元二次方程组或特殊的方程组时，常把它们转化为基本方程组

$$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b \end{cases}$$

来解决，特别是由二元对称方程(方程中未知数 x，y 互换后方程保持不变的二元方程)组成的方程组，其基本解题思想之一就是化方程组为上述基本方程组.

在处理二元二次方程时，还常视其为关于一个未知数的含字母的一元二次方程，利用一元二次方程的根的判别式及其他基本知识来“各个击破”，达到求解二元二次方程组的目的.

二、例题精讲

例 1　已知 $x+y=3$，$x^2+y^2-xy=4$，求 $x^4+y^4+x^3y+xy^3$ 的值.

解　由题意得

$$\begin{cases} x+y=3, & ① \\ x^2+y^2-xy=4. & ② \end{cases}$$

①式平方得 $x^2+y^2+2xy=9$，并把②式代入得

$$xy=\frac{5}{3}.$$

于是原方程化为基本方程组

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=\dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned} & x^4+y^4+x^3y+xy^3 \\ =&(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+xy(x^2+y^2) \\ =&(x^2+y^2+2xy)(x^2+y^2-xy) \\ =&(x+y)^2[(x+y)^2-3xy], \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & x^4+y^4+x^3y+xy^3 \\ =&3^2\times\left[3^2-3\times\frac{5}{3}\right]=36. \end{aligned}$$

例 2 解方程组

$$\begin{cases} xy+x+y=-13, & ③ \\ x^2+y^2=29. & ④ \end{cases}$$

解 观察方程组的特征，它是对称方程组，则可以化为基本方程组.

把③×2+④得

$$(x+y)^2+2(x+y)-3=0,$$

即

$$[(x+y)+3][(x+y)-1]=0.$$

所以 $x+y+3=0$ 或 $x+y-1=0$，

把它们代入③式得

$$\begin{cases} x+y=-3, \\ xy=-10 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x+y=1, \\ xy=-14. \end{cases}$$

解方程组 $\begin{cases} x+y=-3, \\ xy=-10 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_1=-5, \\ y_1=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2=2, \\ y_2=-5. \end{cases}$

解方程组 $\begin{cases} x+y=1, \\ xy=-14 \end{cases}$

得 $\begin{cases} x_3=\dfrac{1+\sqrt{57}}{2}, \\ y_3=\dfrac{1-\sqrt{57}}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_4=\dfrac{1-\sqrt{57}}{2}, \\ y_4=\dfrac{1+\sqrt{57}}{2}. \end{cases}$

故方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=-5, \\ y_1=2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=2, \\ y_2=-5, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=\dfrac{1+\sqrt{57}}{2}, \\ y_3=\dfrac{1-\sqrt{57}}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=\dfrac{1-\sqrt{57}}{2}, \\ y_4=\dfrac{1+\sqrt{57}}{2}. \end{cases}$$

说明 解基本方程组

$$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b \end{cases}$$

有两种基本解法：一种是代入消元，另一种是转化为一元二次方程的两根，求得结果.

例 3 解方程组

$$\begin{cases} (x^2+3x)(x+y)=40, & ⑤ \\ x^2+4x+y=14. & ⑥ \end{cases}$$

解 由⑥式得 $(x^2+3x)+(x+y)=14$，则可令 $x^2+3x=u$，$x+y=v$，有

$$\begin{cases} uv=40, \\ u+v=14. \end{cases}$$

解这个方程组得 $\begin{cases} u_1=10, \\ v_1=4, \end{cases}$ $\begin{cases} u_2=4, \\ v_2=10. \end{cases}$

由 $\begin{cases}u_1 = 10,\\ v_1 = 4\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x^2 + 3x = 10,\\ x + y = 4.\end{cases}$

解之得 $\begin{cases}x_1 = 2,\\ y_1 = 2,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2 = -5,\\ y_2 = 9.\end{cases}$

由 $\begin{cases}u_2 = 4,\\ v_2 = 10\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x^2 + 3x = 4,\\ x + y = 10.\end{cases}$

解之得 $\begin{cases}x_3 = 1,\\ y_3 = 9,\end{cases}$ $\begin{cases}x_4 = -4,\\ y_4 = 14.\end{cases}$

所以方程组的解为

$$\begin{cases}x_1 = 2,\\ y_1 = 2,\end{cases}\quad\begin{cases}x_2 = -5,\\ y_2 = 9,\end{cases}\quad\begin{cases}x_3 = 1,\\ y_3 = 9,\end{cases}\quad\begin{cases}x_4 = -4,\\ y_4 = 14.\end{cases}$$

例 4 解关于实数 x、y、z 的方程

$$(8zx^2 - 27y^2 + 9yz)^2 + (3y^2 - yz + 2z^2 - 8x)^2 + 9$$

$$= 6x - x^2.$$

解 一个方程含有三个未知数，则必蕴含着方程组.

原方程变形为

$$(8zx^2-27y^2+9yz)^2+(3y^2-yz+2z^2-8x)^2+(3-x)^2=0,$$

根据平方数的非负性可知，满足题中方程的 x、y、z 必满足方程组

$$\begin{cases}8zx - 27y^2 + 9yz = 0,\\ 3y^2 - yz + 2z^2 - 8x = 0,\\ 3 - x = 0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x = 3,\\ 3y^2 - yz - 8z = 0, & ⑦\\ 3y^2 - yz + 2z^2 = 24. & ⑧\end{cases}$$

那么 ⑧ − ⑦ 得 $z^2 + 4z - 12 = 0$,

解得 $z=2$ 或 $z=-6$.

把 $z=2$ 代入⑦式解之得 $y=\frac{8}{3}$ 或 $y=-2$.

把 $z=-6$ 代入⑦式得 $y^2+2y+16=0$，因 $\Delta=4-4\times16<0$，则此方程无解.

所以，方程的解为

$$\begin{cases}x=3,\\ y=\frac{8}{3},\\ z=2\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x=3,\\ y=-2,\\ z=2.\end{cases}$$

例5 解方程组

$$\begin{cases}y^2=x^3-3x^2+2x, & ⑨\\ x^2=y^3-3y^2+2y. & ⑩\end{cases}$$

解 ⑩式减去⑨式得

$$(x-y)(x+y)=(y-x)(x^2+y^2+xy)+3(x-y)(x+y)+2(y-x),$$

即

$$(x-y)[x^2+y^2+xy-2(x+y)+2]=0,$$

则 $x=y$ 或 $x^2+y^2+xy-2(x+y)+2=0$.

若 $x=y$，则⑨式变为 $x^3-4x^2+2x=0$，得 $x=0$ 或 $x=2-\sqrt{2}$ 或 $x=2+\sqrt{2}$.

若 $x^2+y^2+xy-2(x+y)+2=0$，则有

$$2(x^2+y^2)+2xy-4(x+y)+4=0,$$

即

$$x^2+y^2+(x+y)^2-4(x+y)+4=0,$$

得

$$x^2+y^2+(x+y-2)^2=0,$$

于是 $x=y=0$ 但 $x+y=2$，这是不可能的. 这说明 $x^2+y^2+xy-2(x+y)+2=0$ 无解.

所以，原方程组的解为

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=2-\sqrt{2}, \\ y=2-\sqrt{2} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=2+\sqrt{2}, \\ y=2+\sqrt{2}. \end{cases}$$

说明 还可以将 $x^2+y^2+xy-2(x+y)+2=0$ 转化为关于 x 的方程 $x^2+(y-2)x+(y^2-2y+2)=0$，利用判别式 $\Delta=(y-2)^2-4(y^2-2y+2)=-3y^2+4y-4<0$，确定方程无解.

例 6 求下列方程组的实数解

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy-3x+3=0, & ⑪ \\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-2z-7=0. & ⑫ \end{cases}$$

解 方程组中有三个未知数，只有两个方程，则需考虑解的存在性，有两种基本途径，其一是利用判别式，其二是配方. 这里我们尝试用判别式.

⑪式可以变形为关于 x 的方程

$$x^2-(y+3)x+y^2+3=0,$$

则由 x 是实数，必有 $\Delta y=(y+3)^2-4(y^2+3)\geqslant 0$，而 $\Delta y=-3(y-1)^2\leqslant 0$，故 $y-1=0$，即 $y=1$.

从而有

$$\begin{cases} x^2-x-3x+4=0, \\ x^2+z^2-x-z-2z-6=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2, \\ z^2-3z-4=0. \end{cases}$$

解之得 $\begin{cases} x=2, \\ z=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2, \\ z=-1. \end{cases}$

所以，原方程的实数解为

$$\begin{cases} x=2, \\ y=1, \\ z=4 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=2, \\ y=1, \\ z=-1. \end{cases}$$

例 7 解方程组

$$\begin{cases}\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}-\sqrt{x+y-3}=\sqrt{3}, & ⑬\\ 2x+y+\dfrac{1}{y}=6. & ⑭\end{cases}$$

解 由方程组知

$$x+\frac{1}{y}\geqslant 0, x+y-3\geqslant 0, \text{且 } y\neq 0. \qquad ⑮$$

令 $\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}=u$，$\sqrt{x+y-3}=v$，$u\geqslant 0$，$v\geqslant 0$，则

$$\begin{cases}u-v=\sqrt{3},\\ u^2+v^2=3,\end{cases}$$

即有 $$uv=0.$$

得 $$u=0 \text{ 或 } v=0.$$

若 $u=0$，则 $v=-\sqrt{3}$，但 $v\geqslant 0$，故不符合题意.

若 $v=0$，则 $u=\sqrt{3}$. 于是有

$$\begin{cases}\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}=\sqrt{3},\\ \sqrt{x+y-3}=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=3,\\ x+y-3=0.\end{cases}$$

解之得 $$\begin{cases}x_1=2,\\ y_1=1,\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=4,\\ y_2=-1.\end{cases}$$

易知符合⑮式，故原方程组的解为 $\begin{cases}x_1=2,\\ y_1=1,\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=4,\\ y_2=-1.\end{cases}$

例 8 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z+x}=\dfrac{1}{3},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

解 由方程组可知

$$x\neq 0,\ y\neq 0,\ z\neq 0,\ y+z\neq 0,\ x+z\neq 0,\ x+y\neq 0 \quad ⑯$$

于是,原方程组变形为

$$\begin{cases}2(x+y+z)=x(y+z), & ⑰\\ 3(x+y+z)=y(z+x), & ⑱\\ 4(x+y+z)=z(x+y). & ⑲\end{cases}$$

若 $x+y+z=0$,则 $x=0$ 或 $y+z=0$,这与⑯式矛盾.所以 $x+y+z\neq 0$,从而把⑰、⑱、⑲变形为

$$\frac{x(y+z)}{2}=\frac{y(z+x)}{3}=\frac{z(x+y)}{4}$$

$$=x+y+z=k\neq 0.$$

故方程组转化为

$$\begin{cases}xy+xz=2k,\\ yz+xy=3k,\\ zx+zy=4k,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}xy=\dfrac{k}{2}, & ⑳\\ xz=\dfrac{3}{2}k, & ㉑\\ yz=\dfrac{5}{2}k. & ㉒\end{cases}$$

因为 $k\neq 0$,那么由 ⑳ ÷ ㉑、⑳ ÷ ㉒ 得

$$\begin{cases}\dfrac{y}{z}=\dfrac{1}{3},\\[2ex]\dfrac{x}{z}=\dfrac{1}{5},\end{cases}$$

即　$z=5x=3y$，代入⑰式得

$$\begin{cases}x=\dfrac{23}{10},\\[2ex]y=\dfrac{23}{6},\\[2ex]z=\dfrac{23}{2}.\end{cases}$$

故原方程的解为　$\begin{cases}x=\dfrac{23}{10},\\[2ex]y=\dfrac{23}{6},\\[2ex]z=\dfrac{23}{2}.\end{cases}$

练　习　题

A　组

1. 解方程组

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$$

2. 解方程组

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 10x = 0, \\ y^2 + 2xy - 10y = 0. \end{cases}$$

3. 解方程组

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

4. 若方程组

$$\begin{cases} x + y = 4 - a, \\ xy + a(x + y) = 5 \end{cases}$$

有实数解，则 a 值的范围为(　　).

(A) $a \geqslant \frac{2}{3}$　　(B) $a \leqslant 2$

(C) $\frac{2}{3} < a < 2$　　(D) $\frac{2}{3} \leqslant a \leqslant 2$

5. 解方程

$$(x^2 + y^2)^2 + 1 = x^2 + y^2 + 2|x|y.$$

6. 解方程组

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 40, \\ x^2y + xy^2 = 8. \end{cases}$$

7. 解方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0. \end{cases}$$

8. 解方程组

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 3, \\ xy - x - y + 15 = 0. \end{cases}$$

9. 解方程组

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1. \end{cases}$$

B 组

10. 小明划船 15 千米，若依他平常的速度划船，则顺流比逆流所需的时间少 5 小时；若依他平常的速度的 2 倍划船，则顺流比逆流所需的时间仅少 1 小时，以每小时若干千米计算，求水流的速度.

11. 实数 x、y、z 满足

$$\begin{cases} x = 6 - 3y, \\ x + 3y - 2xy + 2z^2 = 0, \end{cases}$$

求 x^{2y+z} 的值.

12. 已知

$$\begin{cases} 1\,999(x - y) + 2\,000(y - z) + 2\,001(z - x) = 0, \\ 1\,999^2(x - y) + 2\,000^2(y - z) + 2\,001^2(z - x) = 2\,000, \end{cases}$$

求 $z - y$ 的值.

13. 解方程组

$$\begin{cases} x + y - z = 4, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 12, \\ x^3 + y^3 - z^3 = 34. \end{cases}$$

14. 某项工作，甲独立完成的天数为乙、丙合作完成天数的 m 倍；乙独立完成的天数为丙、甲合作完成天数的 n 倍；丙独立完成的天数为甲、乙合作完成天数的 k 倍. 求

$$\frac{m}{m+1}+\frac{n}{n+1}+\frac{k}{k+1}$$

的值.

15. 设正数 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6 同时满足

$$\frac{x_2x_3x_4x_5x_6}{x_1}=1,\quad \frac{x_1x_3x_4x_5x_6}{x_2}=2,$$

$$\frac{x_1x_2x_4x_5x_6}{x_3}=3,\quad \frac{x_1x_2x_3x_5x_6}{x_4}=4,$$

$$\frac{x_1x_2x_3x_4x_6}{x_5}=6,\quad \frac{x_1x_2x_3x_4x_5}{x_6}=9.$$

求 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$ 的值.

测　试　题

1. 解方程组

$$\begin{cases}2x^2+xy+x-3y+3=0,\\3xy+y^2-2x+6y-6=0.\end{cases}$$

2. 解方程组

$$\begin{cases}x+y+xy=11,\\x^2y+xy^2=30.\end{cases}$$

3. 有一支匀速前进的队伍，总长为 40 米，排尾的通讯员因传达命令赶到排头后又立即以同样的速度回到排尾，队伍共前进了 30 米，问通讯员比队伍多行了多少路程？

4. 有甲、乙、丙三种货物，若购甲 3 件，乙 7 件，丙 1 件，共需 3.15 元；若购甲 4 件，乙 10 件，丙 1 件，共需4.20 元. 现在购甲、乙、丙各 1 件，共需多少元？

5. 实数 x、y 满足 $x^2-2x-4y=5$，求 $x-2y$ 的取值范围.

第六讲　函数的基本概念与性质

一、知识要点和基本方法

函数概念是中学阶段重要的数学基本概念之一.函数知识是中学数学内容的重要组成部分.

1. 函数基本概念

在我们处理问题时,有些量始终保持同一个数值,叫做常量;有些量可取不同的数值,叫做变量.如:如果圆的半径是 R,那么圆的面积为 $S=\pi R^2$.当 R 改变时,面积 S 随之改变.R、S 是变量,但圆周率 π 是常量.

如果有两个变量 x、y,对于 x 的每一个确定的值,y 都有唯一确定的值和它对应,那么 y 就叫做 x 的函数.用符号

$$y=f(x)$$

表示.x 允许取值的集合叫做函数的定义域.由 x 允许取值而得到相应 y 的值,这些值的集合(即 y 取值范围)叫做函数 $y=f(x)$ 的值域.

由此可知,一个函数可以由定义域及对应法则确定.这样,人们把函数的定义域、对应法则和值域称为函数的三要素.如函数 $f(x)=x+1$ 的定义域为实数集 $\mathbf{R}$,对应法则即可用表达式写为 $y=f(x)=x+1$,值域也为实数集 $\mathbf{R}$.

我们欲求一个具体函数,也就是确定函数定义域、对应法则,在初中确定对应法则通常是具体的函数表达式,当然,有时也用列表、图象等方式给出.

2. 函数的基本性质

我们处理涉及函数的问题时，常运用函数的基本性质来解决.

首先考察所给函数的定义域.

其次考察函数是否具有：

(1) 对称性. 如果对于函数 $y=f(x)$ 有 $f(-x)=f(x)$，那么就称函数图象关于 y 轴对称(又称函数 $y=f(x)$ 是偶函数)；如果对于函数 $y=f(x)$ 有 $-f(x)=f(-x)$，那么就称函数图象关于原点 O 对称，即中心对称(又称函数 $y=f(x)$ 是奇函数).

(2) 单调性. 如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间上对于任意的 x_1，x_2，当 $x_1>x_2$ 时有 $f(x_1)>f(x_2)$. 那么就称函数 $y=f(x)$ 为单调增函数；当 $x_1>x_2$ 时有 $f(x_1)<f(x_2)$，称 $y=f(x)$ 为单调减函数.

二、例题精讲

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x}$.

(2) $y=\sqrt{|x|-3}+\dfrac{1}{x^2-4x-5}$.

解 (1) 由题意得

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ x\neq 0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ x\neq 0.\end{cases}$$

所以此函数的定义域为 $-2\leqslant x\leqslant 2$，但 $x\neq 0$.

(2) 由题意知

$$\begin{cases}|x|-3\geqslant 0,\\ x^2-4x-5\neq 0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x\geqslant 3 \text{ 或 } x\leqslant -3,\\ x\neq 5 \text{ 或 } x\neq -1.\end{cases}$$

所以此函数的定义域为

$$x \leqslant -3 \text{ 或 } x \geqslant 3 \text{ 但 } x \neq 5.$$

即 $(-\infty, -3]$、$[3, 5)$ 和 $(5, +\infty)$.

例 2 已知函数 $y = |x| - x^2$，x 在集合

$$\left\{0, 1, -2, 3, -4, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}\right\}$$

中取值，求函数 y 的对应值.

解 因为 $y = |x| - x^2$，所以

当 $x = 0$ 时，$y = 0$；

当 $x = 1$ 时，$y = 0$；

当 $x = -2$ 时，$y = |-2| - (-2)^2 = -2$；

当 $x = 3$ 时，$y = |3| - 3^2 = -6$；

当 $x = -4$ 时，$y = |-4| - (-4)^2 = -12$；

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时，$y = \left|-\frac{1}{2}\right| - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$；

当 $x = \frac{1}{2}$ 时，$y = \left|\frac{1}{2}\right| - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$；

当 $x = -\frac{1}{3}$ 时，$y = \left|-\frac{1}{3}\right| - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$.

例 3 已知函数 $y = ax^2 + b$，且当 $x = -1$ 时，$y = 10$；$x = \frac{1}{2}$ 时，$y = -8$，求 a，b 的值.

解 由题意知

$$\begin{cases} a + b = 10, \\ \frac{a}{4} + b = -8. \end{cases}$$

解之得 $a = 24$，$b = -14$.

故 $a = 24$，$b = -14$.

例 4 判别下列函数的图象对称性.

(1) $y = |x| + \frac{1}{2}x^2$.

(2) $y = |x - 1| + 1$.

解 (1) 令 $y=f(x)=|x|+\frac{1}{2}x^2$，则

$$f(-x)=|-x|+\frac{1}{2}(-x)^2$$

$$=x+\frac{1}{2}x^2=f(x).$$

所以此函数 $y=f(x)$ 关于 y 轴对称.

(2) 令 $y=f(x)=|x-1|+1$，则有

$$f(-x)=|-x-1|+1=|x+1|+1$$

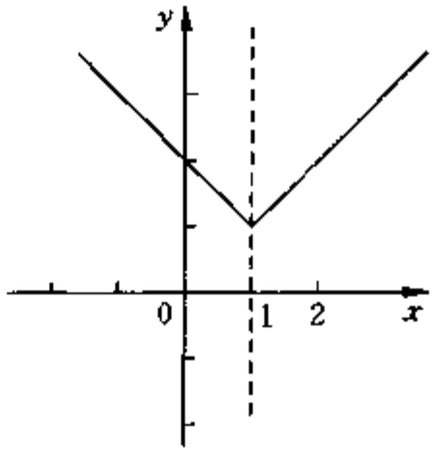
$$\neq |x-1|+1=f(x),$$

即此函数 $f(x)$的图象不关于 y 轴对称. 但是，

$$f(-(x-1))=f(-x+1)=|-(x-1)-1|+1$$

$$=|x|+1=|(x+1)-1|+1$$

$$=f(x+1).$$



于是，有 $f(-1+x)=f(-(x-1))=f(x+1)$，即函数的图象关于 $x=1$ 对称(如图).

说明 一般地，如果函数 $y=f(x)$，满足

$$f(x-a)=f(x+a),$$

那么此函数图象关于 $x=a$ 对称.

例 5 设 x 是实数，$y=|x-2|+|x+1|$，求 y 取最小值时的实数 x.

解法 1 分类讨论.

当 $x>2$ 时，有

$$y=x-2+x+1=2x-1>3;$$

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，有

$$y = 2 - x + x + 1 = 3;$$

当 $x < -1$ 时，有

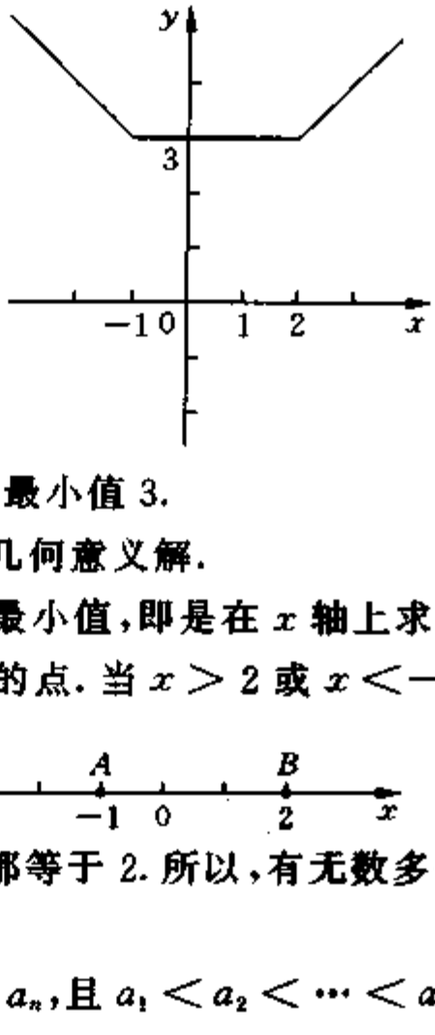
$$y = 2 - x - x - 1 = 1 - 2x > 3.$$

所以当 $-1 \leqslant x \leqslant 2$ 时，y 取得最小值，且 $y = 3$.

解法 2 利用函数图象.

由绝对值的意义可知，函数图象是由射线、线段组成的折线.

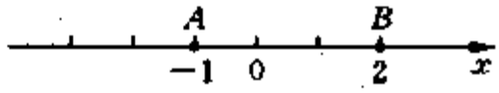
当 $x = -1$ 时，$y = 3$；$x = 2$ 时，$y = 3$，所以点 $(-1, 3)$，$(2, 3)$ 是图象上的点. 又 $x < -1$ 时，y 随 x 增大而减小；$x > 2$ 时，y 随 x 增大而增大. 因此，函数图象是以点 $(-1, 3)$ 为端点，方向斜向上的射线、点 $(-1, 3)$、$(2, 3)$ 的连线段和以 $(2, 3)$ 为端点斜向上的射线组成的折线，如图所示.



故由图可知当 $-1 \leqslant x \leqslant 2$ 时，y 取最小值 3.

解法 3 观察函数特征，用绝对值的几何意义解.

求函数 $y = |x - 2| + |x + 1|$ 的最小值，即是在 x 轴上求一点，使这点到点 -1 和 1 的距离和为最小的点. 当 $x > 2$ 或 $x < -1$ 时，距离和大于 -1 与 2 之间的距离，而在 -1 与 2 之间的每一点(含 2 和 -1)到点 -1 与 1 的距离之和都等于 2. 所以，有无数多个 x 使得 y 取最小值 3.



说明 一般地，如果实数 a_1、a_2、…、a_n，且 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，满足

$$y = |x - a_1| + |x - a_2| + \cdots + |x - a_n|,$$

那么当 $n = 2k$ 时，y 取最小值的 x 满足 $a_k \leqslant x \leqslant a_{k+1}$；当 $n = 2k + 1$ 时，y 取最小值的 x 满足 $x = a_{k+1}$.

例 6 设 $f(x) = ax^2 + bx - 3$，且

$$f(x+1)-f(x)=8x+5,$$

求 a、b 的值.

解 因为 $f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)-3$,

所以由 $f(x+1)-f(x)=8x+5$ 得

$$a(x+1)^2+b(x+1)-3-ax^2-bx+3=8x+5,$$

即有

$$\begin{cases}2a=8,\\ a+b=5.\end{cases}$$

于是 $a=4$, $b=1$.

练　习　题

A　组

1. 下列表中给出集合 X 的元素 x 与集合 Y 的元素 y 之间的对应. 试用尽可能简单的代数式分别写出 y 与 x 的函数关系式.

表(1)

x	-2	-1	0	1	3	5	6
y	5	2	1	2	10	26	37

表(2)

x	-4	-2	0	1	3	5	6
y	3	1	-1	0	2	4	5

2. 设 y 是 x 的函数，且 $y=ax+b$. 已知当 $x=-1$ 时，$y=1$；$x=2$ 时，$y=5$. 求 a、b 的值.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{\sqrt{3-|x|}}{x-1}$.

(2) $y=\dfrac{1}{2x^2-3x+1}+\sqrt{9-x^2}$.

4. 下列各小题中，哪个题中的 y 是 x 的函数？并写出函数表达式 $y=f(x)$.

(1) x 是正方形的一边长，y 是这个正方形的面积.

(2) x 是矩形的一边长，矩形的另一边为定长 a，y 是这个矩形的面积.

(3) 三角形一边为 x，此边上的高为 y，三角形的面积为定数 S.

5. 汽车离开车站 45 分钟后，到达离车站 28 公里的 A 地，此后汽车速度恒定，以每小时 40 公里的速度前进，求这辆汽车速度恒定后离车站的距离 s 公里与离站的时间 t 小时的关系，并求 t 的定

义域.

6. 已知 $f(x+1)=x^2-3x+2$，求 $f(x)$.

B 组

7. 已知 $a<b<c$，求函数

$$y=|x-a|+|x-b|+|x-c|$$

的最小值.

8. 已知函数 $f(x)$，满足

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2},$$

求 $f(3)$.

9. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，求证：

$$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)=0.$$

10. 已知函数 $f(x)$，满足 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$，求 $f(x)$.

11. 设 $f(1)=0$，$f(2)=1$，且

$$a^2f(n+2)=b^2f(n)$$

($a>0$，$b>0$，n 是自然数)，求 $f(n)$.

12. 设长方形的周长为定值 l，一边长为 x，求长方形面积 y 的最大值.

测 试 题

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{2}{x+|x|}$.

(2) $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2+2x-8}$.

2. 设 $S(t)=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $C(t)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, 求证: (1) $S\left(\dfrac{1}{t}\right)=S(t)$; (2) $S^2(t)+C^2(t)=1$.

3. 已知 $f\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)=x^2-3x+7$, 试求 $f(x)$.

4. 设 $y=ax+\dfrac{1}{a}(2-x)$, 其中 $a>0$, 求在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的 y 的最小值.

5. 设函数 $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ 有一组对应值 $x=\sqrt{2}$, $y=0$. 试证明: $y=ax+b$ 不能有两组以上有理数的对应值.

第七讲　一次函数与反比例函数

一、知识要点和基本方法

1. 定义.

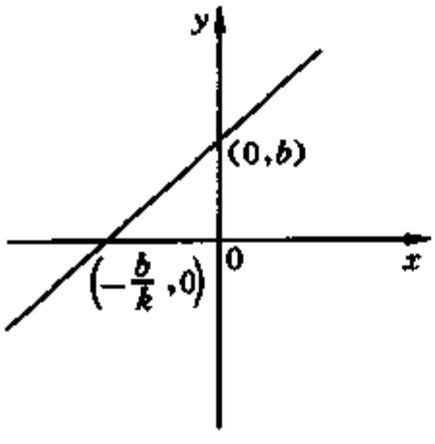
函数 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ 称为一次函数. 若 $b=0$，则称函数 $y=kx$ 为正比例函数.

函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ 称为反比例函数，定义域为 $x\neq 0$ 的所有实数.

2. 函数的性质.

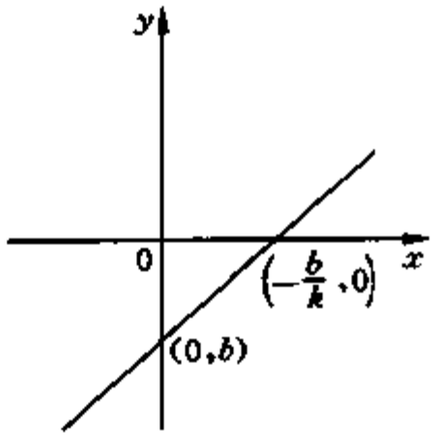
(1) 函数的图象.

(i) 一次函数 $y=kx+b$ 的图象　当 $k>0$，$b>0$ 时，函数图象如图 7-1；当 $k>0$，$b<0$ 时，函数图象如图 7-2；当 $k<0$，$b>0$ 时，函数图象如图 7-3；当 $k<0$，$b<0$ 时，函数图象如图 7-4. 当 $b=0$ 时，在 $k>0$ 与 $k<0$ 的情况下，函数图象如图 7-5 和 7-6.



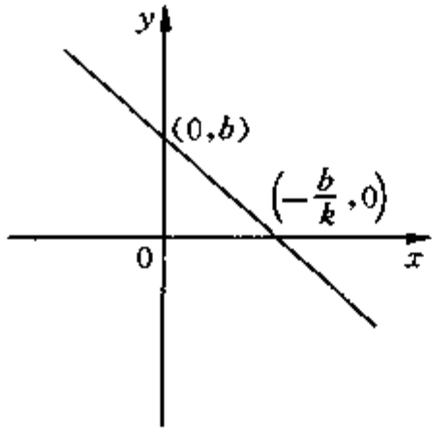
$k>0, b>0$

图 7-1



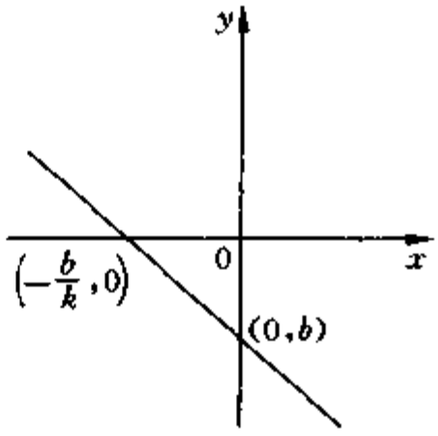
$k>0, b<0$

图 7-2



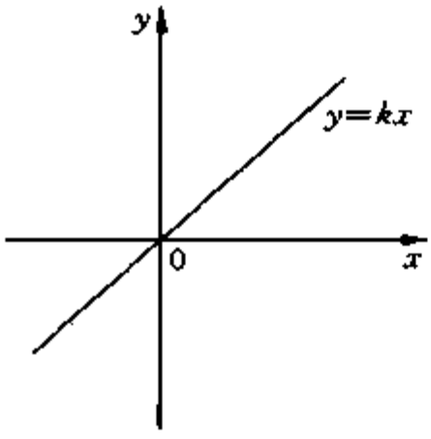
$k<0, b>0$

图 7-3



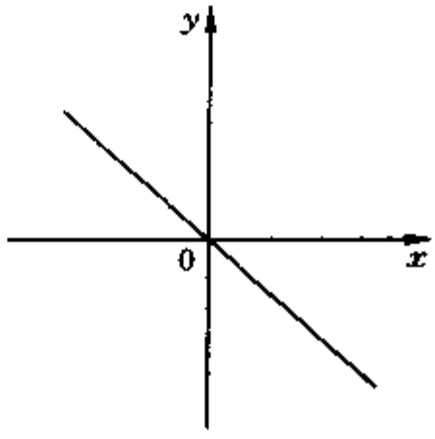
$k<0, b<0$

图 7-4



$k>0$

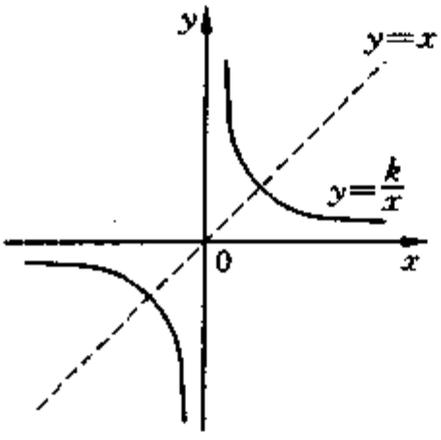
图 7-5



$k<0$

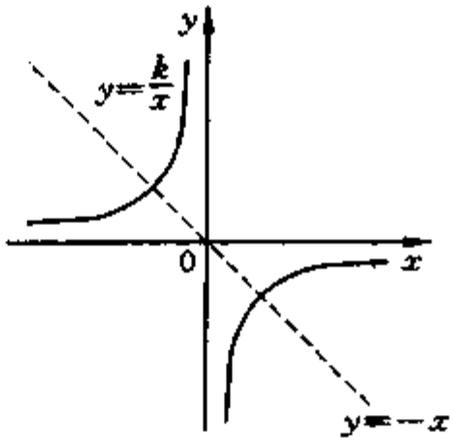
图 7-6

(ii) 反比例函数的图象　当 $k>0$ 时，函数的图象如图 7-7；当



$k>0$

图 7-7



$k<0$

图 7-8

$k<0$ 时，函数的图象如图 7-8.

(2) 单调性.

利用函数单调性定义，并对照图 7-1、图 7-2 和图 7-5 可知，一次函数 $y=kx+b$ 在 $k>0$ 时函数值 y 随 x 的增大而增大，即是单调增加的；在 $k<0$ 时函数值 y 随 x 的减小而减小，如图 7-3、图 7-4 和图 7-6.

同样地，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 在 $k>0$ 且 $x>0$ 时，函数值 y 随 x 增大而减小；在 $k>0$ 且 $x<0$ 时，函数值 y 随 x 增大而减小. 也就是说，$k>0$ 时反比例函数在第一象限是单调递减的，在第三象限也是单调递减的，如图 7-7. $k<0$ 时，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 在第二象限是单调递增的，在第四象限也是单调递增的，如图 7-8.

(3) 对称性.

一次函数 $y=kx$ 的图象上的点是关于原点 O 中心对称的.

反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象上的点是关于原点 O 成中心对称. 在 $k>0$ 时函数的图象关于直线 $y=x$ 轴对称；在 $k<0$ 时函数的图象关于直线 $y=-x$ 轴对称.

在解决有关一次函数及反比例函数的问题时，常运用数形结合及分类讨论的思想方法. 待定系数法是研究函数表达式时的基本方法. 同时紧密结合图象寻求思路，是处理这类问题的重要方法.

二、例题精讲

例 1 如果一条直线 l 经过不同的三点 $A(a, b)$，$B(b, a)$，$C(a-b, b-a)$，那么，直线 l 经过(　　).

(A) 第二、四象限　　(B) 第一、二、三象限

(C) 第二、三、四象限　　(D) 第一、三、四象限

解 由题意知 $a\neq b$，且 $a\neq 0$，$b\neq 0$.

设直线 l 为 $y=kx+c$，则由直线 l 过 A、B 两点得

$$\begin{cases} b=ka+c, & ① \\ a=kb+c. & ② \end{cases}$$

①－②得

$$b-a=k(a-b).$$

因 $a\neq b$，则有　$k=-1$，代入①式得 $c=a+b$.

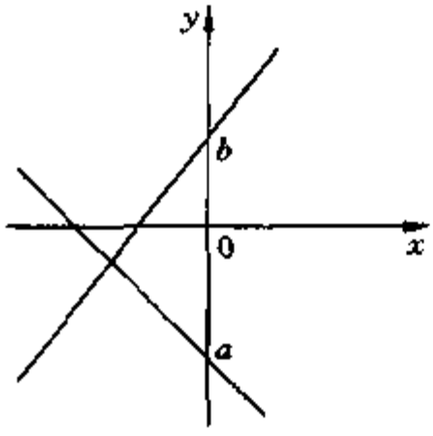
于是　　$y=-x+(a+b)$.

又直线 l 经过点 c，则有

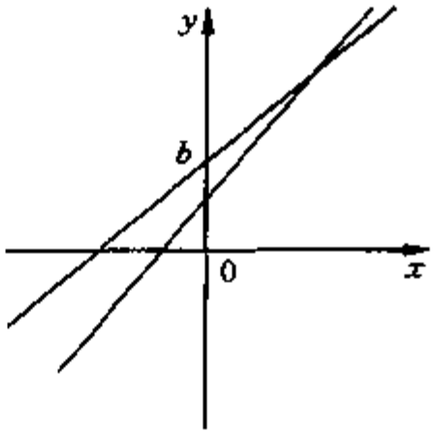
$$b-a=-(a-b)+(a+b),$$

得　$a+b=0$. 所以 $y=-x$. 从而推知直线 l 经过第二、四象限及原点. 选 A.

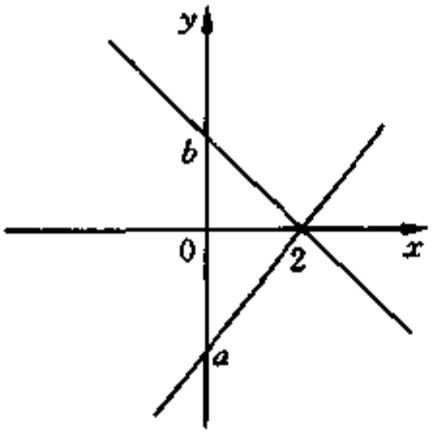
例 2　设 $b>a$，将一次函数　$y=bx+a$ 与 $y=ax+b$ 的图象画在平面直角坐标系内，则有一组 a、b 的取值，使得下列四个图中的一个为正确的是(　　).



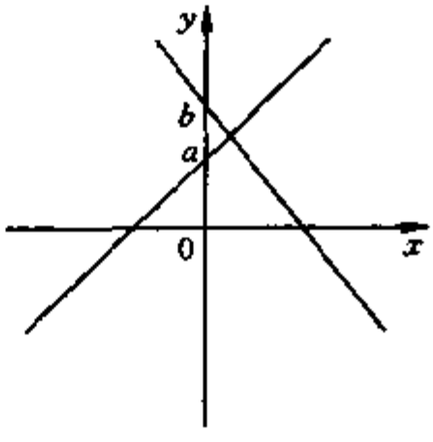
(A)



(B)



(C)



(D)

解 题中两个一次函数图象的交点(x, y)满足

$$\begin{cases} y = bx + a, \\ y = ax + b, \end{cases}$$

于是解得交点为 $(1, a+b)$.

图(A)中交点横坐标是负数,不合题意;

图(C)中交点横坐标是2,也不合题意;

图(D)中交点纵坐标是大于a小于b的数,不是$a+b$,则(D)也不对.

因此,只有(B)是合理的,选(B).

例3 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象是轴对称图形,它的一条对称轴是下列哪个正比例函数的图象?

(A) $y = -kx$　　(B) $y = |k|x$

(C) $y = \frac{k}{|k|}x$　　(D) $y = kx$

解 根据反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的性质,当$k > 0$时,对称轴为$y = x$;当$k < 0$时,对称轴为 $y = -x$.

所以,这条对称轴就不是函数$y = -kx$、$y = |k|x$和$y = kx$的图象.

当$k > 0$时,$y = \frac{k}{|k|}x = x$;当$k < 0$时,$y = \frac{k}{|k|}x = -x$. 故 $y = \frac{k}{x}$ 图象的对称轴是正比例函数 $y = \frac{k}{|k|}x$ 的图象.

例4 如图7-9,正方形$ABCD$的边长为10 cm,点E在边CB的延长线上,且$EB = 10$cm,点P在边DC上运动,EP与AB的交点为F.设$DP = x$cm $(0 < x < 10)$,$\triangle EFB$与四边形$AFPD$的面积为$y$cm^2,求y与x之间的函数关系式.

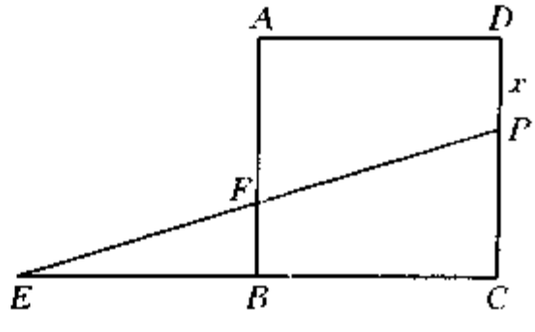


图7-9

解 由题意知$0 < x < 10$,

且 $BF=\frac{1}{2}CP=\frac{1}{2}(CD-PD)=\frac{1}{2}(10-x)$，所以

$$S_{\triangle EFB}=\frac{1}{2}BE\cdot BF=\frac{1}{2}\times 10\times\frac{1}{2}(10-x)$$

$$=25-\frac{5}{2}x,$$

$$S_{AFPD}=\frac{1}{2}(DP+AF)\cdot AD$$

$$=\frac{1}{2}\left[x+10-\frac{1}{2}(10-x)\right]\times 10$$

$$=5x+\frac{5}{2}x+25.$$

因为 $$S_{\triangle EFB}+S_{AFPD}=y,$$

所以 $y=5x+50.$

故 y 与 x 之间的函数关系式是

$$y=5x+50,$$

这里 $0<x<10.$

思考 在例 4 中将“$EB=10\,\text{cm}$”改为“$EB:BC=a:1$，a 是给定的正数”，你能求出 y 与 x 之间函数关系式吗？

例 5 已知直线 $y=\frac{1}{2}x+k$ 与 x、y 轴的交点分别是 A、B，$S_{\triangle AOB}\leqslant 1$，求 k 的取值范围.

解 直线 $y=\frac{1}{2}x+k$ 与 x 轴交点 A 的坐标满足

$$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+k,\\ y=0.\end{cases}$$

解之得 $x=-2k$，$y=0$，

即 A 点坐标为 $(-2k,\ 0)$.

直线 $y=\frac{1}{2}x+k$ 与 y 轴交点 B 的坐标满足

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + k, \\ x = 0. \end{cases}$$

解之得 $x = 0$, $y = k$,

即 B 点坐标为$(0, k)$.

于是 $OA = |-2k|$, $OB = |k|$, 从而由 $S_{\triangle AOB} \leqslant 1$ 得

$$\frac{1}{2} \cdot |-2k| \cdot |k| \leqslant 1,$$

即
$$k^2 \leqslant 1.$$

故 k 的取值范围是 $-1 \leqslant k \leqslant 1$.

例6 已知关于 x 的方程

$$x^2 - 3x + 2k - 1 = 0,$$

它的两个实根的平方和不小于这两个根的积. 反比例函数 $y = \frac{1+2k}{x}$ 的图象的两个分支在各自的象限内, y 随 x 值的增大而减小. 求满足上述条件的 k 的整数值.

解 仔细读题,"分化瓦解".

因为关于 x 的方程 $x^2 - 3x + 2k - 1 = 0$ 有两个实数根,所以有

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2k - 1) \geqslant 0,$$

解得
$$k \leqslant \frac{13}{8}. \qquad ③$$

设此方程的两个根为 x_1、x_2,则由根与系数知

$$x_1 + x_2 = 3, \ x_1 \cdot x_2 = 2k - 1.$$

因 $x_1^2 + x_2^2 \geqslant x_1 x_2$,即 $(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 \geqslant 0$, 所以

$$9 - 3(2k - 1) \geqslant 0,$$

得
$$k \leqslant 2. \qquad ④$$

又反比例函数 $y=\frac{1+2k}{x}$ 的图象的两个分支在各自的象限内，y 随 x 值增大而减小，则必有 $1+2k>0$，即 $k>-\frac{1}{2}$. ⑤

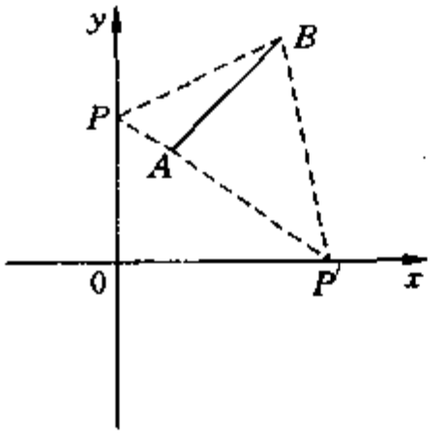
综合③、④与⑤得

$$-\frac{1}{2}<k<\frac{13}{8}.$$

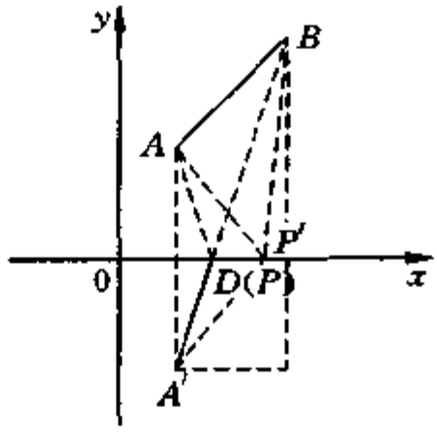
所以满足题意的 k 取整数值为 $k=0$，1.

例 7 已知点 $A(1,2)$和点 $B(3,4)$，在坐标轴上有一点 P，且 $PA+PB$ 最小，求 P 点的坐标.

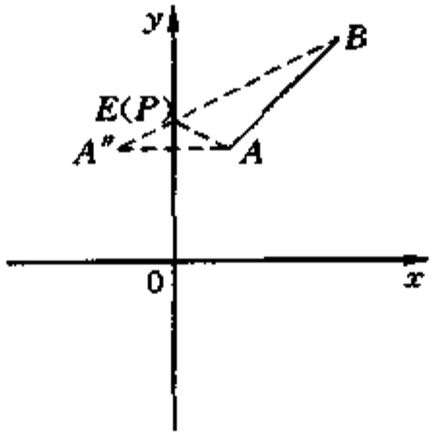
解 画草图，找思路.



(1)



(2)



(3)

图 7-10

作 A 点关于 x 轴的对称点 A'，连 $A'B$ 交 x 轴于点 D，如图 7-10

(2). 作 A 点关于 y 轴的对称点 A''，连 $A''B$ 交 y 轴于点 E，如图 7-10(3).

在图 7-10(2)中，P' 点为 x 轴上任意一点，则有

$$\begin{aligned} P'A + P'B &= P'A' + P'B \\ &\geqslant A'B = A'D + DB \\ &\geqslant DA + DB, \end{aligned}$$

即在 x 轴上点 D 是使得 $DA + DB$ 值最小的点.

同理可知，在 y 轴上点 E 是使得 $EA + EB$ 值最小的点.

所以，坐标轴上使得 $PA + PB$ 最小的点只可能是点 D 或点 E.

在图 7-10(2)中，点 $A'(1, -2)$，则

$$\begin{aligned} A'B &= DA' + DB = DA + DB \\ &= \sqrt{(3-1)^2 + (4-(-2))^2} \\ &= 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

在图 7-10(3)中，点 $A''(-1, 2)$，则

$$\begin{aligned} A''B &= EA + EB \\ &= \sqrt{(3-(-1))^2 + (4-2)^2} \\ &= 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

所以由 $A''B < A'B$ 知满足 $PA + PB$ 最小的点 P 是在 y 轴上的 E 点.

设直线 $A''B$ 的方程为 $y = kx + b$. 则有

$$\begin{cases} -k + b = 2, \\ 3k + b = 4. \end{cases}$$

解之得 $k = \frac{1}{2}$，$b = \frac{5}{2}$. 故直线 $A''B$ 为

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2},$$

它与 y 轴的交点(x, y)满足

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, \\ x = 0. \end{cases}$$

得

$$x = 0, y = \frac{5}{2}.$$

故点 E 坐标为$\left(0, \frac{5}{2}\right)$，即使得 $PA + PB$ 最小的点 $P\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

例 8 由方程 $|x-1| + |y-1| = 1$ 确定的曲线.

(1) 判别曲线所围成的图形的形状.

(2) 求所围成的图形面积.

解 (1) 根据题意，当 $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$ 时，有

$$x - 1 + y - 1 = 1,$$

即

$$y = -x + 3.$$

当 $x \geqslant 1$, $y < 1$ 时，有

$$x - 1 + (1 - y) = 1,$$

即

$$y = x - 1.$$

当 $x < 1$, $y > 1$ 时，有

$$1 - x + y - 1 = 1,$$

即

$$y = x + 1.$$

当 $x < 1$, $y < 1$ 时，有

$$1 - x + 1 - y = 1,$$

即

$$y = -x + 1.$$

因此，由方程 $|x-1| + |y-1| = 1$ 构成的曲线图形如图7-11，构成四边形 $ABCD$.

(2) 一次函数 $y = -x + 3$ 的图象(即直线 l_1)与一次函数 $y = x + 1$ 的图象(l_4)、$y = x - 1$ 的图象 l_3 的交点分别为 A、B，一次函

数 $y=-x+1$ 的图象(l_2)与 l_3、l_4 的交点为 C、D. 于是 A 点的交点坐标满足

$$\begin{cases} y=-x+3, \\ y=x+1. \end{cases}$$

从而有 $y=2$, $x=1$. 即 $A(1,2)$.

B 点坐标满足

$$\begin{cases} y=-x+3, \\ y=x-1, \end{cases}$$

从而有 $y=1$, $x=2$. 即 $B(2,1)$.

同理求得 $C(1,0)$, $D(0,1)$.

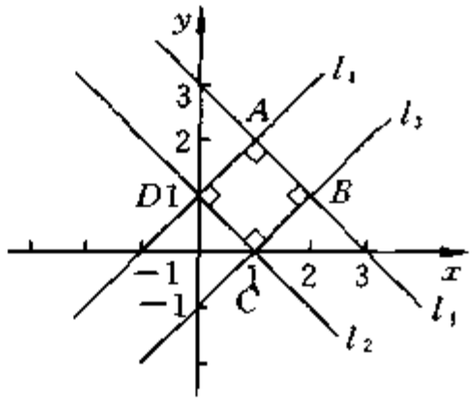


图 7-11

于是 $AD=\sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$, $AB=\sqrt{2}$, $CD=CB=\sqrt{2}$, 且有

$$BD=\sqrt{(2-0)^2+(1-1)^2}=2,$$

即

$$BD^2=AD^2+AB^2,$$

则 $AD\perp AB$.

所以四边形 $ABCD$ 是正方形,面积为

$$S_{ABCD}=|AD|^2=2.$$

练　习　题

A　组

1. 在表(1)中，y 与 x 成正比例，试求出表(1)中 a、b、c、d 的值.

在表(2)中，y 与 x^2 成反比例，试求出表(2)中 a、b、c、d 的值.

表(1)

x	-6	-4	-2	0	5
y	a	b	-6	c	d

表(2)

x	-3	-2	-1	2	3
y	$\frac{1}{18}$	a	b	c	d

2. 已知 y 是 $x-2$ 的正比例函数，且 $x=5$ 时，$y=9$，求当 $x=-3$ 时对应的 y 值.

3. 某物体若从空中自由下落时，下落的距离与时间的平方成正比. 已知下落 2 秒时，落下的距离为 19.6 m，试问下落 x 秒时，下落距离 y 为多少 m? 下落 4 秒时，下落距离 y 为多少 m?

4. 已知 y 是 x 的正比例函数，它的图象过点(1，3)和点(a, b). 当 $a=-2$ 时 b 等于多少?

5. 如果 y 是 x 的反比例函数，当 $x=\frac{1}{3}$ 时，$y=18$，试写出函数表达式. 它的图象上有正整数点(x, y)(x，y 都是正整数的点称为正整数点)，问这样的点(x, y)有多少个?

6. (1) 试画出函数 $y=x-3$ 的图象，其中 $x\in\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 4, x \text{ 是整数}\}$.

(2) 试画出函数 $y=|x|$ 的图象，其中

$$x \in \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 4,\ x \text{ 是实数}\}$$

7. 已知一次函数的图象经过不同的点 $A(a, b)$ 和点 $B(b, a)$，问这个函数图象可能经过哪几个象限？

8. 如图 7-12，正方形 $ABCD$ 的边长为 10 cm，今由 B 点出发，沿 BC、CD 边到 D 点，若由 B 到 P 时，走了 x cm，$S_{\triangle ABP} = y\ \text{cm}^2$，

那么

(1) 当 P 点在 BC 上时，用 x 表示 y.

(2) 当 P 点在 CD 上时，求 x 的取值范围.

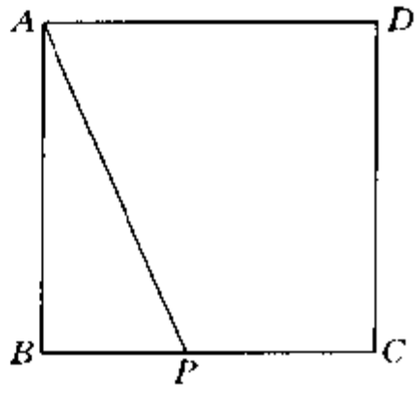


图 7-12

(3) 当 P 点在 CD 上时，怎样用 x 表示 y?

B 组

9. 已知一次函数 $y = ax + b$ (a 为整数)的图象过点(98, 19)，它与 x 轴的交点为$(p, 0)$，与 y 轴的交点为$(0, q)$. 如果 p 是质数，q 是正整数，那么满足条件的所有一次函数的个数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 大于 2 的整数

10. 已知一次函数的图象经过点 $P(0, -2)$，且与两条坐标轴截得直角三角形面积为 $\frac{1}{2}$，求一次函数的表达式.

11. 如果 y 是 x 的正比例函数，z 是 y 的反比例函数，那么 z 是 x 的(　　)函数.

(A) 正比例函数

(B) 反比例函数

(C) 既不是正比例函数，也不是反比例函数

(D) z 是 x^2 的正比例函数

12. 若 $y + m$ 与 $x + m$ 成正比例，且当 $x = 1$ 时 $y = 2$；当 $x = -1$ 时，$y = 1$. 求 y 与 x 之间的函数关系式.

13. 求函数 $|x - 1| + |y + 2| = 2$ 的图象所围成区域的面积.

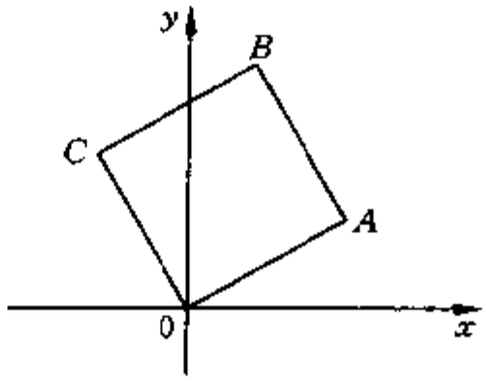
14. 给定两个集合：

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

$$Y = \{1, 2, 3, 4\},$$

当 $x \in X$ 时，$y \in Y$. 试画出函数 $y = \{x$ 的约数的个数$\}$ 的图象.

15. 如图 7-13，已知边长为 1 的正方形 $OABC$ 在直角坐标系中，A、B 两点在第一象限内，OA 与 x 轴的夹角为 30°，求点 B 的坐标.



7-13

16. 已知 x、y、z 都不小于 0，且满足 $3y + 2z = 3 - x$ 及 $3y + z = 4 - 3x$，求函数 $u = 3x - 2y + 4z$ 的最大值与最小值.

测 试 题

1. 设 y 是 $x-3$ 的正比例函数，且当 $x=4$ 时，$y=\frac{1}{2}$，求当 $x=-2$ 时对应的 y 值.

2. 已知 $abc\neq 0$，且 $\frac{a+b}{c}=\frac{a+c}{b}=\frac{b+c}{a}=p$，那么直线 $y=px+p$ 一定经过(　　).

(A) 第一、二象限　　(B) 第二、三象限

(C) 第三、四象限　　(D) 第一、四象限

3. 一次函数 $y=2x+a$ 被坐标轴截得的线段长是 5，求 a 的值.

4. 平面直角坐标系中有点 $P(-1,-2)$ 和点 $Q(4,2)$，取点 $R(1,m)$，试求当 m 为何值时，$PR+RQ$ 有最小值.

5. 如图 7-14，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB=22$，$CD=10$，$AD=16$.

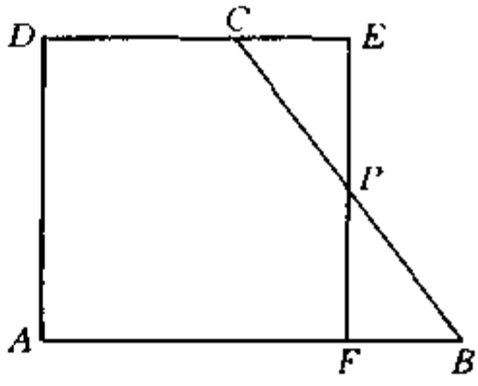


图 7-14

(1) 在斜腰 BC 上任取一点 P，过 P 点作底边的垂线，与上下底分别交于 E、F. 设 PE 长为 x，PF 长为 y，求 y 与 x 的函数表达式；

(2) 如果 $S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PAB}$，$P$ 点应取在什么地方？

第八讲　二次函数

一、知识要点和基本方法

1. 求二次函数的解析式

一般地，形如函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，定义域是 I、这里 I 是某个数集，称为二次函数.

如何求二次函数呢？在已知的定义域里考虑求出函数的解析式. 求函数的解析式可有如下 3 种基本方式.

(1) 三点唯一确定.

如果已知二次函数的图象上的三点坐标(或称函数的三对对应值)(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)，那么就有方程组

$$\begin{cases} y_1=ax_1^2+bx_1+c, \\ y_2=ax_2^2+bx_2+c, \\ y_3=ax_3^2+bx_3+c \end{cases}$$

唯一确定 a、b、c，从而得到函数解析式 $y=ax^2+bx+c$.

(2) 运用“顶点”待定.

由于 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，所以当已知二次函数图象的顶点坐标 $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 时，就可以设二次函数形如 $y=A\left(x-\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，从而利用其他条件，容易求得此函数的解析式. 这里直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 又称为二次函数的对称轴.

(3) 运用“方程根”待定.

我们知道，

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \\ &= a(x - x_1)(x - x_2), \end{aligned} \qquad ①$$

这里 x_1、x_2 分别是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根. 当已知二次函数的图象与 x 轴有交点(或者说方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有实根)时，就可以令函数解析式为 $y = a(x - x_1)(x - x_2)$，从而待定求得此函数的解析式.

在实际求二次函数的解析式时，常综合运用上述的基本方式简捷地求得结果.

2. 二次函数的基本性质

(1) 对称性.

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象关于 $x = -\frac{b}{2a}$ 对称.

(2) 单调性.

当 $a > 0$ 时，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 在区间 $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ 上是单调递减的，在区间 $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上是单调递增的.

当 $a < 0$ 时，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 在区间 $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ 上是单调递增的，在区间 $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上是单调递减的.

(3) 最值性.

当 $a > 0$ 时，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上有最小值为 $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

当 $a < 0$ 时，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上有最大值为 $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

注意：二次函数的最大值、最小值与所给出的定义域有关.

(4) 与 x 轴的交点.

对于二次函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c$，如果 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$，那么此函数的图象与 x 轴有交点，当 $\Delta>0$ 时，有两个交点；当 $\Delta=0$ 时，有唯一的一个交点.

如果 $a>0$，且 $\Delta\geqslant 0$，那么当 $x<x_1$ 时，$f(x)>0$；当 $x_1<x<x_2$ 时，$f(x)<0$；当 $x>x_2$ 时，$f(x)>0$（参看图 8-1(1)），这里 x_1、x_2 是函数与 x 轴的两个交点的横坐标. 且 $x_1<x_2$.

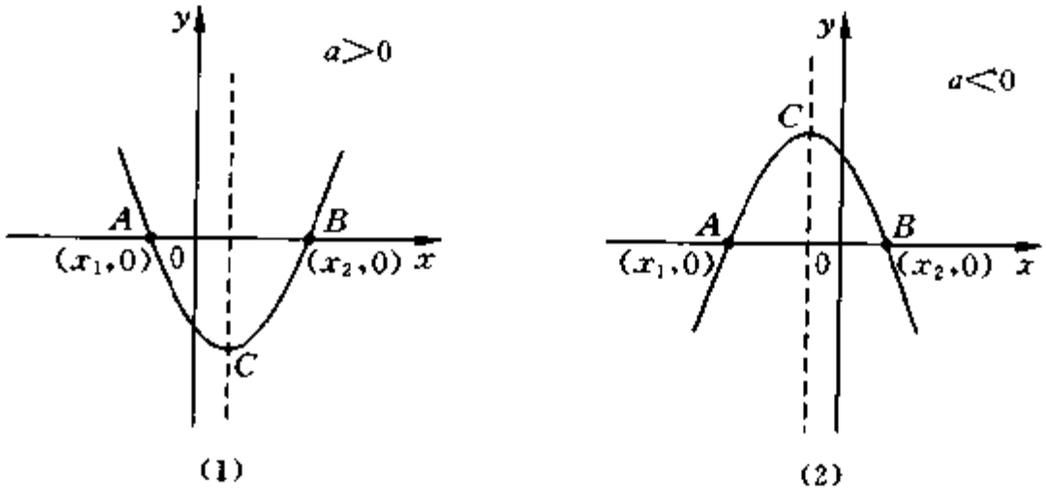


图 8-1

如果 $a<0$，且 $\Delta\geqslant 0$，那么当 $x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时，$f(x)<0$；当 $x_1<x<x_2$ 时，$f(x)>0$，这里 x_1、x_2 是函数图象与 x 轴交点的横坐标且 $x_1<x_2$.（参看图 8-1(2)）

二、例题精讲

例 1 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象顶点在 y 轴上，$c-b=2$，且经过(2，8)点(如图 8-2)，求此二次函数的解析式.

解 由于 $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，所以由此二次函数图象顶点在 y 轴上得

$$-\frac{b}{2a}=0,$$

即

$$b=0.$$

从而由 $c-b=2$ 得 $c=2$.

又此二次函数的图象经过点(2，8)，则有

$$8=a\times 2^2+0\times 2+2,$$

得 $$a=\frac{3}{2}.$$

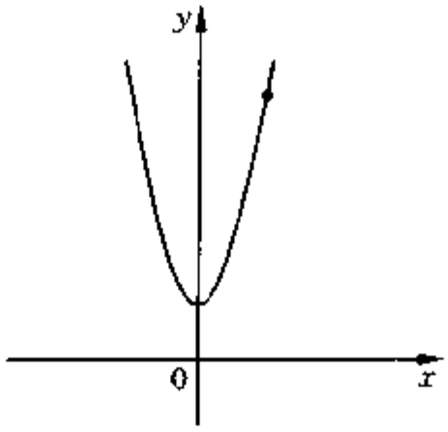


图 8-2

于是符合题意的二次函数解析式是

$$y=\frac{3}{2}x^2+2.$$

例 2 已知二次函数的图象的对称轴平行于 y 轴，顶点为(1，2)，且与直线 $y=2x+k$ 相交于(2，-1)，试求：

(1) 二次函数的解析式.

(2) k 的值.

(3) 该二次函数的图象与直线 $y=2x+k$ 的另一交点的坐标.

解 (1)因二次函数图象的顶点为(1，2)，对称轴平行于 y 轴，所以，可令此二次函数的解析式为

$$y=a(x-1)^2+2.$$

又点(2，-1)在二次函数的图象上，则有

$$-1=a(2-1)^2+2,$$

得 $$a=-3.$$

故所求的二次函数解析式为

$$y=-3(x-1)^2+2.$$

(2) 由题意知点(2，-1)在直线 $y=2x+k$ 上，则

$$-1=2\times 2+k,$$

得

$$k=-5.$$

(3) 根据题意有

$$-1=-3(x-1)^2+2,$$

即

$$x-1=\pm 1,$$

得

$$x=2 \quad 或 \quad x=0.$$

所以 $x=2$ 时，$y=-1$；$x=0$ 时，$y=-1$.

故二次函数的图象与直线 $y=2x+k$ 的另一交点的坐标为 $(0,-1)$.

例 3 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的一部分如图 8-1 所示，求 a 的取值范围.

解 根据二次函数的图象可知

$$a<0.$$

又此二次函数图象经过$(1,0)$，$(0,1)$，则有

$$a+b+c=0,$$

$$c=1$$

得

$$b=-(1+a).$$

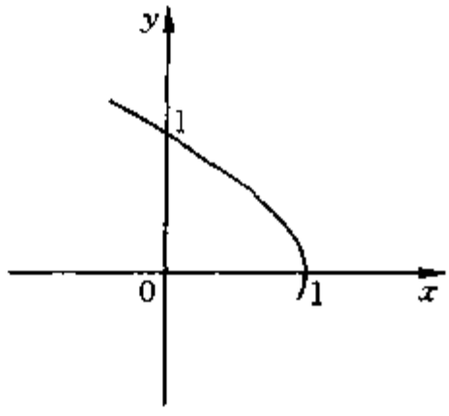


图 8-1

于是

$$y=ax^2-(1+a)x+1.$$

因

$$y=ax^2-(1+a)x+1=a\left(x-\frac{1+a}{2a}\right)^2+\frac{-(1-a)^2}{4a},$$

则根据函数图象可知

$$x=\frac{1+a}{2a}<0, \text{ 且 } \frac{-(1-a)^2}{4a}>0.$$

于是有

$$-1<a<0.$$

说明 如果二次函数的图象经过点$(m,0)$，那么可以设此二次函数的解析式为 $y=a(x-m)(x-R)$. 这里 a 与 R 为待定的常数.

特别地，当函数图象经过点$(m, 0)$，$(n, 0)$，即图象与x轴有两个交点，则可令函数解析式为

$$y = a(x - m)(x - n),$$

这里a为待定常数.

例4 已知二次函数$y = x^2 - (m - 3)x - m$，求所有的m值，使得此二次函数图象与x轴的两个交点不可能都落在x轴的正半轴上.

解 根据题意可知，问题转化为求满足方程

$$x^2 - (m - 3)x - m = 0$$

的两根中必有一根为非正数的m的值.

因为此方程根的判别式为

$$\Delta = (m - 3)^2 - 4(-m) = (m - 1)^2 + 8 > 0,$$

所以此方程必有二实根，即函数$y = x^2 - (m - 3)x - m$与x轴必有两个交点.

运用方程根与系数关系得方程的两根x_1，x_2满足

$$x_1 + x_2 = m - 3,$$

$$x_1 \cdot x_2 = -m.$$

当$m > 0$时，$x_1 \cdot x_2 = -m < 0$，必有且只有一个根为负数；

当$m \leqslant 0$时，$x_1 \cdot x_2 = -m \geqslant 0$，但

$x_1 + x_2 = m - 3 < 0$，则x_1，x_2均为非正数.

所以，满足要求的m为一切实数.

说明 在处理有关二次函数问题时，常转化为二次方程根的问题予以解决. 反过来，在处理有关二次方程根的问题时，常转化为二次函数及其图象的问题加以解决. 二次函数与二次方程“相得益彰”，它们是相通的.

例5 已知关于x的一元二次方程

$$2ax^2 - 2x - 3a - 2 = 0$$

的一根大于 1，另一根小于 1，求 a 的取值范围.

解 设 $y=f(x)=2ax^2-2x-3a-2$. 则原二次方程的一根大于 1，另一根小于 1，转化为函数 $y=f(x)$的图象与 x 轴交点在点(1，0)两侧. 于是由二次函数图象得

$$\begin{cases}a<0,\\ f(1)>0\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}a>0,\\ f(1)<0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}a<0,\\ 2a-2-3a-2>0\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}a>0,\\ 2a-2-3a-2<0.\end{cases}$$

得

$$a>0\quad 或\quad a<-4.$$

例 6 已知关于 x 的方程 $\sqrt{x-p}=x$ 有两个不相等的实根，求实数 p 的取值范围.

解 由 $\sqrt{x-p}=x$ 得 $x\geqslant 0$，$x-p\geqslant 0$，且

$$x^2-x+p=0.$$

于是原方程有两个不相等的实数根等价于方程

$$x^2-x+p=0 \qquad ①$$

有两个不相等的非负实根.

令 $y=f(x)=x^2-x+p=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+p-\frac{1}{4}$，则函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴有两个交点，且均在原点及原点右侧. 又 $y=f(x)$ 的图象对称轴是 $x=\frac{1}{2}$，所以有

$$\begin{cases}p-\frac{1}{4}<0,\\ f(0)\geqslant 0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}p-\frac{1}{4}<0,\\ p\geqslant 0.\end{cases}$$

解之得

$$0 \leqslant p < \frac{1}{4}.$$

例 7 (1) 画出函数 $y = |x^2 - 2\sqrt{3}x + 1|$ 的图象；

(2) 为使方程 $|x^2 - 2\sqrt{3}x + 1| = \frac{1}{\sqrt{3}}x + b$ 有四个不同的实数根，求 b 的变化范围.

解 (1) 函数 $y = |x^2 - 2\sqrt{3}x + 1|$ 的图象是函数 $y = x^2 - 2\sqrt{3}x + 1$ 的图象在 x 轴下方部分关于 x 轴对称到 x 轴上方，在 x 轴上方部分不变. 其图象如图 8-2.

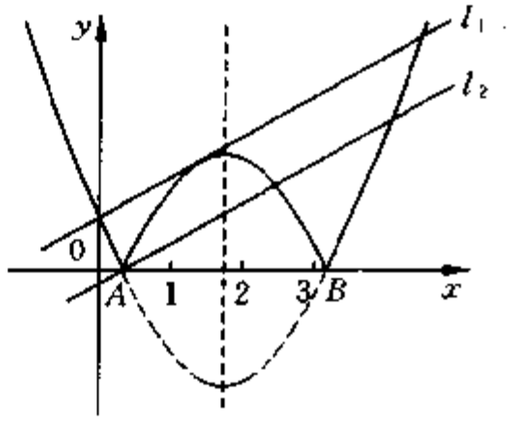


图 8-2

(2) 原方程有 4 个不同实根等价于函数 $y = |x^2 - 2\sqrt{3}x + 1|$ 与函数 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + b$ 的图象有 4 个不同的交点. 如图，$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + b$ 的图象介于 l_1、l_2 之间时，函数 $y = |x^2 - 2\sqrt{3}x + 1|$ 的图象与 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + b$ 的图象有 4 个不同的交点. 其中直线 l_1 的斜率为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$，且与 $y = |x^2 - 2\sqrt{3}x + 1|$ 的图象相切；l_2 是斜率为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$，且过点 A.

设直线 l_1 为 $y = \frac{1}{\sqrt{3}} + b_1$，则

$$\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + b_1, \\ y = |x^2 - 2\sqrt{3}x + 1| \end{cases}$$

有唯一交点，即

$$\begin{cases} y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + b_1, \\ y = -(x^2 - 2\sqrt{3}x + 1) \end{cases}$$

有唯一交点. 于是消去 y 得

$$x^2-\frac{5}{3}\sqrt{3}x+1+b_1=0,$$

必须有

$$\Delta=\left(\frac{5}{3}\sqrt{3}\right)^2-4(1+b_1)=0.$$

即

$$b_1=\frac{13}{12}.$$

又 $y=|x^2-2\sqrt{3}x+1|=|(x-\sqrt{3})^2-2|$，得 $y=0$ 时 $(x-\sqrt{3})^2=2$，即 $x=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$. 则此函数图象与 x 轴交点 A、B 的坐标分别为 $(\sqrt{3}-\sqrt{2},0)$，$(\sqrt{3}+\sqrt{2},0)$. 所以 l_2 的方程为

$$y-0=\frac{1}{\sqrt{3}}[x-(\sqrt{3}-\sqrt{2})],$$

即

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{3-\sqrt{6}}{3}.$$

于是有

$$-\frac{3-\sqrt{6}}{3}<b<\frac{13}{12}.$$

练　习　题

A　组

1. 已知二次函数 $y=-x^2+2mx+1-m^2$ 的图象经过原点，求此函数图象的顶点坐标.

2. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 8-3 所示，则下列六个代数式：ab，ac，$a+b+c$，$a-b+c$，$2a+b$，$2a-b$ 中，其值为正的式子的个数为(　　).

(A) 2 个　　(B) 3 个　　(C) 4 个　　(D) 4 个

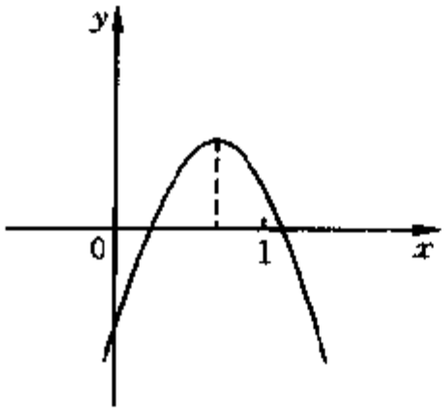


图 8-3

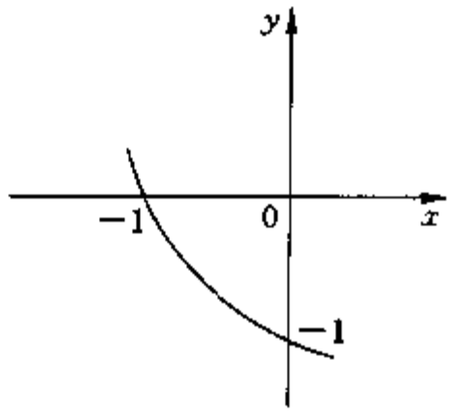


图 8-4

3. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的一部分如图 8-4，试求 $a+b+c$ 的取值范围.

4. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 8-5 所示，则点 $(a+b, ac)$ 在直角坐标系的(　　).

(A)第一象限

(B)第二象限

(C)第三象限

(D)第四象限

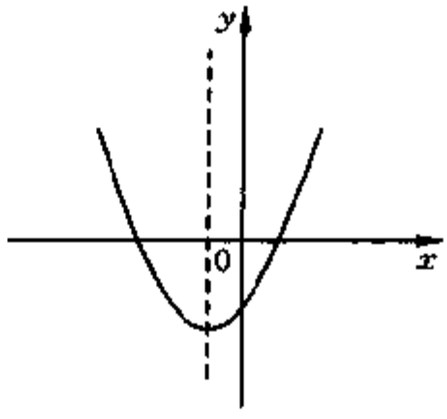


图 8-5

5. 若函数 $y=\frac{1}{2}(x^2-100x+196+|x^2-100x+196|)$，则当自变量 x 取 1、2、3、…、100 这 100 个自然数时，函数值的和是(　　).

(A)540　　(B) 390　　(C)194　　(D) 97

6. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点横坐标是 1，且经过点 $A(1,5)$，$B(3,1)$，求此抛物线的方程.

7. 如图 8-6，函数 $y=1-|x-x^2|$ 的图象大致形状是(　　).

(A) 图(A)中的实线部分　　(B) 图(B)中的实线部分

(C) 图(C)中的实线部分　　(D) 图(D)中的实线部分

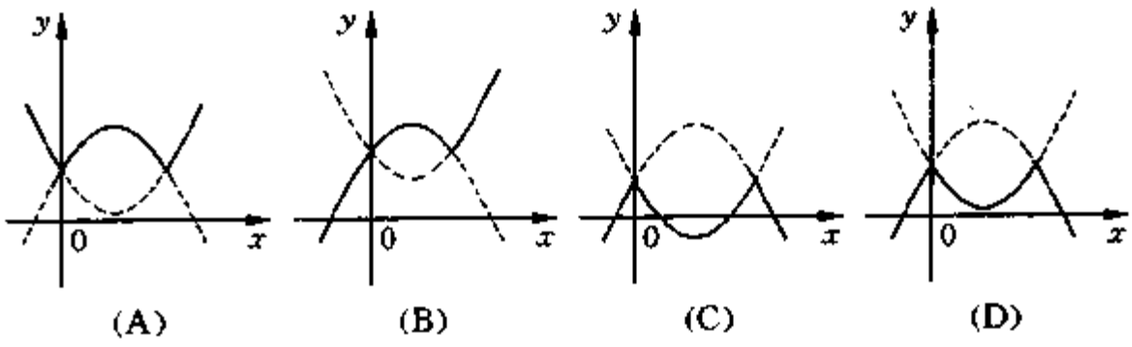


图 8-6

8. 如图 8-7，已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象的对称轴 $x=1$，则下列诸关系中(　　)成立.

(A) $abc>0$

(B) $a+b+c<0$

(C) $b<a+c$

(D) $2c<3b$

(E) $c>2b$

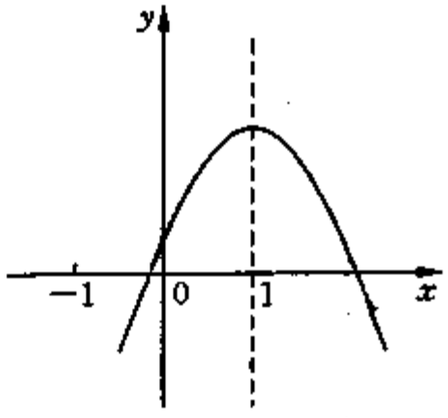


图 8-7

B　组

9. 如图 8-8，已知函数 $y=ax+b$ 和 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，那么它们的图象可以是(　　).

10. 已知二次函数图象经过点 $A(-1,-9)$及 $B(1,-1)$，且与

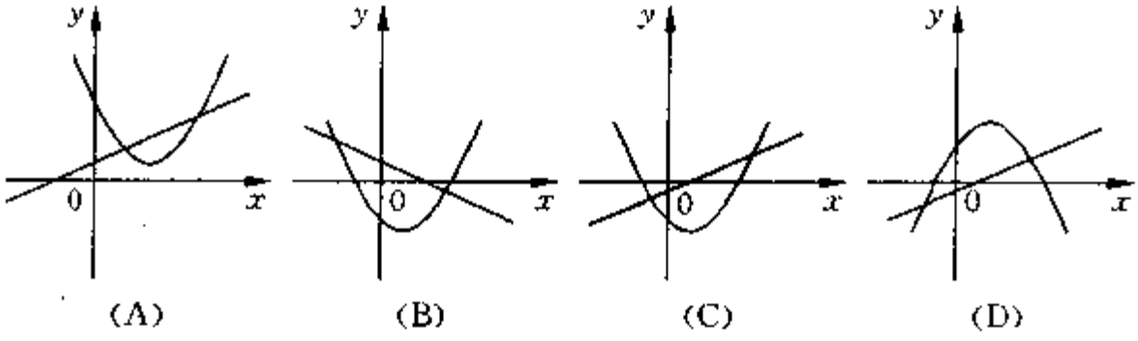


图 8-8

x 轴相切，求二次函数的解析式.

11. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点$(-1, 18)$，与 x 轴两交点距离为 3，且 $b^2 - 4ac = 9$，顶点在第四象限，求 b 及 c 的值.

12. (1) m 为何实数时，函数 $y = (m-8)x^2 - 2(m-4)x + m + 2$ 的图象与 x 轴有两个交点?

(2) k 为何实数时，函数 $y = x^2 - 3x + 1$ 的图象与直线 $y = kx$ 不相交?

13. 已知实数 a、b、c 满足 $(a+c)(a+b+c) < 0$，求证：$(b-c)^2 > 4a(a+b+c)$.

14. 设二次函数 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图象的对称轴是 $2x - 3 = 0$，在 x 轴的截距的倒数的和为 2，且经过点$(3, -3)$.

(1) 试求 a、b、c 的值.

(2) 当 x 在什么范围时，$y > 1$，或 $y < -3$?

(3) 当 x 为何值时，y 有最大值? 并求最大值.

(4) 作出此函数的图象.

测　试　题

1. 设二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象如图 8-9 所示，试判断 a，b，c，$a+b+c$，$a-b+c$，b^2-4ac 的符号.

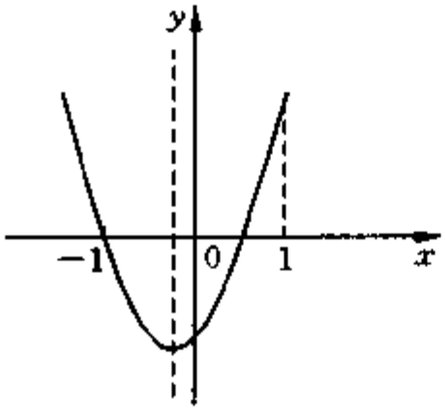


图 8-9

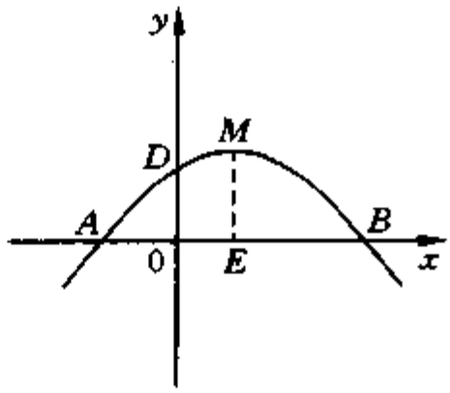


图 8-10

2. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 8-10 所示.

(1) 求 a、b、c 和 b^2-4ac 的符号.

(2) 求 A、B、D、M 各点坐标.

(3) 求 $|AB|$ 长.

(4) 求 $OA\cdot OB$ 的值.

(5) 若 $|OA|=|OD|$，求 a、b、c 的关系.

3. 二次函数 $y=x^2+px+q$ 的图象经过点 $(2,-1)$ 且与 x 轴交于不同的两点 $A(a,0)$，$B(b,0)$. 设图象顶点为 M，求使 $\triangle AMB$ 面积最小时的二次函数的解析式.

4. 设方程 $x^2-2mx+m^2-1=0$ 的两个实根分别为 α、β，求 m、k 满足什么关系时，α、β 在方程

$$x^2-2mx+k=0$$

的两个实根之间?

第九讲　函数的最大值与最小值

一、知识要点和基本方法

函数的最大值与最小值是数学竞赛中的重要内容.

一次函数 $y=kx+b$ 在给定的 $-\infty<x\leqslant m$ 上，当 $k>0$ 时有最大值 $mk+b$，无最小值；当 $k<0$ 时，函数有最小值 $mk+b$，无最大值. 对于 $m\leqslant x<+\infty$，$k>0$ 时函数有最小值 $mk+b$，无最大值；$k<0$ 时函数有最大值 $mk+b$，无最小值. 对于 $m\leqslant x\leqslant n$，$k>0$ 时函数既有最大值 $nk+b$，又有最小值 $mk+b$；$k<0$ 时函数既有最大值 $mk+b$，又有最小值 $nk+b$.

二次函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，这里 $a>0$. 于是有

(1) 在 $-\infty\leqslant x<+\infty$ 上，函数只有最小值 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，且当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时取得，而无最大值；

(2) 在 $-\infty<x\leqslant m$ 上，当 $m\leqslant-\dfrac{b}{2a}$ 时，函数有最小值 $y=f(m)$；当 $m>-\dfrac{b}{2a}$ 时，函数有最小值 $y=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

在 $m\leqslant x<+\infty$ 上，当 $m>-\dfrac{b}{2a}$ 时，函数有最小值 $y=f(m)$；当 $m\leqslant-\dfrac{b}{2a}$ 时，函数有最小值 $y=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

(3) 在 $m\leqslant x\leqslant n$ 上，当 $n\leqslant-\dfrac{b}{2a}$ 时，函数有最大值 $y=f(m)$，最小值 $y=f(n)$；当 $n>-\dfrac{b}{2a}$ 时，函数有最小值 $y=$

$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$，最大值为 $f(m)$与 $f(n)$中最大者.

对于 $a<0$，可以仿照上述讨论，得到二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 在所给区间上的最大值、最小值. 实际上，只要以 $-y$ 替代 y，就得相关结论.

求函数的最大值、最小值的基本方法有配方法和运用方程的根的判别式，但需结合上述结论.

二、例题精讲

例 1 设二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 在 $x=1$ 时取得最大值为 3，它的图象在 x 轴上截得线段长为 4. 求二次函数中的 a、b、c.

解 因为函数在 $x=1$ 时取最大值 3，所以

$$y=a(x-1)^2+3 \quad (a<0).$$

又由于它的图象在 x 轴上截得的线段长为 4，$x=1$ 是对称轴，根据对称性可知函数图象一定经过 x 轴上与点(1，0)距离为 2 的两点 $A(-1,0)$ 和 $B(3,0)$. 于是有

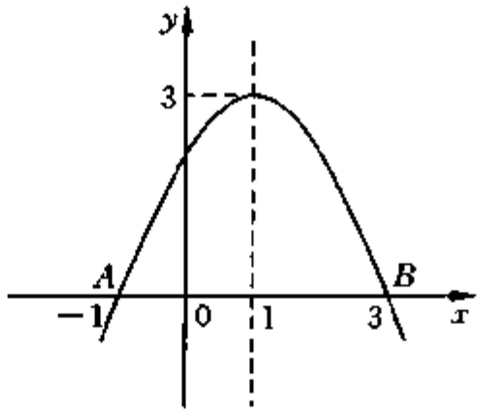


图 9-1

$$0=a(-1-1)^2+3,$$

得 $$a=-\frac{3}{4}.$$

从而推得

$$y=-\frac{3}{4}(x-1)^2+3=-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}.$$

故 $$a=-\frac{3}{4},\ b=\frac{3}{2},\ c=\frac{9}{4}.$$

说明 如果一点 $P(a,0)$关于直线 $x=b$ 对称的点为 $Q(c,0)$，那么必有

$$b-c=c-b,$$

即
$$c = 2b - a.$$

如果 P、Q 关于直线 $x = b$ 轴对称，且线段 PQ 的长为 d，那么 P、Q 两点的坐标可以分别为

$$\left(b - \frac{d}{2}, 0\right)、\left(b + \frac{d}{2}, 0\right).$$

例 2 求分式 $\dfrac{3x^2 + 6x + 5}{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}$ 的最小值.

解 令 $y = \dfrac{3x^2 + 6x + 5}{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}$，则

$$y\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right) = 3x^2 + 6x + 5,$$

即
$$(y - 6)x^2 + (2y - 12)x + 2y - 10 = 0. \qquad ①$$

根据题意知上述方程①必有实数解，而 $y - 6 = 0$ 即 $y = 6$ 时，方程①无解. 所以 $y \neq 6$，从而推知方程①为一元二次方程，且有实数解. 因此，根的判别式

$$\Delta = (2y - 12)^2 - 4(y - 6)(2y - 10) \geqslant 0,$$

即
$$(y - 6)(y - 4) \leqslant 0,$$

得
$$4 \leqslant y \leqslant 6.$$

因 $y \neq 6$，则有
$$4 \leqslant y < 6.$$

当 $y = 4$ 时，方程①的解为 $x = -1$，且使得 $x^2 + 2x + 2 \neq 0$. 所以 y 的最小值是 4，即原分式最小值是 4.

说明 (1)对于分子分母是二次三项式的分式函数求最大值、最小值问题，用方程根的判别式是基本的方法.

(2) 此题还可以有简便方法.

令 $y=\dfrac{3x^2+6x+5}{\frac{1}{2}x^2+x+1}$，则

$$y=6-\frac{2}{x^2+2x+2}.$$

问题转化为考虑函数 $f(x)=x^2+2x+2$ 的最小值.

因为 $f(x)=(x+1)^2+1$，所以 $f(x)$ 的最小值为 1，此时 $x=1$. 因而 $\dfrac{2}{x^2+2x+2}$ 有最大值，$-\dfrac{2}{x^2+2x+2}$ 有最小值. 由此推知函数

$$y=6-\frac{2}{x^2+2x+2}$$

有最小值，即原分式有最小值 4，此时 $x=1$.

例 3 已知 $-1\leqslant x\leqslant 1$，求 $y=x^2+ax+3$ 在常数 a 满足条件：(1) $0<a<2$. (2) $a>2$ 之一时的最大值和最小值.

解 令 $y=f(x)=x^2+ax+3=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{12-a^2}{4}$.

(1) 由 $0<a<2$ 得 $-1<-\dfrac{a}{2}<0$. 又 $-1<\dfrac{a}{2}<1$，于是根据二次函数 $y=f(x)(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的图象及最大值、最小值性质可知，此函数的最小值为 $\dfrac{12-a^2}{4}$，此时 $x=-\dfrac{a}{2}$.

因为 $f(-1)=4-a$，$f(1)=4+a$，且 $f(1)>f(-1)$，所以，$-1\leqslant x\leqslant 1$ 上函数的最大值为 $4+a$，此时 $x=1$；最小值为 $\dfrac{12-a^2}{4}$，此时 $x=-\dfrac{a}{2}$.

(2) 由 $a>2$ 得 $-\dfrac{a}{2}<-1$，于是根据二次函数的最大值、最小值性质可知，在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上，函数 $y=f(x)$ 的最小值为 $f(-1)=4-a$，最大值为 $f(1)=4+a$.

例 4 已知对于任意实数 x，二次三项式 $k^{-3}-x-k^2x^2$ 的值的符号保持不变，求 k 的取值范围.

解 令 $y=-k^2x^2-x+k^{-3}$，则由 k^{-3} 知 $k\neq 0$，所以函数的图

象开口向下.

要使得对于任意实 x，函数值的符号保持不变，那么函数值必须均为负数. 于是有函数图象顶点纵坐标

$$\frac{4(-k^2)\cdot k^{-3}-(-1)^2}{4\times(-k^2)}<0,$$

即
$$1+\frac{4}{k}<0,$$

得
$$-4<k<0.$$

说明 可以视为方程 $-k^2x^2-x+k^{-3}=0$ 无实数根，则根的判别式 $\Delta<0$.

例 5 已知实数 a、b 满足等式

$$(a-2)^2+b^2=3.$$

求 $\frac{b}{a}$ 的最大值和最小值.

解 令 $\frac{b}{a}=s$，则 $b=as$，于是有

$$(a-2)^2+a^2s^2=3,$$

即
$$(1+s^2)a^2-4a+1=0. \qquad ②$$

因为 $1+s^2\neq 0$，所以上述关于 a 的二次方程②有实数解，从而推知

$$\Delta=4^2-4\times(1+s^2)\times 1\geqslant 0,$$

即
$$s^2-3\leqslant 0,$$

得
$$-\sqrt{3}\leqslant s\leqslant\sqrt{3}.$$

当 $s=-\sqrt{3}$ 时，由方程②得 $(2a-1)^2=0$，即 $a=\frac{1}{2}$，则 $b=\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

当 $s=\sqrt{3}$ 时，由方程②得 $a=\frac{1}{2}$，则 $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以，当 $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$\frac{b}{a}$ 取得最小值 $-\sqrt{3}$；当 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$\frac{b}{a}$ 取得最大值 $\sqrt{3}$.

例 6 已知 a、b 为实数，求 a^2+ab+b^2-a-2b 的最小值.

解 设 $A=a^2+ab+b^2-a-2b$，则有

$$a^2+(b-1)a+b^2-2b-A=0 \qquad ③$$

③式可以看作是关于 a 的一元二次方程，因 a 是实数，所以

$$\Delta=(b-1)^2-4(b^2-2b-A)\geqslant 0,$$

即

$$3b^2-6b-4A-1\leqslant 0 \qquad ④$$

④式表示函数 $y=3b^2-6b-4A-1$ 一定有非正值，于是函数图象顶点的纵坐标必定非正值，即

$$\frac{4\times 3\times(-4A-1)-6^2}{4\times 3}\leqslant 0,$$

得

$$A\geqslant -1.$$

当 $A=-1$ 时，由④得 $b=1$，从而知 $a=0$.

所以，当 $a=0$，$b=1$ 时，a^2+ab+b^2-a-2b 有最小值 -1.

说明 注意到 $A=a^2+ab+b^2-a-2b$ 中有 ab 项，通常考虑设 $a=s-t$，$b=s+t$，则 s，t 均为实数，且有

$$\begin{aligned}A&=3s^2+t^2-3s-t\\&=3\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-1\\&\geqslant -1.\end{aligned}$$

等号当且仅当 $s=\frac{1}{2}$，$t=\frac{1}{2}$ 时取得.

因此，当 $a=0, b=1$ 时，A 有最小值 -1.

例 7 如图 9-2，有一条河，两个工厂 P 和 Q 位于河岸 l（直线）的同一侧. 工厂 P 和 Q 距离河岸 l 分别为 8 千米和 10 千米. 两个工厂的距离为 14 千米. 现在要在河的工厂一侧选一点 R，在 R 处建一个水泵站，从 R 修建直线输水管分别到两个工厂和河岸，使直线输水管的总长最小，请确定出 R 的位置，并分别求出水泵站 R 到两工厂和河岸的距离.

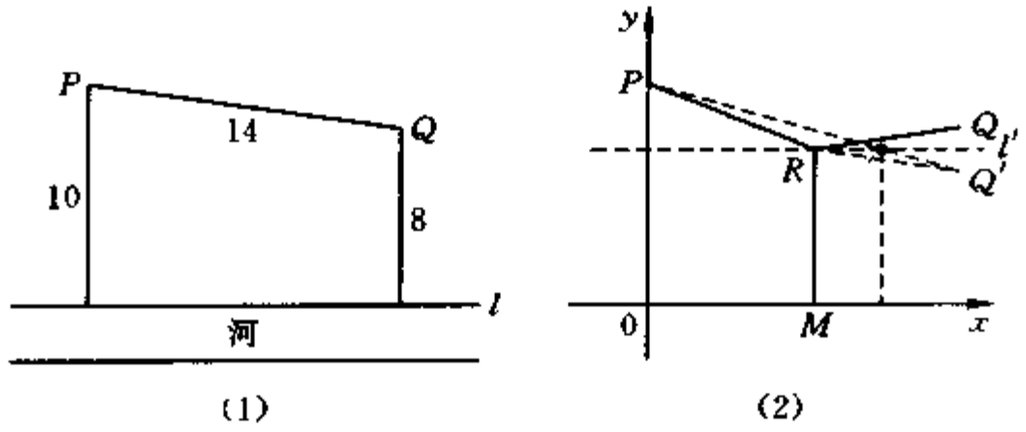


图 9-2

解 如图 9-2，建立直角坐标系，设 $|RM|=a$，$P(0, 10)$，$Q(\sqrt{14^2-(10-8)^2}, 8)$，则 Q 点关于直线 $l': y=a(a>0)$ 的对称点 $Q'(8\sqrt{3}, 2a-8)$. 于是直线输水管的总长为

$$s=|PR|+|RQ|+|RM|$$

$$\geqslant |PQ'|+a.$$

从而令

$$s'=a+|PQ'|=a+\sqrt{(8\sqrt{3}-0)^2+(2a-8-10)^2}.$$

即

$$s'=a+2\sqrt{a^2-18a+129}. \qquad ⑤$$

⑤式化为

$$3a^2+(2s'-72)a+(4\times 129-s'^2)=0. \qquad ⑥$$

⑥式是关于 a 的一元二次方程，且 a 为正实数，所以，

$$\Delta = (2s' - 72)^2 - 4 \times 3 \times (4 \times 129 - s'^2) \geqslant 0,$$

即

$$s'^2 - 18s' - 3 \times 21 \geqslant 0,$$

得

$$s' \leqslant -3 \quad 或 \quad s' \geqslant 21.$$

因为 $s' > 0$，所以 $s' \geqslant 21$.

当 $s' = 21$ 时，由⑥式得 $a = 5$. 所以，当 $a = 5$ 时，$s \geqslant s' \geqslant 21$，即 s 取得最小值 21.

例 8 已知 a、b、c 都是正整数，且二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴有两个不同的交点 A、B，若 A、B 到原点的距离都小于 1，求 $a + b + c$ 的最小值.

解 设函数图象与 x 轴的两个交点 A、B 坐标为 $(x_1, 0)$，$(x_2, 0)$，且 $x_1 < x_2$，则有

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

又 a、b、c 为正整数，于是有

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0,$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0.$$

从而推知 x_1、x_2 均为负数.

又由题意知 $|x_1| < 1$，$|x_2| < 1$.

则

$$-1 < x_1 < x_2 < 0.$$

因此，如图 9-3，有

$$b^2 - 4ac > 0, \qquad ⑦$$

$$-1 < -\frac{b}{2a} < 0, \qquad ⑧$$

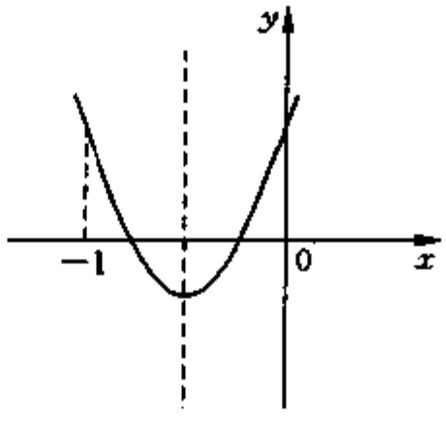


图 9-3

$$a\cdot(-1)^2+b(-1)+c>0, \tag{9}$$

$$a\cdot 0^2+b\cdot 0+c>0. \tag{10}$$

因为 $a\geqslant 1$，$b\geqslant 1$，$c\geqslant 1$，且为正整数，则⑩显然成立. 由⑨式得 $a+c>b$，即

$$a+c\geqslant b+1, \tag{11}$$

于是由⑦、⑧、⑪式知 $c\geqslant 1$，要使 $a+b+c$ 取最小值，则 $c=1$.

当 $c=1$ 时，由⑪式得　$a\geqslant b$. ⑫

由⑦、⑫式得 $b^2>4a\geqslant 4b$，则 $b>4$. 所以由 $b>4$ 得 $a\geqslant b>4$，从而推知 $a\geqslant b\geqslant 5$.

因此，当 $b=5$，$a=5$，$c=1$ 时，$a+b+c$ 取得最小值 $5+5+1=11$.

说明　此题可以推广为

若 a、b、c 均为正整数，且函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有两个不同的交点，且交点到原点的距离小于 m（m 为正整数），则

$$a+b+c\geqslant\left[\frac{4}{m^2}\right]+\left[\frac{4}{m}\right]+3,$$

这里$[x]$表示不大于 x 的整数.

同例 8 解法有 $m^2a+c\geqslant mb+1$，$b^2-4ac>0$，及 $-m<-\frac{b}{2a}$，于是取 $c=1$，就有 $ma\geqslant b$，即 $a\geqslant\frac{b}{m}$，从而有

$$b^2>4a\geqslant\frac{4}{m}b.$$

因此取 $b\geqslant\left[\frac{4}{m}\right]+1$，则 $a\geqslant\left[\frac{4}{m^2}\right]+1$. 故

$$a+b+c\geqslant\left[\frac{4}{m^2}\right]+\left[\frac{4}{m}\right]+3.$$

练　习　题

A　组

1. 求函数 $y = x^2 - 4x + 3(0 \leqslant x \leqslant 5)$ 的最大值与最小值.

2. 求函数 $y = (x+a)^2 + (x+b)^2 + (x+c)^2$ 的最小值，其中 a、b、c 是不等于零的常数.

3. 求函数 $y = 3 - \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$ 的最小值.

4. 设平方数 y^2 是 11 个连续整数的平方和，求 y 的最小值.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC = 2$，BC 边上的高 $AD = 1$，P 是 BC 上任一点，$PE \parallel AB$ 交 AC 于 E，$PE \parallel AC$ 交 AB 于 F.

(1) 设 $BP = x$，将 $S_{\triangle PEF}$ 用 x 表示.

(2) P 在 BC 的什么位置时，$S_{\triangle PEF}$ 最大.

6. 已知 $x^2 + 2y^2 = 1$，求 $2x+5y^2$ 的最大值和最小值.

7. 如图 9-4，$\triangle ABC$ 中，D、E 分别是边 BC、AB 上的点，且 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. 已知 $\triangle ABC$、$\triangle EBD$、$\triangle ADC$ 的周长依次为 m、m_1、m_2，证明：$\dfrac{m_1 + m_2}{m} \leqslant \dfrac{5}{4}$.

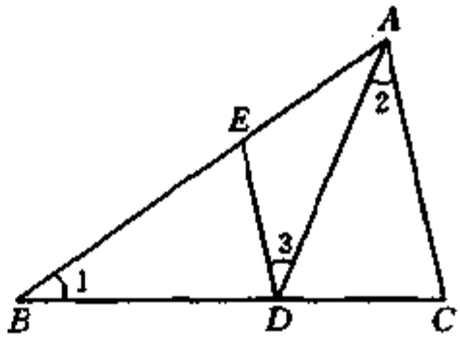


图 9-4

8. 求函数 $y = (m+1)x^2 - 2(m+1)x - m$ 的最大值或最小值，其中 m 为常数 $(m \neq -1)$.

B　组

9. 求函数 $f(x) = x|x| - 2x - |x|$ 在 $-1 \leqslant x \leqslant a$ 的最小值.

10. 已知边长为 4 的正方形如图 9-5，截去一角成五边形 $ABCDE$，其中 $AF = 2$，$FB = 1$. 在 AB 上求一点 P，使矩形 $PNDM$ 有最大面积.

11. 函数 $y=\dfrac{ax+7}{ax^2+ax+3}$ 的定义域是全体实数，求 a 的取值范围.

12. 设方程 $mx^2+(m+2)x-9m=0$ 有两个实数根 x_1，x_2，且 $x_1<1<x_2$，求 m 的取值范围.

13. 设 a 是实数，求二次函数 $y=x^2-4ax+5a^2-3a$ 的最小值 m；当 a 在 $0\leqslant a^2-4a-2\leqslant 10$ 中变动时，求 m 的最大值.

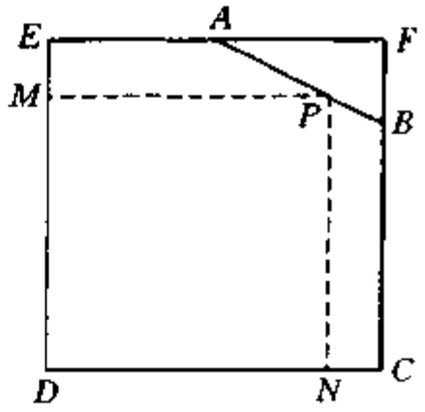


图 9-5

14. 已知正方形 $ABCD$ 边长为 a，经过 AB 边上一点 P 作平行于对角线 AC、BD 的平行线，分别与边 BC、AD 交于 Q 和 R. 设 $\triangle PQR$ 面积为 y，AP 为 x. 问 P 在 AB 上什么位置时，$\triangle PQR$ 面积最大？最大面积是多少？

测 试 题

1. 求函数 $y = x^2 - 2ax(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 的最大值、最小值.

2. 已知实数 a、b 满足

$$\sqrt{a^2 - 2a + 1} + \sqrt{36 - 12a + a^2} = 10 - |b + 3| - |b - 2|,$$

求 $a^2 + b^2$ 的最大值.

3. 已知函数 $y=f(x)$表示 $x-1$ 与 $|x^2 - 4x + 3|$ 两者中较大的一个，求在 $0 \leqslant x \leqslant 5$ 内函数 $f(x) - x$ 的取值范围.

4. 有一种产品，生产 x 吨，耗费 $\left(\frac{1}{10}x^2 + 5x + 1000\right)$ 元；若售出 x 吨，则每吨价格为 $\left(a + \frac{x}{b}\right)$ 元. 如果所生产的产品能全部卖掉，且生产 150 吨时利润最大，这时每吨价格为 40 元. 求 a、b 的值.

5. 已知 a、b、c 是实数，且 $a > b > c$，$a + b + c = 0$，函数 $y = ax^2 + 2bx + c$.

(1) 求证：此函数图像与 x 轴交于不同的两点.

(2) 设函数图象截 x 轴所得线段长为 d，试证明：

$$\sqrt{3} < d < 2\sqrt{3}.$$

第十讲　一元二次不等式

一、知识要点和基本方法

形如 $ax^2+bx+c>0$(或 <0、或 $\geqslant 0$、或 $\leqslant 0$)，其中 $a\neq 0$ 的不等式叫做一元二次不等式.

我们已经知道

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

对于 $a>0$，当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不同的实根 α、β，且 $\alpha<\beta$，则 $ax^2+bx+c>0$ 的解为 $x<\alpha$ 或 $x>\beta$，$ax^2+bx+c<0$ 的解为 $\alpha<x<\beta$.

当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 $\alpha=\beta$，得 $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=a(x-\alpha)^2$，则 $ax^2+bx+c>0$ 的解为 $x\neq\alpha$，即 $x\neq-\frac{b}{2a}$. $ax^2+bx+c<0$ 无解.

当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解为一切实数即 x 可以取任意实数，$ax^2+bx+c<0$ 无解.

对于 $a<0$，只需在不等式 $ax^2+bx+c>0$(或 <0) 的两边同乘以 -1，就化为上述情形.

注意　对于不等式 $ax^2+bx+c\geqslant 0$(或 $\leqslant 0$)，只需综合上述结果及方程 $ax^2+bx+c=0$ 的可解性.

在具体解一元二次不等式时，常常结合于二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象简捷地得到结果.

二、例题精讲

例1 解不等式

$$x^2-5|x|+6>0. \qquad ①$$

解 当 $x\geqslant 0$ 时，①化为

$$x^2-5x+6>0,$$

即 $$(x-2)(x-3)>0,$$

得 $$x<2 \text{ 或 } x>3.$$

于是 $$0\leqslant x<2 \text{ 或 } x>3.$$

当 $x<0$ 时，①化为

$$x^2+5x+6>0,$$

即 $$(x+2)(x+3)>0,$$

得 $$x<-3 \quad \text{或} \quad x>-2,$$

于是 $$x<-3 \quad \text{或} \quad -2<x<0.$$

所以，原不等式的解为

$$x<-3 \text{ 或 } -2<x<2, \quad \text{或} \quad x>3.$$

说明 利用函数图象易知结论.

当 $x\geqslant 0$ 时，函数 $y=x^2-5x+6=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ 的图象的顶点为 $\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right)$，与 x 轴两个交点为 $(3,0)$，$(2,0)$，则 $x^2-5x+6>0$ 就是函数图象 x 轴上方 y 轴右侧部分.

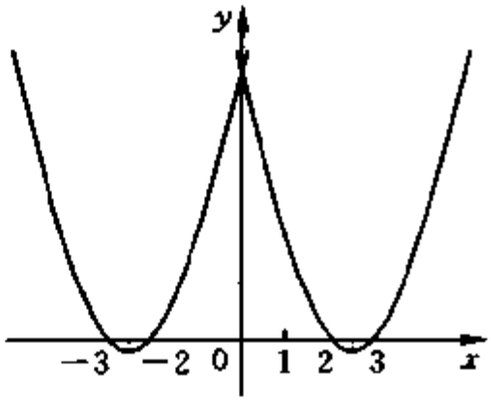


图 10-1

当 $x<0$ 时，函数 $y=x^2+5x$

$+6=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ 的图象顶点为$\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right)$，与 x 轴两个交点为$(-2,0)$，$(-3,0)$，则 $x^2+5x+6>0$ 就是函数图象 x 轴上方 y 轴左侧的部分. 如图 10-1，得不等式的解

$$x<-3,\ -2<x<2,\ x>3.$$

例 2 解关于 x 的一元二次不等式

$$ax^2-(a+1)x+1<0.$$

解 (1) $a=0$ 时，原不等式为 $-x+1<0$，即 $x>1$.

(2) 当 $a\neq 0$ 时，原不等式化为

$$(ax-1)(x-1)<0,$$

即

$$a\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)<0.$$

若 $a>0$，则 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)<0$. 当 $a>1$ 时，$\frac{1}{a}<x<1$；当 $a<1$ 时，$1<x<\frac{1}{a}$；当 $a=1$ 时，不等式无解.

若 $a<0$，则$\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)>0$，得

$$x<\frac{1}{a}\quad 或\quad x>1.$$

所以，$a=0$ 时不等式解为 $x>1$；$a>1$ 时，不等式解为 $\frac{1}{a}<x<1$；$0<a<1$ 时不等式解为

$1<x<\frac{1}{a}$；$a=1$ 时不等式无解；$a<0$ 时不等式的解为 $x<\frac{1}{a}$，$x>1$.

例 3 解不等式组

$$\begin{cases}x^2+2x-35>0,\\ |x-2|<10.\end{cases}$$

解 由 $x^2+2x-35>0$ 得 $x<-7$ 或 $x>5$.

由 $|x-2|<10$ 得 $-8<x<12$.

于是原不等式组的解就是

$$\begin{cases} x<-7 \text{ 或 } x>5, \\ -8<x<12 \end{cases}$$

的公共部分，即

$$-8<x<-7,\ 5<x<12.$$

例 4 a 取何值时，方程 $x^2+2ax+2a+1=0$ 在区间 $(-4,\ 0)$ 中有两个不相等的实数根.

解 设 $y=x^2+2ax+2a+1$，则

$$y=(x+a)^2+2a+1-a^2.$$

方程 $x^2+2ax+2a+1=0$ 在区间 $(-4,\ 0)$ 中有两个不相等的实数根等价于函数图像与 x 轴有两个不同的交点，顶点的纵坐标小于 0、横坐标在 -4 与 0 之间，且 $x=-4$ 和 $x=0$ 时函数均大于 0，即有

$$\begin{cases} 2a+1-a^2<0, \\ -4<-a<0. \\ (-4)^2+2a\cdot(-4)+2a+1>0, \\ 0^2+2a\cdot 0+2a+1>0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} a<1-\sqrt{2} \quad \text{或} \quad a>1+\sqrt{2}, \\ 0<a<4, \\ a<\dfrac{17}{6}, \\ a>-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

所以有

$$1+\sqrt{2}<a<\frac{17}{6}.$$

例 5 已知方程 $7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$ (k 是常数)有两实根 α、β，且 $0<\alpha<1$，$1<\beta<2$，求 k 的取值范围.

解 设 $y=f(x)=7x^2-(k+13)x+k^2-k-2$，则由题意知，函数 $f(x)$的图象与 x 轴的交点一个在 0 与 1 之间，另一个在 1 与 2 之间，又 $7>0$，所以有

$$\begin{cases} f(0)=k^2-k-2>0, \\ f(1)=7-(k+13)+k^2-k-2<0, \\ f(2)=28-2(k+13)+k^2-k-2>0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} k>2 \text{ 或 } k<-1, \\ -2<k<4, \\ k<0 \text{ 或 } k>3. \end{cases}$$

于是不等式组的解集为

$$-2<k<-1, \text{ 或 } \quad 3<k<4.$$

例 6 在坐标平面上，纵坐标与横坐标都是整数的点称为整点. 试在二次函数 $y=\frac{x^2}{10}-\frac{x}{10}+\frac{9}{5}$ 的图象上找出满足 $y\leqslant|x|$ 的所有整点(x, y)，并说明理由.

解 由题意得

$$y=\frac{x^2}{10}-\frac{x}{10}+\frac{9}{5}\leqslant|x|,$$

即有

$$x^2-x+18\leqslant 10|x|. \qquad ②$$

当 $x\geqslant 0$ 时，②式化为

$$x^2-11x+18\leqslant 0,$$

得

$$2\leqslant x\leqslant 9.$$

又 $10y=x^2-x-2+20=(x-2)(x+1)+20$，则满足 x 及 y 均是整数的有 $x=2$，$y=2$；$x=4$，$y=3$；$x=7$，$y=6$；x

$=9$，$y=9$.

当 $x<0$ 时，②式化为

$$x^2+9x+18\leqslant 0,$$

得

$$-6\leqslant x\leqslant -3.$$

则满足 x 及 y 均是整数的有 $x=-3$，$y=3$；$x=-6$，$y=6$.

所以满足题中要求的整点是

$(-3,3)$，$(-6,6)$，$(2,2)$，$(4,3)$，$(7,6)$，$(9,9)$.

例7 已知三角形三条边 a、b、c 同时满足

$$a^2+2b-12c+15=0.$$

$$a+2b-6c+9=0.$$

若最大边 a 是整数，求 a、b、c.

解 由题意得

$$b=\frac{a^2-2a-3}{2},\ c=\frac{a^2-a+6}{6}.$$

因为 a 是最大边，所以有 $b>0$，$c>0$，$a\geqslant b$，$a\geqslant c$ 及 $a<b+c$. 从而有

$$\begin{cases} a \text{ 是正整数.} & ③\\ \dfrac{a^2-2a-3}{2}>0, & ④\\ \dfrac{a^2-a+6}{6}>0, & ⑤\\ a\geqslant\dfrac{a^2-2a-3}{2}, & ⑥\\ a\geqslant\dfrac{a^2-a+6}{6}, & ⑦\\ a<\dfrac{a^2-2a-3}{2}+\dfrac{a^2-a+6}{6}. & ⑧ \end{cases}$$

由③、④及⑥知 $a=4$. 当 $a=4$ 时易知⑤、⑦与⑧式成立. 于是

$$b=\frac{5}{2},\ c=3.$$

例 8 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，不等式

$$(1+px)(1+x)\leqslant x^3+x^2+3x+1\leqslant(1+qx)(1+x)$$

恒成立，求 p、q 的范围.

解 题中不等式化为

$$\begin{cases}x^3+x^2+3x+1\geqslant(1+x)(1+px), & ⑨\\ x^3+x^2+3x+1\leqslant(1+x)(1+qx). & ⑩\end{cases}$$

由⑨式得

$$x(x^2-(p-1)x+2-p)\geqslant 0, \qquad ⑪$$

由⑩式得

$$x(x^2-(q-1)x+2-q)\leqslant 0. \qquad ⑫$$

因为 $0\leqslant x\leqslant 1$，所以考虑

$$f(x)=x^2-(p-1)x+2-p,$$

$$g(x)=x^2-(q-1)x+2-q.$$

要使 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时 $f(x)\geqslant 0$，则必须有函数图象对称轴在 y 轴左侧，且 $f(0)\geqslant 0$；或者对称轴在直线 $x=1$ 的右侧，且 $f(1)\geqslant 0$；或顶点横坐标在 0 与 1 之间，纵坐标恒大于等于 0. 于是有

$$f(x)=\left(x-\frac{p-1}{2}\right)^2+\frac{7-p^2-2p}{4}.$$

且

$$\begin{cases}\dfrac{p-1}{2}\leqslant 0,\\ f(0)=2-p\geqslant 0;\end{cases}$$

或者

$$\begin{cases}\dfrac{p-1}{2}\geqslant 1,\\ f(1)=4-2p\geqslant 0;\end{cases}$$

或者
$$\begin{cases} 0 \leqslant \dfrac{p-1}{2} \leqslant 1. \\ \dfrac{7-p^2-2p}{4} \geqslant 0. \end{cases}$$

解之得

$$p \leqslant 2\sqrt{2} - 1.$$

对于 $g(x) = \left(x - \dfrac{q-1}{2}\right)^2 + \dfrac{7-q^2-2q}{4}$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上恒 $\leqslant 0$，则必有

$$\begin{cases} g(0) = 2 - q \leqslant 0, \\ g(1) = 4 - 2q \leqslant 0, \end{cases}$$

得 $q \geqslant 2$.

所以，满足要求的 p、q 满足

$$p \leqslant 2\sqrt{2} - 1, \quad q \geqslant 2.$$

练　习　题

A　组

1. 解不等式　$x-\frac{5}{2}>x(x-2)-\frac{1}{4}$.

2. 解不等式　$|x^2-2x-3|>2$.

3. 解不等式　$x^2-2x-3>3|x-1|$.

4. 解关于 x 的不等式　$56x^2+ax>a^2$.

5. a 为何值时，只有一个 x 值满足不等式

$$0<x^2+ax+5\leqslant 4.$$

6. 解不等式

$$-x<x^2-2<x.$$

7. 解关于 x 的不等式组

$$\begin{cases}2x^2<6+x,\\ x^2-2x>ax-2a.\end{cases}$$

8. 当 a 为何值时，不等式组

$$\begin{cases}x^2+y^2+2x\leqslant 1,\\ x-y+a=0\end{cases}$$

有唯一一组解 (x, y)？求这组解.

9. 设 $\alpha<\beta<\gamma$，求不等式

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)<0$$

的解.

B　组

10. 整系数方程 $x^2+(k+3)x+(2k+3)=0$ 两根异号且正根的绝对值小于负根的绝对值，求 k.

11. 二次函数 $f(x)=x^2-2ax+6$，当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，恒有 $f(x)\geqslant a$，求 a 的取值范围.

12. 若不等式 $ax^2+abx+b>0$ 的解为 $1<x<2$，试确定 a、b 的值.

13. 已知同时满足不等式

$$x^2-x-2>0,$$

$$2x^2+(5+2k)x+5k<0$$

的 x 的整数只有 -2，求 k 的取值范围.

14. 要使满足

$$\frac{x+y}{2}=\frac{y+z}{3}=\frac{z+x}{7}$$

的一切实数 x、y、z 也满足不等式

$$x^2+y^2+z^2+a(x+y+z)>-1,$$

求 a 的取值范围.

15. 设三角形三边为 a、b、c，满足

$$a^2-a-2b-2c=0,$$

$$a+2b-2c+3=0,$$

问三角形哪一边最大？

测 试 题

1. 已知方程 $2x^2+3x+5m=0$ 的两根均小于 1，求 m 的取值范围.

2. 关于 x 的分式方程

$$\frac{1}{x+2}-\frac{k}{x-2}=1-\frac{4x}{x^2-4}$$

有两个实数根，那么，k 应满足(　　).

(A) $k^2-18k+33>0$

(B) $k^2-18k+33>0$，且 $k\neq 2$

(C) $k\neq 2$

(D) 以上答案均不正确

3. 设 a、b 是正数且 $a<b$.

(1) 解不等式 $a^3+b^3-x^3>(a+b-x)^3$.

(2) 对任意实数 x，求出使不等式

$$a^3+b^3-x^3\leqslant(a+b-x)^3+m$$

恒成立的 m 的最小值.

4. 设实数 a、b、c、m 满足条件

$$\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0,$$

且 $a\geqslant 0$，$m>0$，求证：方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根 x_0，满足 $0<x_0<1$.

第十一讲　锐角三角函数

一、知识要点和基本方法

如图 11-1，我们有

$$\sin A = \frac{a}{c},\ \cos A = \frac{b}{c},$$

$$\sin B = \frac{b}{c},\ \cos B = \frac{a}{c},$$

$$\tan A = \frac{a}{b},\ \tan B = \frac{b}{a}.$$

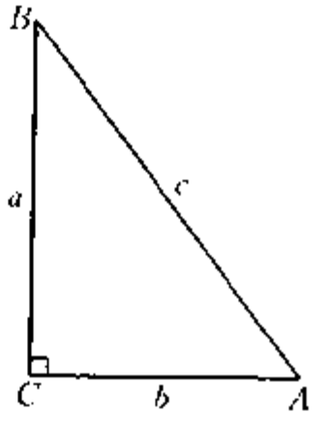


图 11-1

利用上述基本关系式，可以解决关于锐角三角函数的问题. 其基本思路就是运用直角三角形中边、角之间关系转化所欲解决的问题.

如果已知三角形的两边 a、b 及其夹角 C，那么这个三角形的面积为

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab\sin C.$$

对于 $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$，则 $\sin\alpha$ 的值随 α 增大而增大，$\cos\alpha$ 的值随 α 增大而减小，且当 $0° \leqslant \alpha < 45°$ 时，$\sin\alpha < \cos\alpha$，当 $45° < \alpha \leqslant 90°$ 时 $\sin\alpha > \cos\alpha$，$\alpha = 45°$ 时 $\sin\alpha = \cos\alpha$.

对于给定的角 α，我们有结论

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

在 $\triangle ABC$ 中，$AC = b$，$AB = c$，$BC = a$，过 A 作边 BC 上的

高，长为 h_a，如图 11-2，则有

$$\sin B = \frac{h_a}{c},\ \sin C = \frac{h_a}{b},$$

从而

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

同理可得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$.

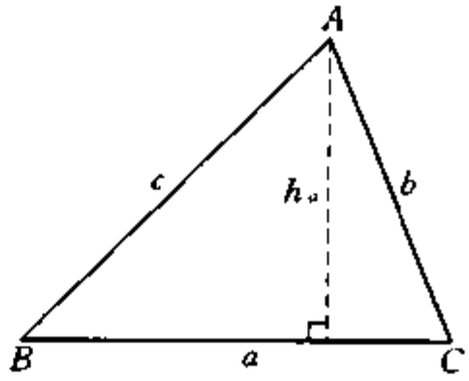


图 11-2

于是我们有结论：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

这就是正弦定理，其比值等于 $2R$，R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径. 运用正弦定理可以将边与角互相转化.

二、例题精讲

例 1 如图 11-3，已知 α 是 $\triangle ABC$ 中的一个锐角，试判别 $\sin\alpha + \cos\alpha$ 的值与 1 的大小关系，并说明理由.

解 设 $\angle ABC = \alpha$，过 A 作 $AD \perp BC$ 交 BC 于 D 点，则 $\triangle ABD$ 为直角三角形，$\angle D = 90°$. 所以

$$\sin\alpha = \frac{AD}{AB},\ \cos\alpha = \frac{BD}{AB},$$

从而有

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{AD + BD}{AB}.$$

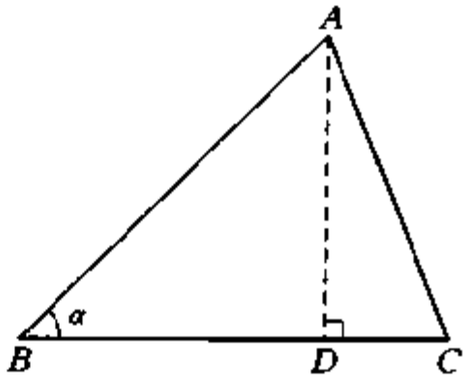


图 11-3

又在 $\triangle ABD$ 中一定有 $AD + BD > AB$，所以

$$\sin\alpha + \cos\alpha > 1.$$

例 2 已知 $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}$，求 $\sin\alpha\cos\alpha$ 的值.

解 由 $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}$ 得

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=(\sqrt{2})^2,$$

即

$$1+2\sin\alpha\cos\alpha=2,$$

得

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}.$$

说明 当已知 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 之间和或差的值时，常考虑运用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 转化问题.

例 3 试比较：(1)$\tan 48^\circ+\cot 48^\circ$；(2)$\sin 48^\circ+\cos 48^\circ$；(3) $\tan 48^\circ+\cos 48^\circ$；(4)$\cot 48^\circ+\sin 48^\circ$ 这四个数值的大小.

解 因为 $0^\circ<48^\circ<90^\circ$，所以 $0<\sin 48^\circ<1$，$0<\cos 48^\circ<1$，且

$$\cot 48^\circ=\frac{\cos 48^\circ}{\sin 48^\circ}>\cos 48^\circ,$$

$$\tan 48^\circ=\frac{\sin 48^\circ}{\cos 48^\circ}>\sin 48^\circ,$$

从而推知 $\tan 48^\circ+\cot 48^\circ>\tan 48^\circ+\cos 48^\circ$，

$\tan 48^\circ+\cot 48^\circ>\cot 48^\circ+\sin 48^\circ$，

$\tan 48^\circ+\cos 48^\circ>\sin 48^\circ+\cot 48^\circ$，

$\cot 48^\circ+\sin 48^\circ>\sin 48^\circ+\cos 48^\circ$.

又

$$(\tan 48^\circ+\cos 48^\circ)-(\cot 48^\circ+\sin 48^\circ)$$

$$=\frac{\sin^2 48^\circ-\cos^2 48^\circ}{\sin 48^\circ\cdot\cos 48^\circ}+(\cos 48^\circ-\sin 48^\circ)$$

$$=\frac{(\sin 48^\circ-\cos 48^\circ)(\sin 48^\circ+\cos 48^\circ-\sin 48^\circ\cdot\cos 48^\circ)}{\sin 48^\circ\cdot\cos 48^\circ},$$

$45^\circ<48^\circ<90^\circ$，所以，$\sin 48^\circ>\cos 48^\circ$，$1-\cos 48^\circ>0$，从而有

$$(\tan 48^\circ+\cos 48^\circ)-(\cot 48^\circ+\sin 48^\circ)>0,$$

即　　$\tan 48^\circ + \cos 48^\circ > \cot 48^\circ + \sin 48^\circ.$

于是有

$$\tan 48^\circ + \cot 48^\circ > \tan 48^\circ + \cos 48^\circ > \cot 48^\circ + \sin 48^\circ$$
$$> \sin 48^\circ + \cos 48^\circ.$$

例 4　在$\triangle ABC$中，a、b、c分别是角A、B、C的对边，且$\frac{b+c}{10}=\frac{c+a}{15}=\frac{a+b}{11}$，求$\sin A:\sin B:\sin C$.

解　设$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，则

$$a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C.$$

于是题中条件化为

$$\frac{\sin B+\sin C}{10}=\frac{\sin C+\sin A}{15}=\frac{\sin A+\sin B}{11}.$$

令上述此值为t，那么

$$\sin B+\sin C=10t,$$
$$\sin C+\sin A=15t,$$
$$\sin A+\sin B=11t.$$

所以有

$$\sin A=8t,\ \sin C=7t,\ \sin B=3t,$$

从而得

$$\sin A:\sin B:\sin C=8:3:7.$$

例 5　已知$2\sin^2\alpha-5\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha=3$，且$0^\circ<\alpha<90^\circ$，求$\tan\alpha$的值.

解　当$\cos\alpha=0$时，题中等式化为

$$\sin^2\alpha=\frac{3}{2}>1,$$

但$\sin\alpha<1$矛盾，所以，$\cos\alpha\neq 0$，则原等式化为

$$\sin^2\alpha - 5\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0.$$

在上式两边同除以 $\cos^2\alpha$，得

$$\tan^2\alpha + 5\tan\alpha - 1 = 0.$$

这就是关于 $\tan\alpha$ 的一元二次方程，解这个一元二次方程得

$$\tan\alpha = \frac{-5-\sqrt{29}}{2} \quad 或 \quad \tan\alpha = \frac{-5+\sqrt{29}}{2}.$$

因为 $0° < \alpha < 90°$，所以 $\tan\alpha > 0$，故

$$\tan\alpha = \frac{-5+\sqrt{29}}{2}.$$

例 6 已知三角形两边之和是 10，这两边的夹角为 30°，面积为 $\frac{25}{4}$，求证此三角形为等腰三角形.

证明 由题意可设 $a+b=10$，$\alpha = 30°$，

则 $$S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{25}{4},$$

即 $$\frac{1}{2}ab \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{4},$$

得 $$ab = 25.$$

于是由 $a+b=10$，$ab=25$ 得 a、b 是方程

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

的两个根. 而此方程有两个相等的根，所以

$$a = b = 5,$$

即此三角形为等腰三角形.

说明 也可以直接得

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 0,$$

从而知 $a = b$.

例 7 已知函数 $y=(\cos\theta)x^2-(4\sin\theta)x+6$，对于任意实数 x 都有 $y>0$，且 θ 是三角形的一个内角，求 $\cos\theta$ 的取值范围.

解 由题意知函数的图象的开口向上，即 $\cos\theta>0$，且顶点在 x 轴的上方，所以有

$$(-4\sin\theta)^2-4\times 6\cos\theta<0,$$

得
$$2\sin^2\theta-3\cos\theta<0,$$

即
$$2(1-\cos^2\theta)-3\cos\theta<0,$$

得
$$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)>0,$$

从而有
$$\cos\theta>\frac{1}{2}\text{ 或 }\cos\theta<-2.$$

又 $0<\cos\theta\leqslant 1$，所以 $1\geqslant\cos\theta>\frac{1}{2}$.

练　习　题

A　组

1. 若锐角 α、β 满足 $\sin\alpha > \sin\beta$，则下列各式中正确的是（　　）.

(A) $\cos\alpha > \cos\beta$　　(B) $\tan\alpha > \tan\beta$

(C) $\cot\alpha > \cot\beta$　　(D) 以上说法都不对

2. 已知 $0° \leqslant \alpha < 45°$，则下列结论中正确的是（　　）.

(A) $\sin\alpha > \cos\alpha$　　(B) $\cos\alpha > \sin\alpha$

(C) $\tan\alpha > \cot\alpha$　　(D) $\cot\alpha = \tan\alpha$

3. 若 α 为锐角，求证：

$$\frac{1+2\sin\alpha\sin(90°-\alpha)}{\sin^2\alpha-\sin^2(90°-\alpha)}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}.$$

4. 已知 $\cot\alpha=\sqrt{2}$，求 $\dfrac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{2\sin\alpha-\cos\alpha}$ 的值.

5. 已知直角三角形两锐角的角平分线相交所成的钝角为 α，求 $\sin\dfrac{2}{9}\alpha$ 的值.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $|\sin A-1|+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos B\right)^2=0$，求 $\tan C$ 的值.

7. 已知 $2+\sqrt{3}$ 是方程 $x^2-8x\cos\alpha+1=0$ 的一个根，且 α 是锐角，求 $\tan\dfrac{3}{4}\alpha$ 的值.

8. 已知 $\sin\alpha\cos\alpha=a$，且 $45°<\alpha<90°$，求 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值.

B　组

9. 设 α 为某三角形的一内角，$\alpha\neq 90°$，且 $x=\dfrac{1}{\sin\alpha}-\cos\alpha$，$y=\sin\alpha-|\tan\alpha|$，问点 (x, y) 在第几象限？

10. 已知 $a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha = x$，$b\sin^2\beta + a\cos^2\beta = y$，$a^2\tan^2\alpha - b^2\tan^2\beta = 0$ $(a \neq b)$，求证：

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

11. 若 $a > b > 0$，$0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$，试证明 $\dfrac{a\sin\alpha + b}{a\sin\alpha - b}$ 不能介于 $\dfrac{a-b}{a+b}$ 及 $\dfrac{a+b}{a-b}$ 之间.

12. 已知 $y = 4\cos x \sin x + 2\cos x - 2\sin x - 1$，$0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$，问 x 为何值时，y 可以取得非负值？

测 试 题

1. 已知 $45° < \alpha < 90°$，$\cos\alpha - \sin\alpha = a$，求 $\left|\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha}\right|$ 的值.

2. 已知方程 $x^2\tan\alpha + 2x\tan\beta + \tan\gamma = 0$，$x^2\tan\beta + 2x\tan\gamma + \tan\alpha = 0$，$x^2\tan\gamma + 2x\tan\alpha + \tan\beta = 0$ 都各有等根，求锐角 α、β、γ 之间的关系.

3. 锐角 $\triangle ABC$ 的三边是 a、b、c，它的外心到三边的距离分别是 m、n、p，那么 $m : n : p =$ (　　).

(A) $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$　　(B) $a : b : c$

(C) $\cos A : \cos B : \cos C$　　(D) $\sin A : \sin B : \sin C$

4. 已知 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点，$\angle A$ 是锐角，求证：

$$\cot\angle BAD - \cot B = 2\cot\angle BAC.$$

第十二讲　解直角三角形

一、知识要点和基本方法

利用三角形中若干元素求得其余元素，叫做解三角形. 这时常常转化为直角三角形中元素而解决之.

解三角形，除运用锐角三角函数知识，往往运用正弦定理、余弦定理和勾股定理.

1. 勾股定理.

在$\triangle ABC$中，$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$. 如果$\angle C=90°$，那么就有　$a^2+b^2=c^2$.

反之，如果$a^2+b^2=c^2$，那么$\triangle ABC$为直角三角形，$\angle C=90°$.

2. 正弦定理.

在$\triangle ABC$中，角A、B、C所对的边分别为a、b、c，那么

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

在第11讲中，我们已经说明上式比值相等，这里我们采用另一种证法确证比值为$2R$. 如图12-1，作$\triangle ABC$的外接圆，圆心为O，连AO，延长AO交圆于D点，则AD为直径，于是$\angle DBA=90°$（直径所对的圆周角是直角），

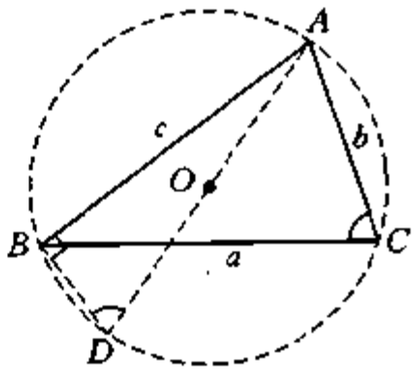


图12-1

$\angle BDA=\angle ACB$.（同弧所对的圆周角相等）

在直角三角形ABD中，

$$AB = AD \cdot \sin \angle BDA = AD \cdot \sin C = 2R\sin C,$$

即
$$c = 2R\sin C.$$

同理得 $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$.

因此，
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

正弦定理告诉我们边与角的正弦之间的关系. 那么，边与余弦间有怎样的关系呢？

3. 余弦定理.

在$\triangle ABC$中，角 A、B、C 所对的边为 a、b、c，则

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B.$$

这是因为：如图 12-2，过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D，

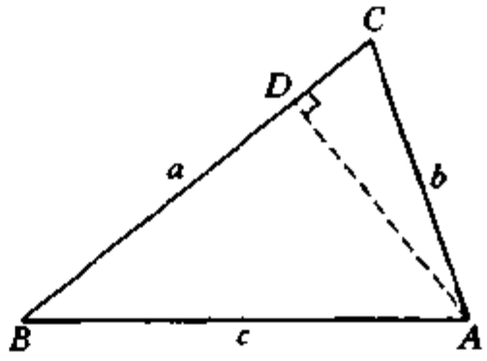


图 12-2

则 $CD = AC \cdot \cos C = b\cos C$,

$$BD = BC - CD = a - b\cos C.$$

于是
$$AB^2 - BD^2 = AD^2 = AC^2 - CD^2,$$

得
$$c^2 - (a - b\cos C)^2 = b^2 - b^2\cos^2 C,$$

即
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

同理可得
$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos A,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B.$$

说明 当角 α 为钝角时，$\cos\alpha$ 的值小于 0. 利用余弦定理可以直接判断三角形是锐角三角形（大边所对的角的余弦值大于 0），钝角三角形（此余弦值小于 0），直角三角形（此余弦值等于 0）.

二、例题精讲

例1 已知 a、b、c 分别是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边，且 a、b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+4(c+2)=(c+4)x$ 的两个根.

(1) 判断 $\triangle ABC$ 的形状.

(2) 若 $\tan\angle A=\frac{3}{4}$，求 a、b、c.

解 (1) 根据题意，尝试从边来判断.

因为

$$a+b=c+4,$$

$$ab=4(c+2),$$

所以

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=(a+b)^2-2ab\\&=(c+4)^2-2\times 4(c+2)\\&=c^2,\end{aligned}$$

从而知 $\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle C=90°$.

(2) 由 $\angle C=90°$，$\tan\angle A=\frac{3}{4}$ 得

$$\frac{a}{b}=\frac{3}{4},$$

令 $a=3k$，$b=4k$ $(k>0)$，则 $c=5k$，于是

$$7k=5k+4,$$

得 $k=2$，从而有

$$a=6,\ b=8,\ c=10.$$

例2 如图 12-3，在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，AD 是 $\angle A$ 的平分线，且 $CD=\sqrt{6}$，$DB=2\sqrt{6}$，求 $\triangle ABC$ 的三边长.

解 由角平分线想及对称性，考虑过 D 作 $DE\perp AB$，交 AB 于 E，则由 $\angle C=90°$ 得 $CD=DE=\sqrt{6}$.

在直角三角形 BDE 中，

$$\sin \angle B = \frac{DE}{DB} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{2},$$

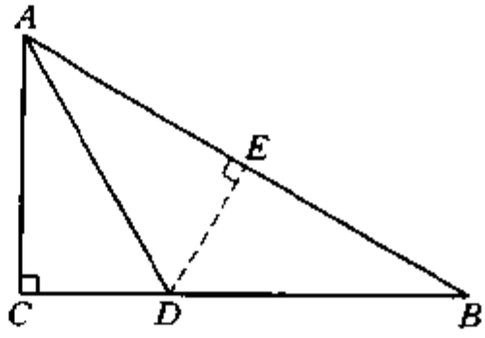


图 12-3

则 $\angle B = 30°$，所以

$$AC = BC \cdot \tan B$$

$$= (\sqrt{6} + 2\sqrt{6}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= 3\sqrt{2},$$

$$AB = \frac{AC}{\sin \angle B} = 2 \cdot AC = 6\sqrt{2},$$

$$BC = CD + DB = 3\sqrt{6}.$$

例 3 已知如图 12-4，在四边形 $ABCD$ 中，$AD = CD$，$AB = 7$，$\tan A = 2$，$\angle B = \angle D = 90°$，求 BC 的长.

解 找直角三角形，直接找不到，根据图形特点构造直角三角形.

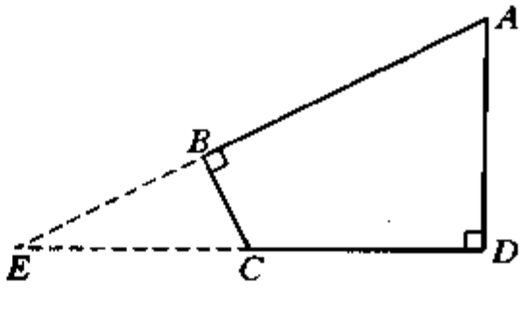


图 12-4

如图 12-4，延长 AB 与 DC 交于 E，则由 $\angle ABC = \angle ADC = 90°$ 知三角形 BCE、三角形 ADC 是直角三角形，且 $\angle EBC = \angle ADE = 90°$.

于是，由 $\tan A = \frac{DE}{AD} = 2$ 得 $DE = 2AD$，又 $CD = AD$，则 $EC = CD = AD$.

又因 $\angle ECB = 180° - \angle C = \angle A$，所以

$$\tan \angle BCE = \frac{BE}{BC} = 2.$$

令 $BC = x$，则 $BE = 2x$. 因而

$$EC = \sqrt{BC^2 + BE^2} = \sqrt{5}\,x,$$

得 $$CD = DA = EC = \sqrt{5}\,x.$$

在直角三角形 ADE 中，由 $AE^2 = AD^2 + DE^2$ 得

$$(7 + 2x)^2 = (\sqrt{5}\,x + \sqrt{5}\,x)^2 + (\sqrt{5}\,x)^2,$$

即 $$3x^2 - 4x - 7 = 0,$$

得 $$x = \frac{7}{3} \text{ 或 } x = -1 \text{（舍去）}.$$

故 $BC = \frac{7}{3}$.

说明 一般图形化为直角三角形，结合方程或二次函数，往往能够简捷地解决问题.

例 4 如图 12-5，某岛 S 周围 42 海里内存在着大量的暗礁. 现在一轮船自西向东以每小时 15 海里的速度航行，在 A 处测得 S 在北偏东 60°，2 小时后在 B 处测得 S 在正东北方向. 试问轮船是否需要改变航行方向行驶，才能避免触礁危险，说明理由.

解 过 S 作 $SM \perp AB$，交 AB 的延长线于 M（如图 12-5）.

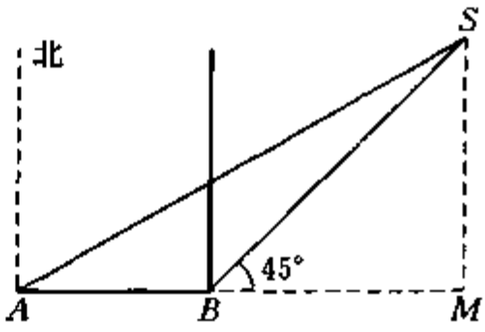


图 12-5

在直角三角形 SMB 中，$\angle SBM = 45°$，则 $SM = BM$.

设 $SM = x$，在直角三角形 AMS 中，$\angle SAM = 30°$，$AB = 15 \times 2 = 30$，则

$$\tan 30° = \frac{SM}{AM} = \frac{x}{30 + x},$$

于是有

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{30 + x},$$

得 $$x = 15\sqrt{3} + 15.$$

所以 $SM = 15\sqrt{3} + 15$.

又 $SM < 42$,

故轮船需改变航向.

例 5 在$\triangle ABC$中，$(\sin B + \sin C) : (\sin C + \sin A) : (\sin A + \sin B) = 4 : 5 : 6$，求最大角的度数.

解 由题意知

$$\sin B + \sin C = 4k,$$

$$\sin C + \sin A = 5k,$$

$$\sin A + \sin B = 6k,$$

这里 $k > 0$，于是就有

$$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3.$$

由正弦定理得

$$a : b : c = 7 : 5 : 3.$$

令 $a = 7t$，$b = 5t$，$c = 3t$ $(t > 0)$，则 a 为最大边，因此角 A 为最大角，那么由余弦定理得

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

即 $$(7t)^2 = (5t)^2 + (3t)^2 - 2 \cdot (5t) \cdot (3t)\cos A,$$

得 $$\cos A = -\frac{1}{2},$$

从而知 $A = 120°$.

例 6 在$\triangle ABC$中，若 $\dfrac{\tan A - \tan B}{\tan A + \tan B} = \dfrac{c - b}{c}$，求证：$\angle A = 60°$.

解 由 $\dfrac{\tan A - \tan B}{\tan A + \tan B} = \dfrac{c - b}{c}$

利用合分比得

$$\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{2c - b}{b},$$

即

$$\frac{\sin A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \sin B} = \frac{2c - b}{b}.$$

于是由正弦定理、余弦定理得

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{2c - b}{b},$$

即
$$\frac{2c^2}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{2c}{b},$$

得
$$b^2 + c^2 - a^2 = bc,$$

从而有
$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2},$$

即
$$\cos A = \frac{1}{2}.$$

故 $A = 60°$.

例 7 在等腰直角三角形 ABC 中，$AB = 1$，$\angle A = 90°$，点 E 为腰 AC 上任意一点，$AE = a$，点 F 在底边 BC 上，且 $FE \perp BE$，那么

$$S_{\triangle CEF} = \frac{a(1 - a)^2}{2(1 + a)}.$$

证明 如图 12-6，过点 F 作 $FD \perp AC$，垂足为 D.

因为 $\angle ABE + \angle BEA = \angle BEA + \angle DEF$，所以 $\angle ABE = \angle DEF$，从而知

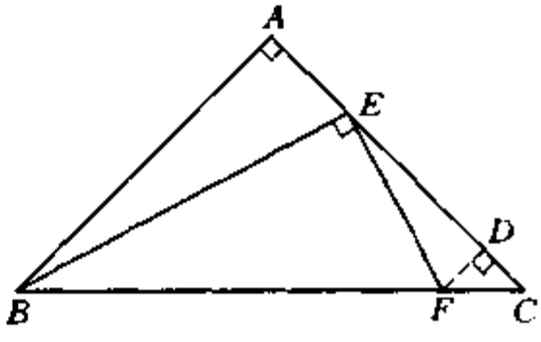


图 12-6

$$\triangle ABE \backsim \triangle DEF,$$

得
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AE}{DF}.$$

又因为 $FD = CD$，则令 $FD = x$，那么 $DE = 1 - a - x$. 于是有

$$\frac{1}{1-a-x}=\frac{a}{x},$$

得
$$x=\frac{a(1-a)}{1+a}.$$

故
$$S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}EC\cdot FD$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(1-a)\cdot\frac{a(1-a)}{1+a}$$
$$=\frac{a(1-a)^2}{2(1+a)}.$$

说明 (1) 当 E 点为 AC 的中点时,此问题就是 1998 年全国初中数学竞赛试题第 11 题.

(2) 此题还可以进行推广得例 8.

例 8 如图 12-7,在直角三角形 ABC 中,$\angle A=90°$,$AB=a$,$AC=b$,E 是 AC 上一动点,F 在 BC 上,E 从 A 点开始向 C 运动且保持 $EF\perp BE$,试写出 $S_{\triangle EFC}$ 与点 E 运动时与 A 点距离 x 的关系式.

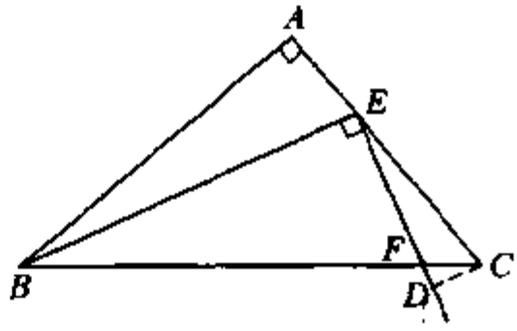


图 12-7

解 如图 12-7,过 C 点作 $CD\perp EF$,交直线 EF 于 D,则有 $\triangle ABE\backsim\triangle DEC$,

得
$$\frac{AB}{ED}=\frac{BE}{EC}=\frac{AE}{CD}$$

由 $AE=x$,令 $EC=kx$,则
$$\frac{a}{DE}=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{kx}=\frac{x}{CD}$$

得
$$DE=\frac{akx}{\sqrt{a^2+x^2}},$$
$$CD=\frac{kx^2}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

又 $\triangle BEF \backsim \triangle CDF$，则

$$\frac{BE}{CD}=\frac{EF}{DF},$$

即
$$\frac{BE}{BE+CD}=\frac{EF}{EF+FD}=\frac{EF}{ED},$$

得
$$EF=\frac{\sqrt{a^2+x^2}\cdot\dfrac{akx}{\sqrt{a^2+x^2}}}{\sqrt{a^2+x^2}+\dfrac{kx^2}{\sqrt{a^2+x^2}}}$$

$$=\frac{akx\sqrt{a^2+x^2}}{a^2+(k+1)x^2}.$$

因 $(k+1)x=b$，得 $k=\dfrac{b}{x}-1$，于是

$$S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}EF\cdot CD$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{ak^2x^3}{a^2+(k+1)x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{ax(b-x)^2}{a^2+bx}.$$

在上式中令 $a=b=1$，即为例 7 的结果.

例 9 如果$\triangle ABC$ 的周长为 $2p$，M 为 AB 的中点，且 $MA=MC=m$，求$\triangle ABC$ 构成直角三角形的充分必要条件.

解 设 $AC=b$，$BC=a$，则 $AB=2m$. 于是$\triangle ABC$ 构成直角三角形的充分必要条件是关于 a、b 的二元方程组

$$\begin{cases}a^2+b^2=4m^2,\\ a+b=2p-2m\end{cases}\qquad①$$

有两个正实数根，且

$$a+b>2m,\ 2m>a,\ 2m>b.\qquad②$$

①式即为
$$\begin{cases} a+b=2p-2m, \\ ab=2p^2-4pm. \end{cases} \quad ③$$

令 $y=f(x)=x^2-(2p-2m)x+2p^2-4pm$，则问题等价于在 $p>2m$ 下函数的图象与 x 轴有两个交点，其交点的横坐标均小于 $2m$ 而大于 0. 于是有

$$\begin{cases} p>2m, \\ \dfrac{4(2p^2-4pm)-(2p-2m)^2}{4}<0, \\ 0<\dfrac{2p-2m}{2}<2m, \\ 2p^2-4pm>0, \\ (2m)^2-(2p-2m)\cdot 2m+2p^2-4pm>0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2m<p<3m, \\ p^2-m^2-2pm<0, \\ (p-2m)^2>0, \end{cases}$$

得

$$2<\frac{p}{m}<1+\sqrt{2}.$$

因此，$\triangle ABC$ 周长为 $2p$，满足 $MA=MC=m$ 且 M 为 AB 中点的直角三角形充分必要条件为

$$2m<p<(1+\sqrt{2})m,$$

或
$$(\sqrt{2}-1)p<m<\frac{1}{2}p.$$

练　习　题

A　组

1. a、b、c 是一个三角形的三边长，若方程组

$$\begin{cases} x^2 - ax - y + b^2 + ac = 0, \\ ax - y + bc = 0 \end{cases}$$

只有一个解，判断这个三角形是何种三角形？

2. 在$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle BAC = 120°$，D 是 BC 边中点，$DE \perp AB$ 于 E，求 $AE : BD$.

3. 在四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB : BC : CD : DA = 2 : 2 : 3 : 1$，且 $\angle B = 90°$，求$\angle DAB$ 的度数.

4. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\angle A = 15°$，$AB = 10$，求$\triangle ABC$ 的面积.

5. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 30°$，$\angle C - \angle B = 60°$，已知 $BC = a$，求 AB 的长.

6. 在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC = 135°$，$\angle BCD = 120°$，$AB = \sqrt{6}$，$BC = 5 - \sqrt{3}$，$CD = 6$，求 AD.

7. 在直角三角形 ABC 中，$\angle A = 90°$，$\angle B = 30°$，$AC = 2a$，E 是 AC 边上中点，F 是 BC 上一点，$BE \perp EF$，求 $S_{\triangle ECF}$.

8. 在直角三角形 ABC 中，a、b、c 表示各边的长，其中 c 为斜边，若 $\dfrac{b}{c+a} + \dfrac{a}{c+b} = \dfrac{17}{20}$，求 $a : b : c$.

B　组

9. 在$\triangle ABC$ 中，$BC = a$，$AC = b$，$AB = c$，$\angle C = 90°$，CD 和 BE 是$\triangle ABC$ 的两条中线，且 $CD \perp BE$，那么 $a : b : c =$（　　）.

(A) $1 : 2 : 3$　　(B) $3 : 2 : 1$

(C) $\sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$　　(D) $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$

10. 在$\triangle ABD$中，$\angle ABD$为钝角，过B作$BC \perp AB$交边AD于C，且$\angle CBD = 30°$，$AB = CD = 1$，求AC的长.

11. 已知钝角三角形的三边长分别是3、4、x，求x的取值范围.

12. 已知a、b、c都是正数，且关于x的方程

$$(c + a)x^2 + 2bx + (c - a) = 0$$

有两个相等的实数根. 问a、b、c是否可作为一个三角形的三边的长？如果可以，那么这个三角形是什么形状的三角形？

13. 在$\triangle ABC$中，$\sin A : \sin B = \sqrt{2} : 1$，且$c^2 = b^2 + \sqrt{2}bc$，问角$A$、$B$、$C$各多少度？

14. 边长为a的菱形$ABCD$中，$\angle DAB = 60°$，E是AD上异于A、D两点的一个动点，F是CD上的动点，满足条件$AE + CF = a$.

(1) 证明：不论E、F怎样移动，三角形BEF总是正三角形.

(2) 求出$\triangle BEF$的面积的最小值.

15. $\triangle ABC$中，$BC = a$，$CA = b$，$AB = c$，且c是最大边. 证明：$\triangle ABC$是锐角三角形的充分必要条件是$ac\cos A + bc\cos B < 4S$，这里S是三角形的面积.

测　试　题

1. 在直角三角形 ABC 中，$AB=c$，$BC=a$，$AC=b$，$\angle C=90°$，$a+c=6$，$\tan A=\sqrt{3}$，解这个直角三角形.

2. 已知在$\triangle ABC$ 中，$BC=6$，$AC=6\sqrt{3}$，$\angle A=30°$，求 AB 的长.

3. 在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle D=90°$，$\angle A=60°$，$AB=4$，$AD=5$，求$\dfrac{BC}{CD}$.

4. 已知$\triangle ABC$ 的周长是 24，M 是 AB 的中点，且 $MC=MA=5$，求$\triangle ABC$ 的面积.

5. 设$\triangle ABC$ 三边为 a、b、c，且 $\dfrac{b}{c-a}-\dfrac{a}{c+b}=1$，试求$\triangle ABC$ 最大角的度数.

6. 等腰三角形腰上的中线为定长 l，问顶角 α 为何值时，此三角形的面积最大.

第十三讲　圆的基本性质

一、知识要点和基本方法

圆是初中数学中重要的内容.圆的基本性质具有较强的适用性.因此,它也是数学竞赛中的重要内容.

圆的基本性质有:

性质 1　直径所对的圆周角是直角.

性质 2　同弧所对的圆周角相等.

性质 3　经过圆心及一弦中点的直线垂直平分该弦.

由此我们得到:经过圆心,且垂直于弦的直线一定平分该弦(不是直径),垂直平分弦的直线必过圆心.

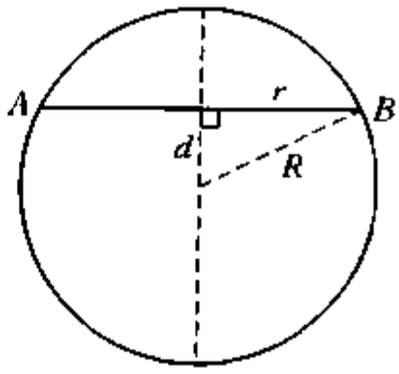


图 13-1

性质 4　如果弦长为 $2r$,圆的半径为 R,那么弦心距 d 为 $d=\sqrt{R^2-r^2}$.

处理有关圆的问题,常利用圆的基本性质化为直角三角形中的问题而解决.

二、例题精讲

例 1　以 AB 为直径作一个半圆,圆心为 O,C 是半圆上一点,且 $OC^2=AC\cdot BC$,求 $\angle CAB$.

解　由题意知 C 点有如图 13-2(1)、图 13-2(2)的两种可能的位置,且 $\angle ACB=90°$.

如图 13-2(1),过 C 作 $CD\perp AB$ 于 D,则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}AC\cdot BC.$$

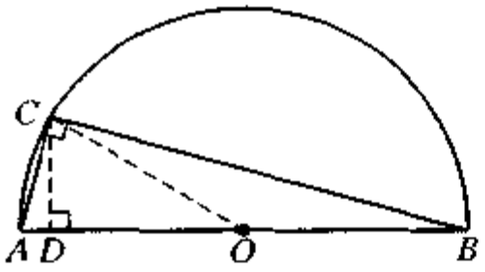


图 13-2(1)

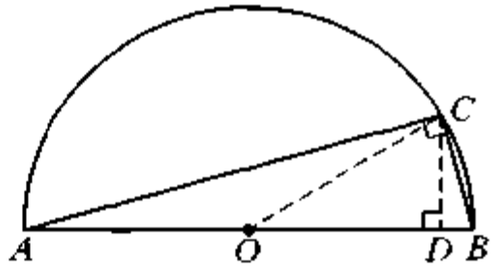


图 13-2(2)

又 $OC^2=AC\cdot BC$，所以有 $CD=\frac{1}{2}OC$，从而推知 $\angle AOC=30°$，得 $\angle CAB=\frac{1}{2}(180°-30°)=75°$.

如图 13-2(2)，过 C 作 $CD\perp AB$ 于 D，则根据对称性得 $\angle CAB=90°-75°=15°$.

故符合题意的 $\angle CAB=15°$ 或 $75°$.

例 2 锐角 $\triangle ABC$ 内接于圆 O，$\angle ABC=60°$，$\angle BAC=36°$，作 $OE\perp AB$ 交劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 于点 E，连接 EC. 求 $\angle OEC$.

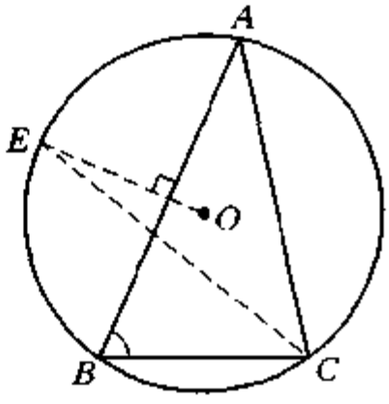


图 13-3

解 因为 $OE\perp AB$，所以 E 为劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 中点，因而 $\angle BCE=\angle ECA=\frac{1}{2}\angle BCA$.

又 $\angle ABC=60°$，$\angle BAC=36°$，则

$$\angle BCA=180°-60°-36°=84°.$$

于是 $\angle BCE=42°$，从而

$$\angle OEC+90°=\angle ABC+\angle BCE.$$

得

$$\angle OEC=12°.$$

例 3 如图 13-4，已知四边形 $ABCD$ 内接于直径为 3 的圆 O，对

角线 AC 是直径，对角线 AC 和 BD 的交点是 P，$AB = BD$，且 $PC = 0.6$，求四边形 $ABCD$ 的周长.

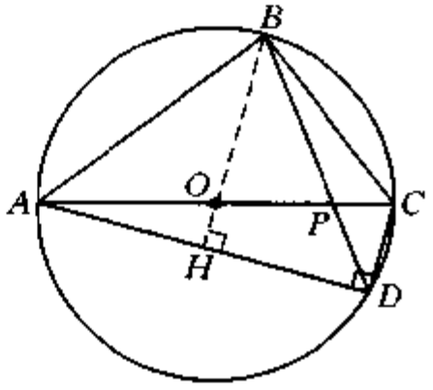


图 13-4

解 连结 BO 并延长交 AD 于 H.

因为 $AB = BD$，O 是圆心，所以 $BH \perp AD$. 又 $\angle ADC = 90°$，于是 $BH \parallel CD$，从而 $\triangle OPB \backsim \triangle CPD$，

得 $$\frac{CD}{BO} = \frac{CP}{PO},$$

即 $$\frac{CD}{1.5} = \frac{0.6}{1.5 - 0.6},$$

得 $$CD = 1.$$

因此 $$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = 2\sqrt{2},$$

$$OH = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2},$$

从而 $$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{6},$$

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{3}.$$

故四边形 $ABCD$ 的周长为

$$AB + BC + CD + AD = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{6} + 2\sqrt{2}.$$

例 4 如图 13-5，$\odot O$ 的半径为 2，$\odot O$ 内的点 P 到圆心 O 的距离为 1，过点 P 的弦 AB 与劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 组成一个弓形，求此弓形面积的最小值.

解 由题意知，要使弓形面积最小，则 $\triangle AOB$ 的面积应最大.

过 O 作 $OQ \perp AB$ 交 AB 于 Q，则令 $OQ = x$，有 $AB = 2\sqrt{4 - x^2}$，所以

$$S = S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}OQ \cdot AB$$

$$= x \cdot \sqrt{4 - x^2},$$

因 $OP \geqslant OQ$，即 $0 \leqslant x \leqslant 1$，于是

$$S = \sqrt{4x^2 - x^4} = \sqrt{4 - (x^2 - 2)^2},$$

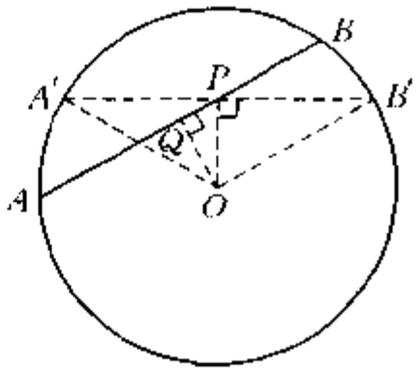


图 13-5

这里 $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$，从而利用二次函数 $y = 4 - (t-2)^2 (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 的图象知当 $t = 1$ 时函数 y 取得最大值，因而当 $x = 1$ 时 S 取得最大值，即为 $\sqrt{3}$. 此时弦 AB 在 $A'B'$ 的位置，且 $OP \perp A'B'$.

因为 $OP = 1$，$OB' = 2$，则 $\angle OB'P = 30°$，所以 $\angle POB' = 60°$，$\angle A'OB' = 120° = \frac{2\pi}{3}$. 于是劣弧为 $\overset{\frown}{A'B'}$ 的弓形面积为

$$\frac{1}{2} \times OA'^2 \cdot \angle A'OB' - \frac{1}{2}OP \cdot A'B'$$

$$= \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \times 1 \times 2\sqrt{3}$$

$$= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}.$$

故满足题意的弓形面积的最小值为 $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$.

例 5 图 13-6，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，$AB = 998$，$DC = 1001$，$AD = 1999$，点 P 在线段 AD 上，求满足条件 $\angle BPC = 90°$ 的点 P 的个数.

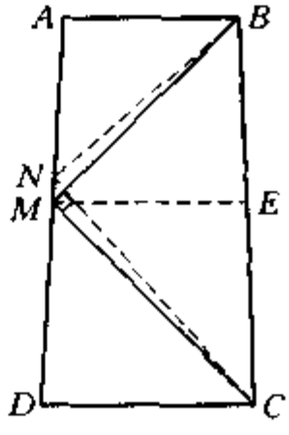


图 13-6

解 在直线 AD 上，满足条件 $\angle BPC = 90°$ 的点 P 就是以 BC 为直径的圆与直线 AD 的交点，且至多有两个交点.

考虑在线段 AD 上的交点数.

如图 13-6，取 AD 的中点 M、BC 的中点 E，则 ME 为等腰梯形的中位线，于是

$$ME = \frac{1}{2}(AB + DC) = \frac{1\,999}{2}.$$

又 $BE = EC = \frac{1}{2} \times 1\,999$，所以由 $ME = BE = EC$ 得 $\angle BMC = 90°$，故 M 点是满足条件的点.

在线段 AD 上，取 N 点使得 $AN = AB$，则 $DN = AD - AN = AD - AB = 1\,001 = DC$，于是 $\triangle ABN$ 与 $\triangle DMC$ 都是等腰三角形，从而有

$$\angle ANB = \frac{1}{2}(180° - \angle NAB),$$

$$\angle DNC = \frac{1}{2}(180° - \angle MDC),$$

即

$$\angle ANB + \angle DNC = 180° - \frac{1}{2}(\angle NAB + \angle MDC)$$

$$= 90°.$$

因此，$\angle BNC = 180° - (\angle ANB + \angle DNC) = 90°$，即 N 点也满足题中条件的点.

所以，满足条件的点有 2 个.

例 6 已知⊙O 中，半径 $r = 5$ cm，AB、CD 是两条平行弦，且 $AB = 8$ cm，$CD = 6$ cm，求 AC 的长.

解 理解题意，确定弦 AB、CD 的位置.

画出可能的位置情形：

如图 13-7(1)中，由垂径定理及勾股定理得 O 点到 CD 的距离为 $\sqrt{5^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} = 4$，$O$ 点到 AB 的距离为 $\sqrt{5^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2} = 3$，于是弦 AB 与 CD 间的距离为 $4 + 3 = 7$ 或 $4 - 3 = 1$，从而可知

$$AC = \sqrt{7^2 + \left(\frac{8-6}{2}\right)^2} = 5\sqrt{2},$$

或

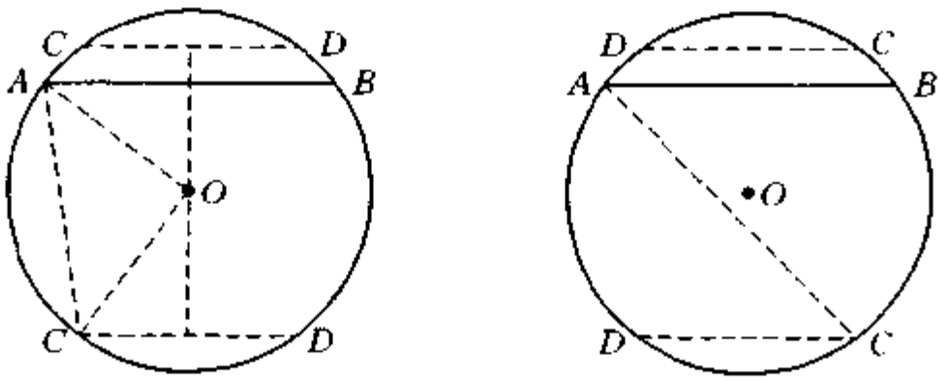


图 13-7

$$AC=\sqrt{1+\left(\frac{8-6}{2}\right)^2}=\sqrt{2}.$$

如图 13-7(2)，同样地计算知弦 AB、DC 间距离为 7 或 1，于是有

$$AC=\sqrt{7^2+\left(8-\frac{8-6}{2}\right)^2}=7\sqrt{2},$$

或

$$AC=\sqrt{1^2+\left(8-\frac{8-6}{2}\right)^2}=5\sqrt{2}.$$

满足题中条件的 AC 可能是 $\sqrt{2}$，或 $5\sqrt{2}$，或 $7\sqrt{2}$.

例 7 已知点 A、B、C、D 顺次在圆 O 上，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BD}$，$BM$ 垂直于 AC，垂足为 M. 证明：$AM=DC+CM$.

解 延长 DC，使得 $CN=MC$（如图 13-8），则 $\angle BCN=\angle CBD+\angle BDC=\angle BAD$（同弧所对的角相等）.

又 $\angle ACB=\angle ADB$，而 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BD}$，则 $\angle ACB=\angle BAD$，$AB=AD$，于是 $\angle BCN=\angle BCM$. 从而推知 $\triangle BCN\cong\triangle BCM$，得 $BM=BN$.

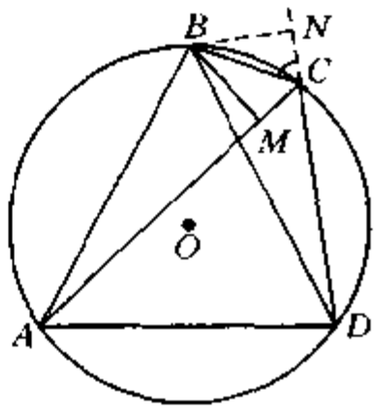


图 13-8

因$\angle BAM=\angle BDN$，所以 $\triangle BAM\cong\triangle BDN$，得 $AM=DN=CD+CM$.

说明 此题是著名的阿基米德折弦定理. 常被人们用来作为初中数学竞赛题.

练　习　题

A　组

1. $\odot O$ 的直径 $AB=20$，弦 CD 交 AB 于 G，$AG>BG$，$CD=16$，$AE\perp CD$ 于 E，$BF\perp CD$ 于 F，求 $AE-BF$ 的值.

2. 如图 13-9，在 $\odot O$ 中，$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{DA}$，$AB=10$，$CD=6$，两个弓形面积的和为 x，求 $[x]$（这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）.

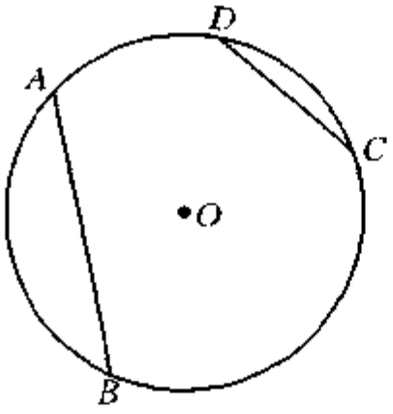


图 13-9

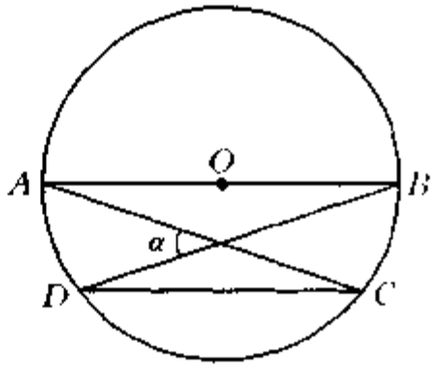


图 13-10

3. 如图 13-10，AB 是圆的直径，CD 是平行于 AB 的弦，且 AC 和 BD 相交于 E，$\angle AED=\alpha$，求 $\triangle CDE$ 与 $\triangle ABE$ 的面积之比值.

4. 如图 13-11，已知 $\triangle ABC$ 内接于直径为 d 的圆，设 $BC=a$，$AC=b$，求 $\triangle ABC$ 的高 CD.

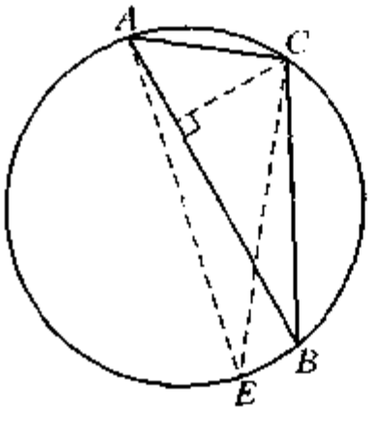


图 13-11

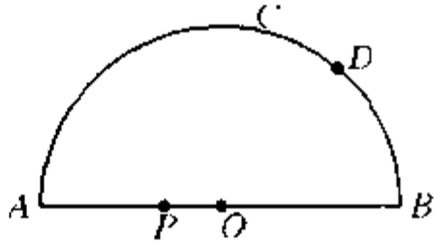


图 13-12

5. 如图 13-12，设半径为 1 的半圆圆心为 O，直径为 AB，C、D 是半圆上两点，若 $\overset{\frown}{AC}$ 的度数为 96°，$\overset{\frown}{BD}$ 的度数为 36°，动点 P 在直径 AB 上，求 $CP + PD$ 的最小值.

6. 已知如图 13-13，AD 是⊙O 的直径，$AD' \perp BC$，AB、AC 分别与圆相交于 E、F，那么下列等式中一定成立的是(　　).

(A) $AE \cdot BE = AF \cdot CF$　　(B) $AE \cdot AB = AO \cdot AD'$

(C) $AE \cdot AB = AF \cdot AC$　　(D) $AE \cdot AF = AO \cdot AD$

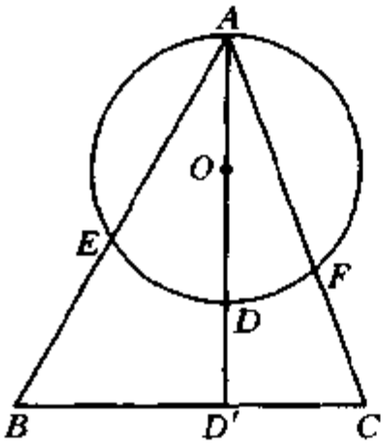


图 13-13

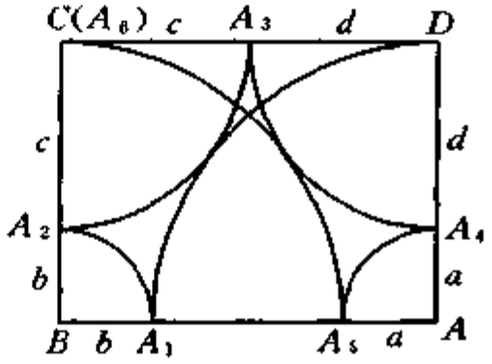


图 13-14

7. 已知如图 13-14，周长为 28 cm 的长方形 $ABCD$，以 A 为圆心，AD 为半径画弧交 AB 于 A_1，以 B 为圆心，BA_1 为半径画弧交 BC 于 A_2，依次类推，即依次以 C、D、A、B 为圆心，用同样方法画弧，分别得交点 A_3、A_4、A_5、A_6，点 A_6 与 C 重合，求长方形的长与宽的长度.

B　组

8. 如图 13-15，已知 CD 为⊙O 的任意两条确定的直径，由⊙O 上一点 P 向 AB、CD 作垂线，垂足分别为 M、N. 求证：不论 P 点在什么位置，MN 的长都等于定值.

9. 圆内接四边形 $ABCD$ 各边 AB、BC、CD、DA 之长分别为 1、9、8、3，求圆的半径 R.(如图 13-16)

10. 设圆内接四边形 $ABCD$ 的四边分别为 $AB = a$，$BC = b$，$CD = c$，$DA = d$，$AC = e$，$BD = f$，求证：

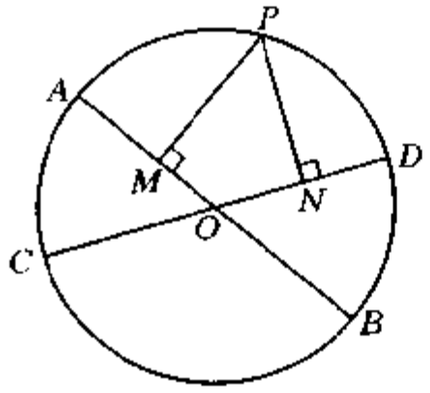


图 13-15

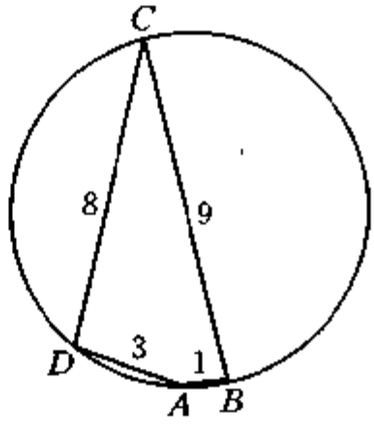


图 13-16

$$e^2=\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd},\ f^2=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}.$$

11. 如图 13-17，AE 是半圆的直径，且 $AE=2$，B、C、D 在圆上，且 $AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DE=d$，求证：$a^2+b^2+c^2+d^2+abc+bcd<4$.

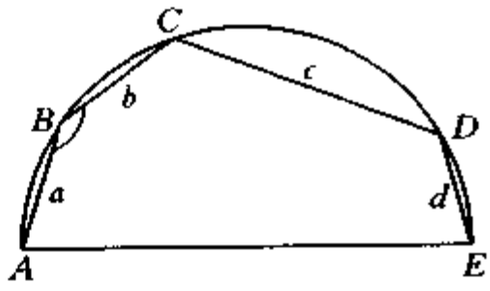


图 13-17

测 试 题

1. 如图 13-18，矩形 $ABCD$ 的边 AB 经过圆 O 的圆心，E、F 分别为边 AB、DC 与圆 O 的交点. 若 $AE=3$，$AD=4$，$DF=5$，求圆 O 的直径.

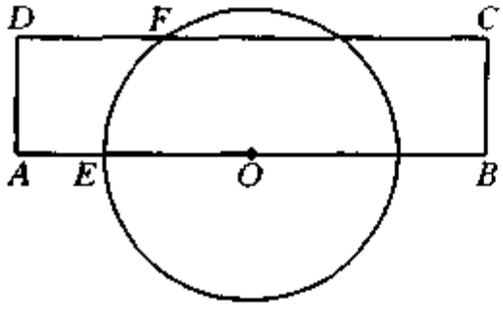


图 13-18

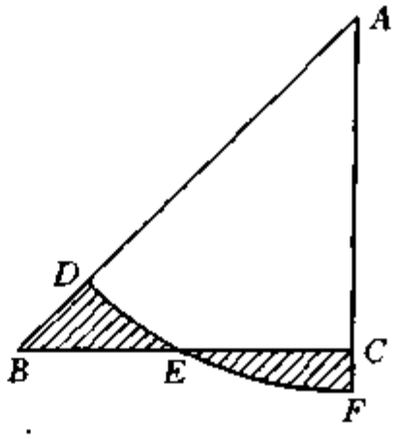


图 13-19

2. 如图 13-19，在直角$\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，$\overset{\frown}{DEF}$的圆心为 A，如果图中两个阴影部分的面积相等，求 $AD:DB$.

3. 顺次将线段 AD 三等分于 B、C、P 为以 BC 为直径的圆周上任意一点，求 $\tan\angle APB\cdot\tan\angle CPD$.

4. 一个半径为 2 000 的圆中放入 n 个点，这 n 个点两两之间的距离都大于 2 000，求 n 的最大值.

第十四讲　直线与圆

一、知识要点和基本方法

直线与圆有三种位置关系：直线与圆相交，直线与圆相切，直线与圆相离.

设直线 l，圆的半径为 R，圆心为 O，O 点到直线 l 的距离为 d，那么有

直线 l 与圆 O 相交 $\Longleftrightarrow d<R$.

直线 l 与圆 O 相切 $\Longleftrightarrow d=R$.

直线 l 与圆 O 相离 $\Longleftrightarrow d>R$.

与圆 O 相交的直线叫做圆的割线，与圆 O 相切的直线叫做圆的切线.

若直线 l 与圆 O 相切，切点为 T，则 $l\perp OT$.

过圆 O 外一点 P，有且仅有两条切线，并且切线长相等，OP 平分这两条切线所夹的角.

弦切角等于同弧所对的圆周角.

处理关于圆的切线（割线）的几何问题，基本思路是由位置关系确定线段或角的数量关系，反之由数量关系确定直线与圆的位置关系. 在解决这样的问题过程中，常常化图形为直角三角形及相似三角形，利用勾股定理、正弦定理、余弦定理以及三角形相似的若干基本性质，得到问题的结果.

二、例题精讲

例 1　如图 14-1，由钝角 $\triangle ABC$ 的钝角顶点 A 引高 AD，以垂足 D 为圆心，AD 为半径作圆，分别交 AB、AC 于 M、N. 如果 $AB=c$，

$AM = m$，$AN = n$，求 AC 的边长.

解 努力证明 $\triangle ABC \backsim \triangle ANM$.

连 MN，延长 AD 交圆于 E，连 ME.

因 AE 是直径，$AD \perp BC$，所以 $\angle AME = 90°$，从而有 $\angle MEA = 90° - \angle MAE = 90° - \angle BAD = \angle ABD$.

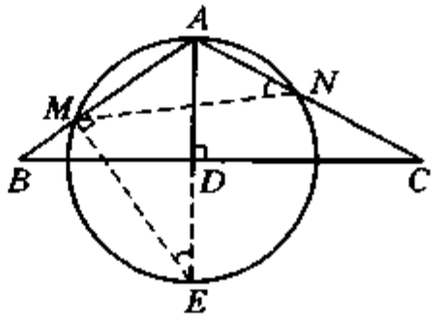


图 14-1

又 $\angle MEA = \angle MNA$，于是 $\angle ABC = \angle ANM$. 从而推知 $\triangle ABC \backsim \triangle ANM$，得

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB},$$

即

$$AC = \frac{AM \cdot AB}{AN} = \frac{mc}{n}.$$

例 2 如图 14-2，PA、PB 分别切⊙O 于 A、B 两点，PC 满足 $AB \cdot PB - AC \cdot PC = AB \cdot PC - AC \cdot PB$，且 $AP \perp PC$，$\angle PAB = 2\angle BPC$，求 $\angle ACB$.

解 由 $AB \cdot PB - AC \cdot PC = AB \cdot PC - AC \cdot PB$ 得

$$(AB + AC)(PB - PC) = 0,$$

即 $$PB = PC.$$

又 PA、PB 是圆 O 的切线，则 $PA = PB$. 于是

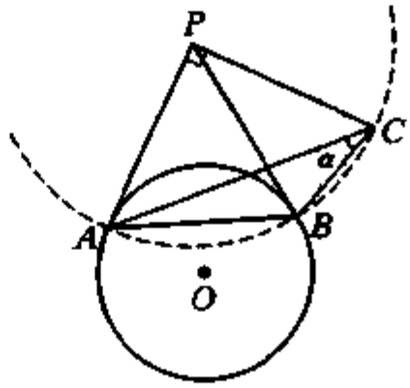


图 14-2

$$PA = PB = PC,$$

从而推知 A、B、C 三点在以 P 为圆心，PA 为半径的圆上.

在圆 P 中，设 $\angle ACB = \alpha$，则 $\angle APB = 2\alpha$，$\angle BPC = 90° - 2\alpha$.

因为 $\angle PAB = 2\angle BPC = 180° - 42°$，

$$\angle PAB = \angle PBA = \frac{1}{2}(180° - \angle APB) = 90° - \alpha,$$

所以
$$180° - 4\alpha = 90° - \alpha,$$

得
$$\alpha = 30°.$$

故 $\angle ACB = 30°$.

例 3 如图 14-3，AB、AC 分别是⊙O 的切线和割线.

(1) 求证：$AB^2 = AD \cdot AC$.

(2) 若 $\angle C = 45°$，$\angle BDA = 60°$，$CD = \sqrt{6}$，求切线 AB 的长.

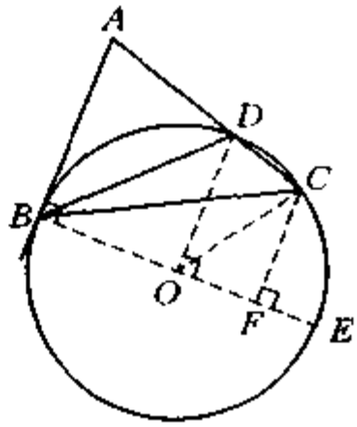


图 14-3

(1) **证明** 因为 AB 是圆 O 的切线，所以

$$\angle ABD = \angle ACB.$$

于是有 $\triangle ABC \backsim \triangle ADB$.

得
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC},$$

即
$$AB^2 = AD \cdot AC.$$

(2) **解** 设法求 AD.

延长 BO 交⊙O 于 E，连 DO、OC，过 C 作 $CF \perp BE$.

因为 $\angle BCD = 45°$ 所以 $\angle BOD = 90°$，即 $OD \perp BE$.

因为 $\angle DBC = \angle ADB - \angle ACB = 60° - 45° = 15°$，所以 $\angle DOC = 30°$，

所以 $\angle COF = 90° - \angle DOC = 60°$.

所以 $OF = OC \cdot \cos 60° = \frac{1}{2}R$ (R 为⊙O 的半径).

因为 $\angle ABE = \angle BOD = \angle CFE = 90°$，则 $AB \parallel DO \parallel CF$.

所以有

$$\frac{CD}{FO} = \frac{AD}{BO},$$

即

$$AD = \frac{CD \cdot BO}{FO} = \sqrt{6} \times \frac{R}{\frac{1}{2}R} = 2\sqrt{6}.$$

从而有

$$AB^2 = 2\sqrt{6} \cdot (2\sqrt{6} + \sqrt{6}) = 6^2,$$

即

$$AB = 6.$$

例 4 如图 14-4，在$\triangle ABC$ 中，$\angle B = 36°$，$\angle ACB = 128°$，$\angle CAB$ 的平分线交 BC 于 M，$\triangle ABC$ 的外接圆的切线 AN 交 BC 的延长线于 N，求$\triangle ANM$ 的最小角的度数.

解 因为 AM 是$\angle CAB$ 的平分线，则 $\angle CAM = \angle MAB$. 所以

$$\angle CAM = \frac{1}{2}(180° - 36° - 128°) = 8°,$$

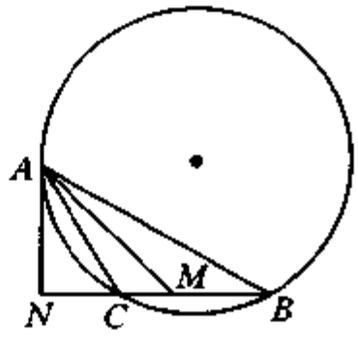


图 14-4

从而有

$$\angle CMA = 180° - \angle ACM - \angle CAM$$

$$= 44°.$$

又 AN 是圆的切线，所以 $\angle NAC = \angle ABC = 36°$，从而 $\angle NAM = 36° + 8° = 44°$，

$$\angle ANM = 180° - 44° - 44° = 92°.$$

故 $\triangle ANM$ 的最小角为 44°.

例 5 如图 14-5，AB 是半圆的直径，$AC \perp AB$，$AC = AB$，在半圆上任取一点 D，作 $DE \perp CD$，交直线 AB 于点 E，$BF \perp AB$，交线段 AD 的延长线于点 F.

(1) 设 $\overset{\frown}{AD}$ 是 $x°$ 的弧，若要使点 E 在线段 BA 的延长线上，求 x 的取值范围.

(2) 不论点 D 取在半圆的什么位置，图中除 $AB = AC$ 外，还有

两条线段一定相等，指出这两条相等的线段，并予以证明.

解 (1) 当 E 点由右趋向于 A 点时，$\triangle ADB$ 将成为等腰直角三角形，即 D 点为 OS 与圆 O 的交点，这里 $OS \perp AB$. 所以，E 点从右运动到 A 点时，$\overset{\frown}{AD}$ 是 45°的弧，即 $x = 45$.

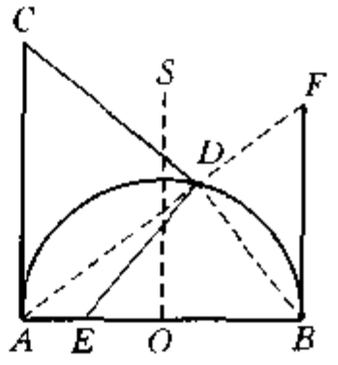


图 14-5

当 E 点离开 A 点在 BA 的延长线时，离 A 点愈远，D 点则愈接近于点 A. 因此，x 接近于 0. D 为 A 点时，$x = 0$. 故满足要求的 x 的范围是 $0 \leqslant x < 45$.

(2) 由题意知 $\angle CDE = 90°$，$\angle CAB = \angle EBF = 90°$，$\angle ADB = 90°$.

由 AC 为圆的切线得 $\angle CAD = \angle ABD$.

因为 $\angle DEB = 180° - \angle AED = 180° - (360° - 180° - \angle C) = \angle C$，所以 $\triangle ACD \backsim \triangle EBD$，得

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BE}. \tag{1}$$

又 $\angle ABD = \angle BFD$，所以 $\triangle ABD \backsim \triangle BFD$，得

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AB}{BF}, \tag{2}$$

因 $AB = AC$，所以由①，②得

$$BE = BF.$$

例 6 如图 14-6，$\triangle ABC$ 的内心 I，内切圆分别切 BC、CA 于点 D、E. 如果 BI 交 DE 于 G，求证：$AG \perp BG$.

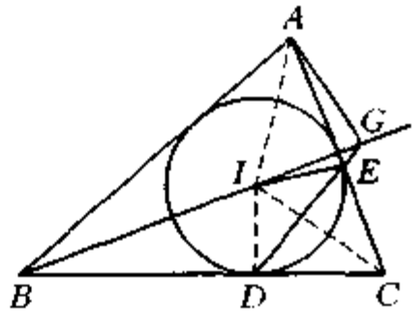


图 14-6

证明 考虑证明 $\triangle IBD \backsim \triangle ABG$.

连 AI，ID，IE 及 IC.

因为 BA、BC、AC 是圆 I 的切线，所以

$$\angle ABI = \angle IBD,$$

$$\angle ECI = \angle ICD = \frac{1}{2}\angle ACB.$$

又 $ID = IE$，且 $ID \perp BC$，$IE \perp AC$，所以

$$\angle EID = 360° - 90° - 90° - \angle ACB = 180° - \angle ACB,$$

从而

$$\angle EDC = \frac{1}{2}\angle EID = 90° - \frac{1}{2}\angle ACB.$$

于是
$$\angle BDG = 90° + (90° - \angle EDC)$$

$$= 90° + \frac{1}{2}\angle ACB.$$

而 $\angle AIB = 180° - \frac{1}{2}\angle BAC - \frac{1}{2}\angle CBA = 90° + \frac{1}{2}\angle ACB.$

由此推知
$$\angle AIB = \angle BDG.$$

因而
$$\triangle ABI \backsim \triangle GBD,$$

得
$$\frac{AB}{BI} = \frac{BG}{BD},$$

从而有
$$\triangle ABG \backsim \triangle IBD.$$

因 $\angle BDI = 90°$，所以 $\angle AGB = 90°$，即

$$AG \perp BG.$$

例 7 如图 14-7，以一底角 $\angle ABC$ 为 67.5°的等腰梯形 $ABCD$ 的一腰 BC 为直径作圆，交底 AB 于 E，且恰与另一腰 AD 相切于 M，求 $BE : AE$.

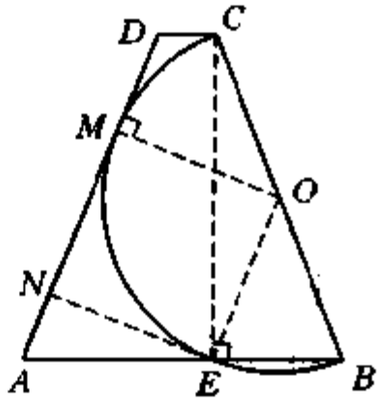


图 14-7

解 连 CE，OE，OM，其中 M 为切点，过 E 作 $EN \perp AD$ 于 N.

因为 BC 为圆 O 直径，所以 $\angle CEB = 90°$.

设圆 O 半径为 r，则 $OC = OB = OE = OM = r$，且

$$BE = 2r\cos 67.5°,$$

因 $OE = OB$，所以 $\angle OEB = \angle OBE = \angle NAE = 67.5°$，从而有 $OE \parallel AD$.

因 AD 为切线，于是 $OM \perp AD$. 而 $EN \perp AD$，由此推知 $OM \parallel EN$. 因此，四边形 $OENM$ 为矩形，得 $OM = EN$，

即 $EN = r$.

在直角 $\triangle ANE$ 中，$AE = \dfrac{NE}{\sin 67.5°} = \dfrac{r}{\sin 67.5°}$，

则

$$\frac{BE}{AE} = \frac{2r\cos 67.5°}{\dfrac{r}{\sin 67.5°}} = 2\sin 67.5° \cdot \cos 67.5°.$$

在 $\triangle BOE$ 中，$S_{\triangle BOE} = \dfrac{1}{2} \cdot (OE\sin 67.5°) \cdot (2OE\cos 67.5°) = r^2\cos 67.5° \cdot \sin 67.5° = \dfrac{1}{2}OE \cdot OB \cdot \sin \angle BOE = \dfrac{1}{2}r^2\sin \angle BOE$.

又 $\angle BOE = 180° - 2 \times 67.5° = 45°$，所以

$$\cos 67.5° \cdot \sin 67.5° = \frac{1}{2}\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

因此，
$$\frac{BE}{AE} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

即
$$BE : AE = 1 : \sqrt{2}.$$

说明 此题可以有更一般地推广.

以一底角 α 的等腰梯形 $ABCD$ 的一腰为直径作圆，交大底 AB 于 E，且恰与另一腰 AD 相切于 M，求 $BE : AE$.

结果为 $BE : AE = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha : 1$.

例 8 圆的内部有 4 个点，任何两点间的距离都大于这个圆的半径. 试证明：总能找到两条互相垂直的直径，将圆分为 4 个部分，使每部分的内部有且仅有一个点.

证明 设这 4 点按四边形的顺序为 A、B、C、D，由于任何两点

间的距离都大于半径，所以圆心不是这四点中的任何一点，且任何两点不在同一条半径上.

如图 14-8，在 $\triangle AOB$ 中，因 AO、BO 都小于半径，而 AB 大于半径，所以 $\angle AOB$ 是 $\triangle AOB$ 中的最大角，得 $\angle AOB > 60°$.

同理可得 $\angle BOC > 60°$，$\angle COD > 60°$，$\angle DOA > 60°$.

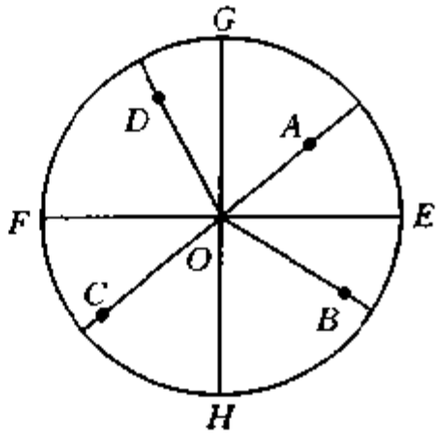


图 14-8

如果这 4 个角中有一个角大于 90°，不妨设为 $\angle COD$，作 $\angle AOB$ 的平分线 OE，并反向延长为直径 EF，作另一直径 $GH \perp EF$，此时 GH、EF 将圆分为 4 个部分，A 点在 GOE 内，B 点在 EOH 内.

考虑 C、D 的位置.

由于 $\angle AOB > 60°$，则 $\angle EOB > 30°$，所以 $\angle BOH < 60°$，又 $\angle BOC > 60°$，故 C 点不在 EOH 内.

同理 D 点不在 EOG 内. 但每一部分圆心角恰为 90°，而 $\angle COD > 90°$，于是 C、D 两点不可能在同一部分内，从而有 C 点在 HOF 内，D 点在 FOG 内.

如果这 4 个角都不大于 90°，那么它们都是 90°. 于是 A、B、C、D 4 个点分别在两条互相垂直的直径上，作平分此两直径夹角的两条直径，即为所求.

故命题成立.

练　习　题

A　组

1. 如图 14-9，直线 AB 和 AC 与圆 O 分别相切于 B、C 两点，P 为圆上一点，P 到 AB、AC 的距离分别为4 cm、6 cm，求 P 到 BC 的距离.

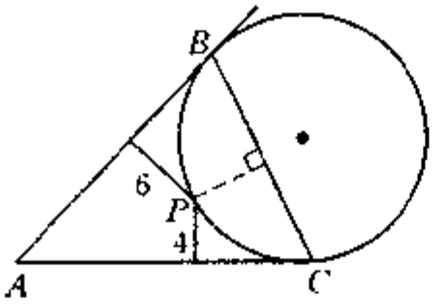


图 14-9

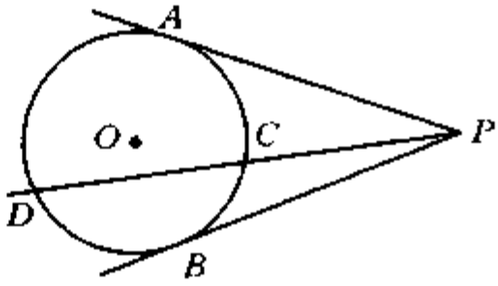


图 14-10

2. 如图 14-10，PA、PB 分别切⊙O 于 A、B 两点，PCD 是割线，E 是 CD 中点，若使 $\angle APB = 40°$，则 $\angle AEP$ 等于(　　).

(A) 40°　　(B) 50°　　(C) 60°　　(D) 70°

3. 如图 14-11，等腰△ABC 中，$AB = AC$，$BC = 4$，内切圆半径为 1，求腰长.

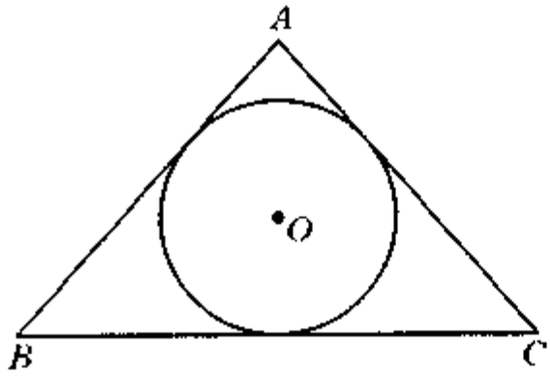


图 14-11

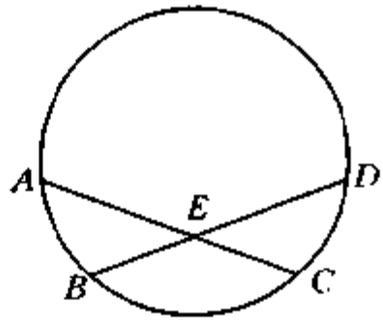


图 14-12

4. 如图 14-12，弦 AC、BD 相交于 E，$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$，$\angle BEC = 130°$，则 $\angle ACD$ 的度数等于(　　).

(A) 115°　　(B) 130°　　(C) 48°　　(D) 105°

5. 正$\triangle ABC$的高等于$\odot O$的半径，$\odot O$在AB上滚动，切点为T，$\odot O$交AC、BC于M、N，则$\overset{\frown}{MTN}$(　　).

(A) 在0°到30°变化　　(B) 在30°到60°变化

(C) 在60°到90°变化　　(D) 保持30°不变

(E) 保持60°不变

6. 圆C与三条不同的直线l、m、n都相切，则在下述三种情况中：

(1) l与m，m与n，n与l交角都是60°.

(2) $l \parallel m \parallel n$.

(3) 有另一圆C'也与l、m、n都相切. 可以成立的是(　　).

(A) 只有(1)　　(B) 只有(1)和(3)

(C) 只有(1)和(2)　　(D) 三种都可以

7. 如图14-13，MN是圆O的直径，若$\angle K = 20°$，$\angle PMQ = 40°$，则$\angle MQP$等于(　　).

(A) 30°　　(B) 35°

(C) 40°　　(D) 50°

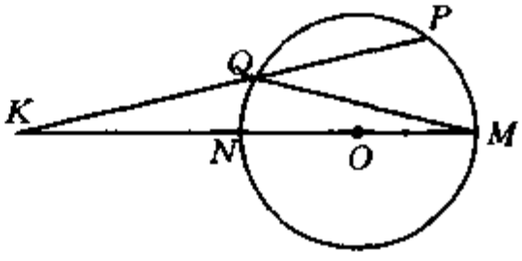


图 14-13

B　组

8. 延长$\odot O$的半径OA到B，使$OA = AB$，DT是圆的一条切线，T是切点，C是B在DT上的射影，求证：$\angle ACB = \frac{1}{3}\angle CAD$.

9. 由定点P至圆周所作的所有线段中，在过中心的直线上达到其最大值和最小值.

10. 圆内接四边形的对角线互相垂直，求证：(1)过对角线交点且平分一边的直线必垂直于这边的对边. (2)从外接圆心到一边的距离等于这边的对边的一半.

11. 若引自三角形一顶点的高、角平分线、中线4等分这顶角，证明：此三角形为直角三角形.

12. 在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，过C作$\triangle ABC$的外接圆的切线，

交 AB 延长线于 D，又过 D 作 AC 的垂线，E 为垂足，求证：$BD=2CE$.

13. 锐角三角形 ABC 的三边长满足不等式 $AB<AC<BC$. 如果 I 为三角形 ABC 内切圆圆心，O 是外接圆圆心. 证明直线 IO 与线段 AB 及 BC 相交.

14. 设 A 和 B 是已知圆上的两个固定点，XY 是该圆的动直径. 试确定(并证明)直线 AX 和 BY 的交点的轨道(可以假定 AB 不是直径).

测 试 题

1. 已知线段 PQ 与圆 O 只有一个公共点，那么这线段的两个端点 P、Q 中只能是(　　).

(A) 一点在圆 O 内部，另一点在圆 O 的外部，或 PQ 是圆的切线，P、Q 之一是切点

(B) P、Q 两点中一定有一点在圆 O 外

(C) 情况(A)或情况(B)

(D) 至多有一点在圆内

2. 如图 14-14，锐角$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 30°$，以 BC 为直径作圆与 AB、AC 分别交于 D、E，连结 DE，把$\triangle ABC$ 分成$\triangle ADE$ 和四边形 $DBCE$，设它们的面积分别为 S_1、S_2，求 $S_1 : S_2$.

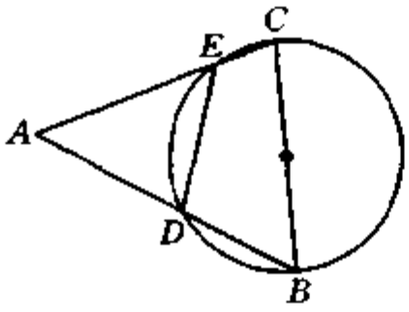


图 14-14

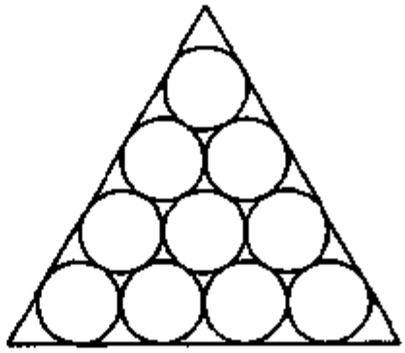


图 14-15

3. 如图 14-15，在一边长为 l 的等边三角形内部放置 10 个相等的圆，相邻的两圆互相外切，外围的圆都与三角形的边相切. 试求这 10 个等圆的面积之和.

4. 如图 14-16，上半部分是一个以 $AB = 2$ 为直径的半圆，下半部分是矩形 $ABCD$，点 P 分 $\overset{\frown}{AB}$ 的两部分之比为 $\overset{\frown}{AP} : \overset{\frown}{PB} = 1 : 2$；点 Q 分线段 AB 的两部分之比为 $AQ : QB =$

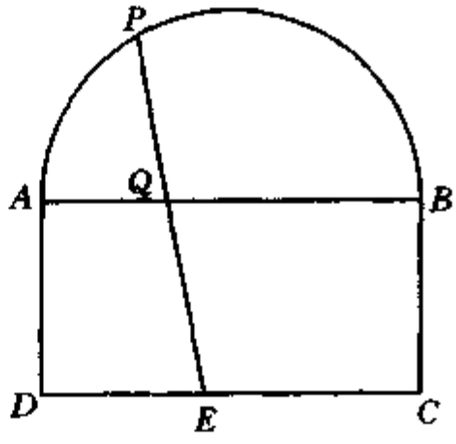


图 14-16

1∶2. 延长 PQ 交 DC 于 E，PE 将整个图形分为两部分，$DAPE$ 的面积与 $EPBC$ 的面积之比也是 1∶2，求 DE 之长.

第十五讲　两圆的位置关系

一、知识要点和基本方法

两圆的位置关系可以是两圆相交、两圆相切(内切或外切)、两圆相离、两圆内含.

设两个圆为$\odot O_1$、$\odot O_2$,半径分别为R_1、R_2,且$R_1 \geqslant R_2$,O_1与O_2间距离为d,那么就有

$$d > R_1 + R_2 \Leftrightarrow \text{两圆相离};$$

$$d = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \text{两圆相外切};$$

$$d = R_1 - R_2 \Leftrightarrow \text{两圆相内切};$$

$$R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2 \Leftrightarrow \text{两圆相交};$$

$$d < R_1 - R_2 \Leftrightarrow \text{两圆内含(这里 } R_1 \neq R_2\text{)}.$$

如果两圆$\odot O_1$、$\odot O_2$相交于A、B两点,那么O_1O_2垂直平分AB,如图15-1(为什么).

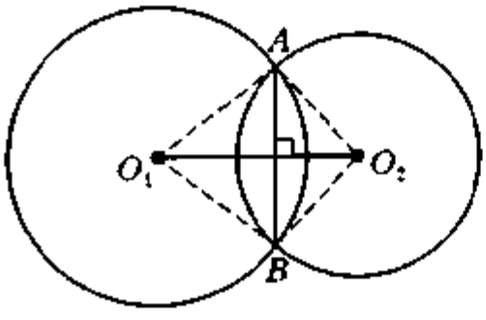


图15-1

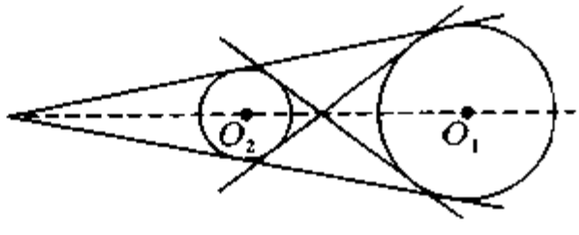


图15-2

如果两个半径不相等的圆O_1、圆O_2相离,那么内公切线交点、外公切线交点都在直线O_1O_2上,并且直线O_1O_2平分两外公切线所

夹的角和两内公切线所夹的角，如图15-2.

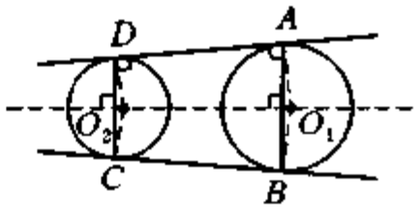


图 15-3

如果两条外公切线分别切圆 O_1 于 A、B 两点、切圆 O_2 于 C、D 两点，那么两条外公切线长相等，且 AB、CD 都被 O_1O_2 垂直平分，如图15-3.

处理关于两圆位置关系的问题的基本思路与第14讲关于直线与圆位置关系问题的基本思路是一致的.

二、例题精讲

例1 已知两圆的半径分别是5和6，圆心距 d 是满足不等式组

$$\begin{cases}\dfrac{x+5}{2}\leqslant x-\dfrac{1}{2},\\ 3x+14>8x-36\end{cases}$$

的整数解，试确定两圆的位置关系.

解 确定 d 与5和6之间的数量关系.

由不等式组

$$\begin{cases}\dfrac{x+5}{2}\leqslant x-\dfrac{1}{2},\\ 3x+14>8x-36,\end{cases}$$

得

$$6\leqslant x<10.$$

又 d 为不等式 $6\leqslant x<10$ 的整数解，则 d 可取6、7、8、9. 这样的 d 满足 $6-5<d<5+6$，即

$$1<d<11.$$

所以，符合题意的两圆相交.

例2 如图15-4，两圆内切于点 P，大圆的弦 AD 和小圆相离，PA、PD 交小圆于点 E、F，直线 EF 交大圆于点 B、C，求证：$\angle APB=\angle CPD$.

证明 两圆相切有切线.

过点 P 作两圆公切线 G、H.

因为 GH 切两圆于 P 点,所以

$$\angle GPA = \angle ADP = \angle EFP,$$

$$\angle GPB = \angle BCP.$$

又 $\angle EFP = \angle DPC + \angle BCP$, 则

$$\angle GPA = \angle DPC + \angle GPB,$$

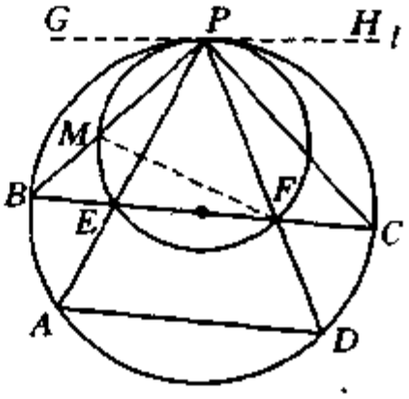


图 15-4

即
$$\angle GPA - \angle GPB = \angle CPD,$$

得
$$\angle APB = \angle CPD.$$

说明 (1) 将例 2 中"两圆内切"变化为"两圆外离"时,我们就可以得到如下结果:

如图 15-5,$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 外离,一直线交 $\odot O_1$ 于点 A、D,交 $\odot O_2$ 于点 B、C,O_1O_2 交 $\odot O_1$ 于 E,交 $\odot O_2$ 于 F,AE、BF 的延长线交于 P;DE、CF 的延长线交于 Q. 求证:$\angle APB + \angle CQD = 180°$.

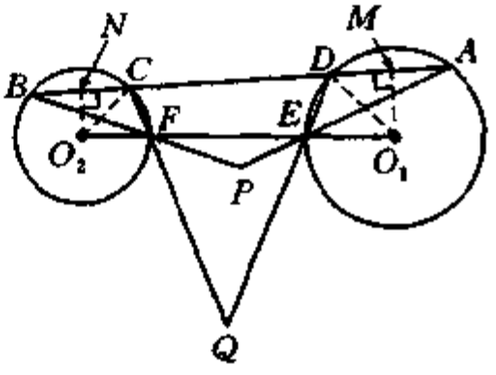


图 15-5

这是因为:作 $O_1M \perp AD$ 于 M,$O_2N \perp BC$ 于 N,$\angle APB + \angle CQD = (180° - \angle A - \angle B) + (180° - \angle DCQ - \angle CDQ) = 360° - 2\angle A - 2\angle B - \angle AED - \angle BFC = 360° - (\angle DO_1E + \angle DO_1M + \angle CO_2F + \angle CO_2N) = 360° - 180° = 180°$.

(2) 当把例 2 中"两圆内切"变化为"两圆内含"时,我们就有结果:

如图 15-6(1)、(2),$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 内含,$\odot O_1$ 的弦 AB 切 $\odot O_2$ 于点 C,O_1O_2 交 $\odot O_1$ 于 E,交 $\odot O_2$ 于 F,AE、BE 与 FC 分别交于点 P、Q. 求证:$\angle APC$ 与 $\angle BQC$ 相等或互补.

具体证明读者容易证得.

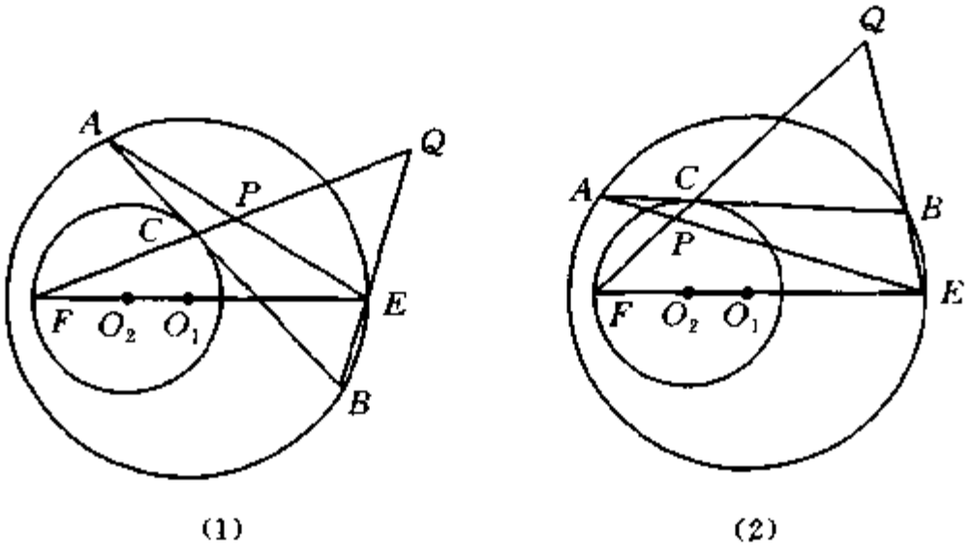


图 15-6

例 3 如图 15-7，$\angle CAB = \angle ABD = 90°$，$AB = AC + BD$，$AD$ 交 BC 于 P，作⊙P 使其与 AB 相切. 试问：以 AB 为直径作出的⊙O 与⊙P 是相交？是内切？还是内含？请作出判断并加以证明.

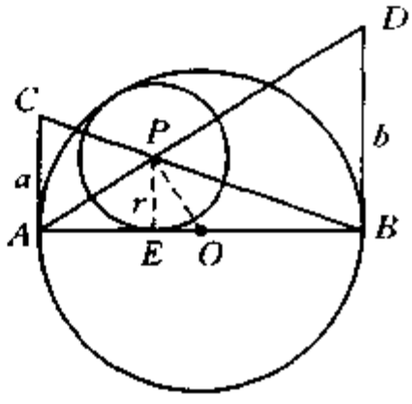


图 15-7

解 寻找 OP 与两圆半径之间数量关系.

设⊙P 切 AB 于 E，连 PE，则 $PE \perp AB$. 令 $AC = a$，$BD = b$ $(a \leqslant b)$，那么 $AB = a + b$.

又设⊙O 半径为 R，⊙P 半径为 r.

由 $AB = AC + BD$ 得 $R = \frac{1}{2}(a + b)$.

由 $\frac{r}{a} + \frac{r}{b} = \frac{EB}{AB} + \frac{AE}{AB} = 1$ 得

$$r = \frac{ab}{a + b}.$$

又由 $\frac{AE}{r} = \frac{AB}{b}$ 得

$$AE = r \cdot \frac{AB}{b} = \frac{ab}{a + b} \cdot \frac{a + b}{b} = a,$$

则 $$OE=\frac{1}{2}(a+b)-a=\frac{1}{2}(b-a).$$

在直角三角形 OPE 中，$OP^2=r^2+OE^2=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2+\frac{1}{4}(b-a)^2=\frac{(a^2+b^2)^2}{4(a+b)^2}$.

所以，

$$OP=\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}=\frac{(a+b)^2-2ab}{2(a+b)}$$

$$=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{ab}{a+b}$$

$$=R-r.$$

由此推知⊙O 与⊙P 相内切.

例 4 如图 15-8，AOB 是半圆的直径，$AC=BC$，E 为 BC 中点. 一个小圆切 BC 于 E，切 $\overset{\frown}{BC}$ 于 F. 如果 $AB=4$，自 A 到小圆的切线长 AT 为 l，求[10l]. (这里[x]表示不超过 x 的最大整数)

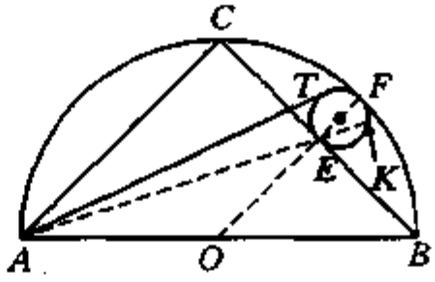


图 15-8

解 求出 l 的取值范围，即求出 l.

连 AE 交小圆于 K，连 OF 必过 E 点(因为 E 为 BC 中点)，连 KF.

在直角△ACE 中，

$$AE=\sqrt{AC^2+CE^2}$$

$$=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$=\sqrt{10}.$$

又直角△EKF 与直角△ACE 相似，所以

$$EK:AC=EF:AE,$$

即

$$EK=\frac{AC(OF-OE)}{AE}=\frac{2(2-\sqrt{2})}{\sqrt{5}}.$$

于是

$$AT = \sqrt{AE \cdot AK} = 2 + \sqrt{2},$$

即

$$3.41 < l < 3.42,$$

得

$$34.1 < l < 34.2.$$

故 $[10l] = 34$.

例 5 如图 15-9，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 A、B 两点，O_1 在 $\odot O_2$ 的圆周上，$\odot O_1$ 的弦 AC 交 $\odot O_2$ 于 D 点. 证明：线段 O_1D 与 BC 垂直.

证明 观察图 15-9 知 $O_1B = O_1C$，可尝试证明 O_1D 是 $\angle BO_1C$ 的平分线.

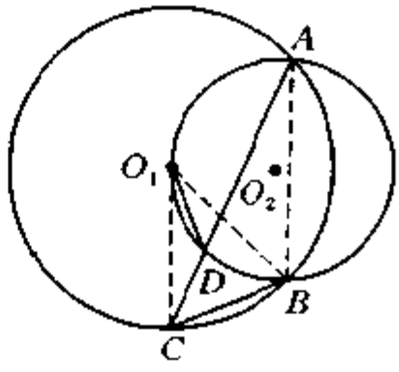


图 15-9

连 O_1C，O_1B，AB.

在 $\odot O_2$ 中，$\angle CAB = \angle DO_1B$.

在 $\odot O_1$ 中，$\angle CAB = \frac{1}{2}\angle CO_1B$，于是有

$$\angle DO_1B = \frac{1}{2}\angle CO_1B,$$

即 O_1D 是 $\angle CO_1B$ 的平分线.

又 $O_1C = O_1B$，则 $\triangle CO_1B$ 是等腰三角形，且 $\angle CO_1B$ 是顶角，所以 $O_1D \perp BC$.

例 6 半径相等的两圆圆 O_1、圆 O_2 外切于 A 点，半径长为圆 O_1 两倍的圆 O_3 与圆 O_1 内切于 B 点，且圆 O_3 与圆 O_2 相交于 P、Q. 证明：直线 AB 过点 P 或者过点 Q.

解 直线 AB 交 $\odot O_2$ 于 D，努力说明 D 点与 P 或 Q 重合.

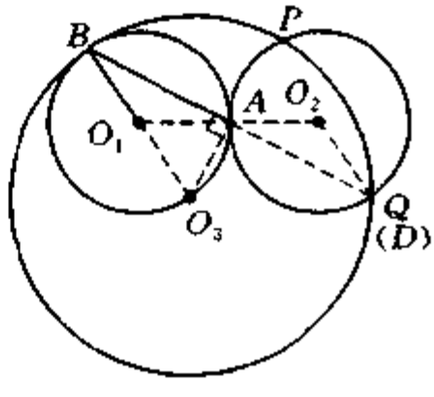


图 15-10

延长 BA 交 $\odot O_2$ 于点 D，连 AO_3.

因为 $\odot O_3$ 与 $\odot O_1$ 相内切，且 $\odot O_3$ 的半径是 $\odot O$ 的 2 倍，所以 BO_3 是 $\odot O_1$ 的直径. 于是 $\angle BAO_3 = 90°$.

又 $\angle BAO_1 = \angle DAO_2$，$AO_1 = AO_2$

$= O_1B = O_2D$，则 $\triangle AO_1B \cong \triangle AO_2D$，得 $AB = AD$.

在$\triangle BO_3D$ 中，$O_3A \perp BD$，$AB = AD$，所以$\triangle BO_3D$ 是等腰三角形，从而有

$$O_3B = O_3D.$$

由点 B 在$\odot O_3$ 上，得点 D 也在$\odot O_3$ 上，则点 D 必是$\odot O_2$ 与$\odot O_3$ 的交点. 而$\odot O_2$ 与$\odot O_3$ 的交点是 P、Q，所以点 D 或者与点 P 或者与点 Q 重合，即直线 BA 过点 P 或者过点 Q.

例 7 设 P 为等边三角形 ABC 所在平面上一点，且使得 $\triangle ABP$、$\triangle PBC$、$\triangle PCA$ 都是等腰三角形，问满足这种条件的 P 点共有多少个？

解 如图 15-11，作 AB、BC、CA 的垂直平分线，作圆 A、圆 B、圆 C，半径均为 a（a 为正三角形 ABC 的边长）.

这三条垂直平分线与三个圆的交点除去 A、B、C 三点外，还有 10 个点 O、D、E、F、D'、E'、F'、D''、E''、F''.

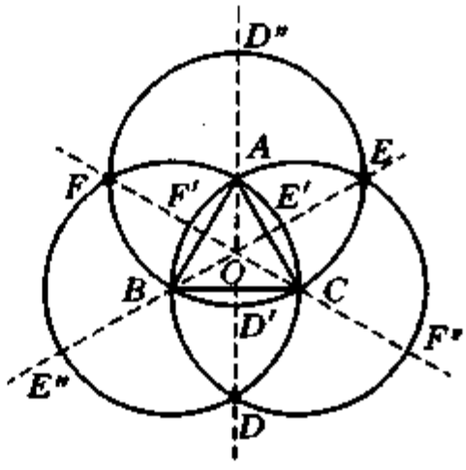


图 15-11

易验证知这 10 个点都满足要求.

所以满足条件的 P 点共有 10 个.

说明 一般化例 7，我们有如下结论：

平面上到正 n 边形任二顶点都成等腰三角形的点 P 的个数记为 S_n. 则 $S_3 = 10$，$S_4 = 9$，$S_5 = 6$，当 $n \geqslant 6$ 时 $S_n = 1$.

练　习　题

A　组

1. 半径为 13 和半径为 5 的两个圆相交，圆心距为 12，则两圆公共弦长为(　　).

(A) $3\sqrt{11}$　　(B) $\frac{65}{6}$　　(C) $4\sqrt{6}$　　(D) 10

(E) 以上答案都不对

2. 如图 15-12，大半圆的弧长 l_1 与 n 个小半圆弧长的和 l_2 之间的关系是(　　).

(A) $l_1 = l_2$　　(B) $l_1 = \pi l_2$

(C) $l_1 = nl_2$　　(D) $l_1 = \frac{1}{n} l_2$

图 15-12

3. 如图 15-13，B、C 是线段 AD 上两点，AB、BC、CD 分别是圆 O、N、P 的直径，这三个圆的半径都是 15，设 AG 切圆 P 于 G 且交圆 N 于 E 及 F，则弦 EF 的长是(　　).

(A) 20　　(B) $15\sqrt{2}$　　(C) 24　　(D) 25

(E) 这四个数都不是

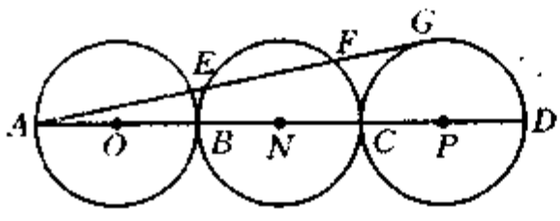


图 15-13

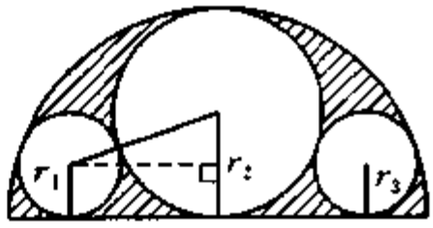


图 15-14

4. 如图 15-14，三个内切圆的面积和与半圆内阴影部分的面积，其中面积最大的是(　　).

(A) 三个内切圆面积和较大　　(B) 阴影部分面积较大

(C) 一样大　　(D) 不一定

5. 如图 15-15，A 是 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的一个交点，点 P 是 O_1O_2 的中

点，过点 A 的直线 MN 垂直于 PA，交$\odot O_1$、$\odot O_2$ 于 M、N. 求证：$AM = AN$.

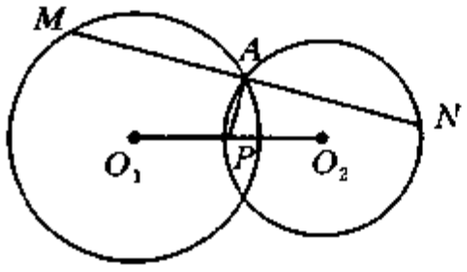


图 15-15

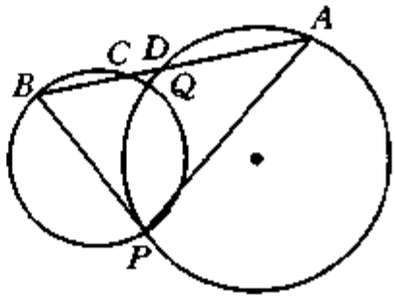


图 15-16

6. 如图 15-16，两圆相交于点 P、Q，大圆的割线 AD 交小圆于点 B、C. 求证：$\angle APB + \angle CQD = 180°$.

7. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 90°$，AD 为 BC 边上的高，直角$\triangle ABC$，直角$\triangle ABD$ 与直角$\triangle ACD$ 的内切圆分别与各三角形斜边相切于点 L、M、N. 求证：$AM \cdot AB + CN \cdot AC = CL \cdot BC$.

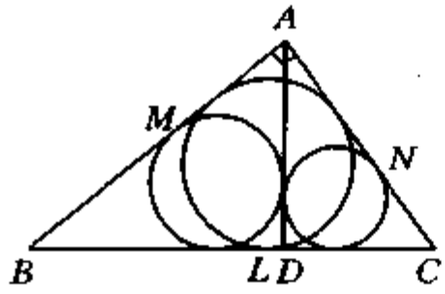


图 15-17

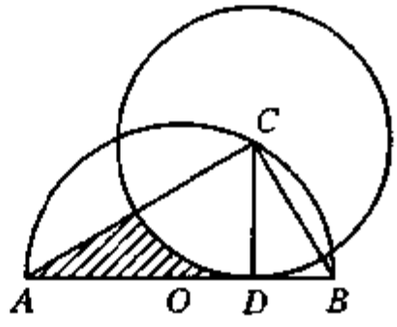


图 15-18

8. 如图 15-18，设 $AB = 2a$ 为定长，以 AB 为直径作圆 O，在上半圆上取动点 C，以 C 为圆心作圆 C 与 AB 相切于 D，圆 C 截去了$\triangle ABC$ 一部分，剩下部分面积记为 S，试求 S 的最大值.

B 组

9. 求证：相交两圆的两个交点，必在连心线的两侧.

10. 如图 15-19，$\odot O_1$ 过$\odot O$ 的圆心，且与$\odot O$ 交于 C、D. 从$\odot O_1$ 上任一点 P 作$\odot O$ 的两切线 PA、PB，A、B 是切点. 求证：CD 平分 AB.

11. 以 AB 为直径的半圆上有 C、D 两点，如果 $\angle DCB = 120°$，$\angle ADC = 105°$，$CD = 1$，求四边形 $ABCD$ 的面积 S（精确到 0.01）.

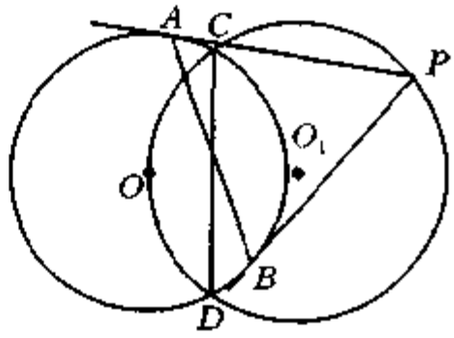


图 15-19

12. 以 r_1，r_2 为半径的两圆互相外切，d 为切点到外公切线的距离，求证：

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{d}.$$

13. 如图 15-20，三个等圆$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 的半径为 r，它们通过同一点 O，另外三个交点为 P_1、P_2、P_3. 求证：$\triangle P_1P_2P_3$ 的外接圆半径也是 r.

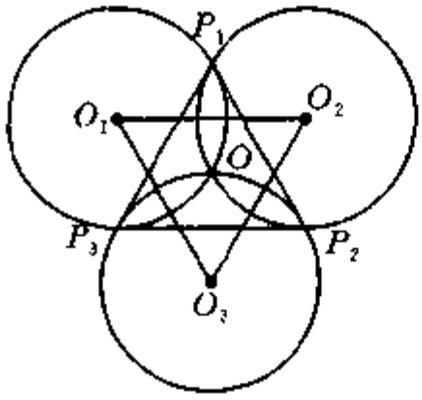


图 15-20

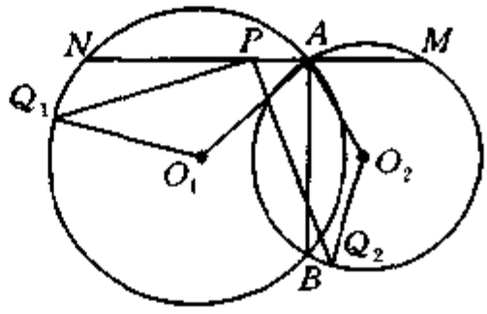


图 15-21

14. 如图 15-21，$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相交于 A、B，直线 NM 垂直于 AB 于 A，且分别与$\odot O_1$、$\odot O_2$ 交于 N、M，P 为线段 NM 的中点，$\angle AO_1Q_1 = \angle AO_2Q_2$. 求证：$PQ_1 = PQ_2$.

测 试 题

1. 已知 r_1，r_2 分别为两圆的半径，圆心距 $d=5$，且 r_1、r_2、(r_1-r_2) 的数值恰为方程 $x^3-6x^2+11x-6=0$ 的三个根，那么这两个圆的位置关系是(　　).

(A) 外离　　(B) 外切　　(C) 相交　　(D) 内切

(E) 不能确定

2. 如图 15-22，圆的半径是 $\sqrt{50}$，A、C 两点在圆上，B 点在圆内，$AB=6$，$BC=2$，$\angle ABC=90°$，求 B 点到圆心的距离.

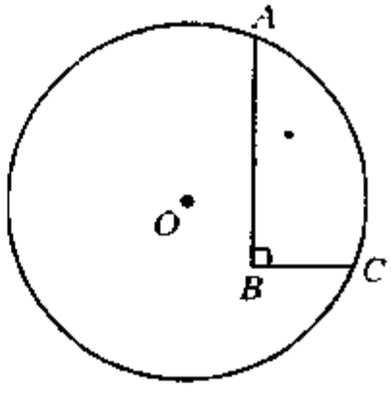


图 15-22

3. 由相交两圆的一交点至两圆周所引的诸割线中，以平行于连心线的割线为最长.

第十六讲　圆中的比例线段

一、知识要点和基本方法

处理圆中比例线段的问题，通常用到圆幂定理. 圆幂定理是初中几何最重要的定理之一.

相交弦定理、切割线定理和割线定理统称为圆幂定理.

1. 相交弦定理.

如果圆内两条弦 AB 和 CD 相交于点 P，那么 $PA \cdot BP = CP \cdot DP$（如图 16-1(1)）.

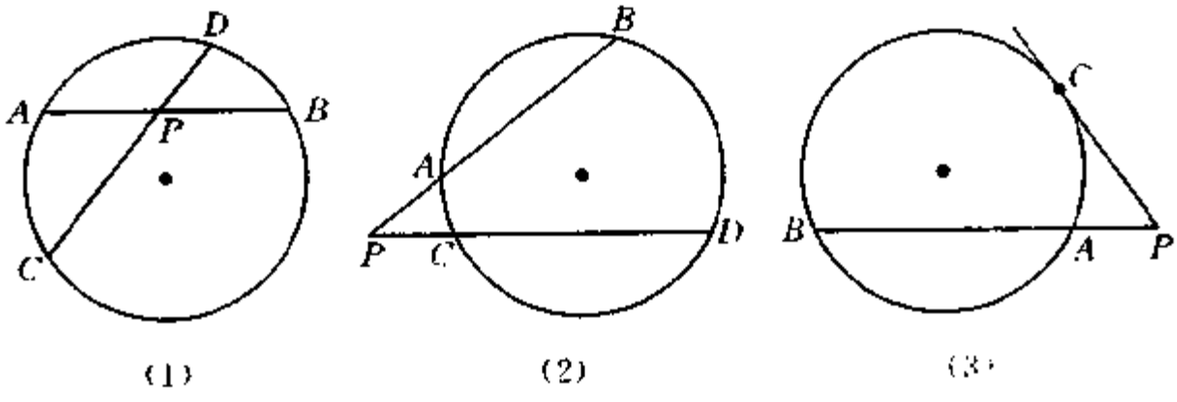
2. 割线定理.

如果从圆外一点 P 向圆引割线 PAB 和 PCD，那么 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$（如图 16-1(2)）.

3. 切割线定理.

如果从圆外一点 P 向圆引割线 PAB 和切线 PC，那么 $PA \cdot PB = PC^2$（如图 16-1(3)）.

实际上，可以把结论(3)看做是结论(2)的极限情形，于是上述结论(1)、(2)、(3)可以合并为：



(1)　　(2)　　(3)

图 16-1

如果交点为 P 的两条相交直线与圆 O 相交于 A、B 与 C、D，那么就有

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD,$$

这里 P、A、B 与 P、C、D 分别共线.

二、例题精讲

例 1 如图 16-2，$\odot O$ 和 $\odot O_1$ 外切于 P 点，一外公切线分别切两圆于 A、C 两点，AB 为 $\odot O$ 的直径. 求证：自 B 点至 $\odot O_1$ 的切线长等于 AB.

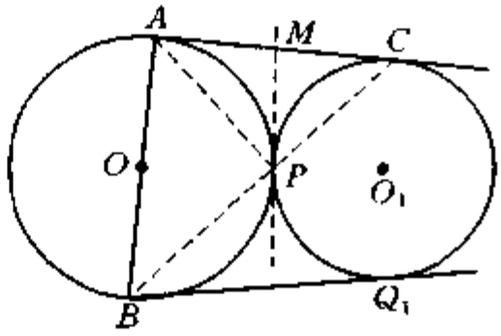


图 16-2

解 尝试利用切割线定理转化线段的关系.

连 AP、BP、PC，过 P 点作两圆的公切线 PM 交 AC 于 M 点，则 $MP = MA = MC$. 所以 $\triangle APC$ 为直角三角形，且 $\angle APC = 90°$.

又 AB 为 $\odot O$ 直径，则 $AP \perp PB$，即 $\angle APB = 90°$，于是 B、P、C 三点共线，从而有

$$BQ_1^2 = BP \cdot BC.$$

因 $AB \perp AC$，所以 $\angle BAC = 90°$，而 $\angle APB = 90°$. 由此推知 $\triangle ABP \backsim \triangle CBA$，得

$$\frac{AB}{BP} = \frac{BC}{AB},$$

即

$$AB^2 = BP \cdot BC.$$

故 $AB^2 = BQ_1^2$，即 $AB = BQ_1$.

说明 在圆中证明比例线段关系（含线段相等），运用切割线定理和三角形相似是常用的基本方法.

例 2 如图 16-3，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，P 为 $\odot O$ 外的一点，作 $\angle CPD = \angle A$ 使 PD 交 $\odot O$ 于 D、E 两点，并与 AB、AC 分别交于

点 M、N. 求证：$DN \cdot NE = MN \cdot NP$

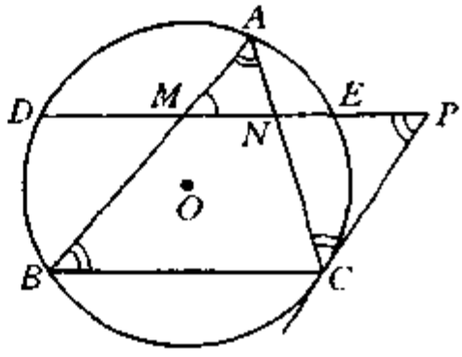


图 16-3

证明 尝试运用相交弦定理转化比例线段的关系.

因为 $\angle CPD = \angle A$，$\angle MNA = \angle PNC$，

所以 $\triangle AMN \backsim \triangle PCN$，

得 $$\frac{AN}{PN} = \frac{MN}{NC},$$

即 $$AN \cdot NC = PN \cdot MN.$$

又由相交弦定理得 $AN \cdot NC = DN \cdot NE$. 于是有

$$PN \cdot NM = DN \cdot NE.$$

在例 2 中，如果 $PD \parallel CB$，是否有 $PC^2 = PE \cdot PD$?

例 3 如图 16-4，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 M、N，D 是 NM 延长线上一点，两圆连心线交 $\odot O_1$ 于 A、B，AD 交 $\odot O_1$ 于 C，DN 分别交 AB、BC 于 E、G. 求证：$EM^2 = ED \cdot EG$.

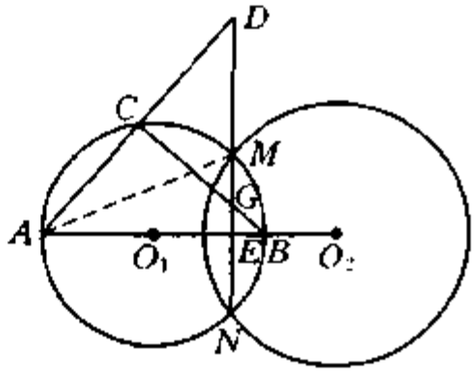


图 16-4

证明 尝试转化欲证积式为两条相交直线上的线段积式.

因为 M、N 为 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的交点，所以 $MN \perp O_1O_2$，且 $EM = EN$（为什么?）.

又 AB 为 $\odot O_1$ 的直径，则 $\angle AMB = 90°$. 于是有直角 $\triangle AME \backsim \triangle MBE$，得

$$EM^2 = AE \cdot EB.$$

因为 $\angle ACB = 90°$，$\angle CGD = \angle EGB$，所以 $\angle CDG = \angle GBE$. 从而直角 $\triangle AED \backsim \triangle GBE$，

得

$$\frac{DE}{BE}=\frac{AE}{GE},$$

即

$$ED\cdot EG=AE\cdot EB.$$

故 $$EM^2=ED\cdot EG.$$

说明 此题若再已知$\odot O_1$、$\odot O_2$的直径分别为4、6，且$O_1O_2=5$，而将结论“$EM^2=ED\cdot EG$”改为“求$ED\cdot EG$”，则问题别有韵味.

特别是当C在$\odot O_1$上接近于A时，$ED\cdot EG$依然为定值.

例4 如图16-5，圆内接四边形$ABCD$中，延长AB、DC交于E，延长AD、BC交于F，EM、FN为圆的切线，分别以E、F为圆心，EM、FN为半径作弧，两弧交于K.

求证：$EK\perp FK$.

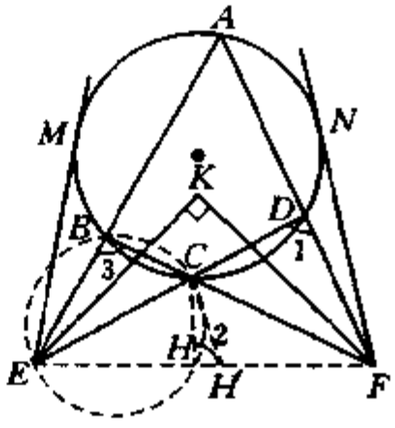


图16-5

证明 尝试证明$EK^2+FK^2=EF^2$，即$EM^2+FN^2=EF^2$.

过B、C、E作圆交EF于H，过D、C、F三点作圆交EF于H'.

因为$\angle ADC+\angle ABC=180°$，所以$\angle EBC+\angle CDF=180°$，而$\angle EBC+\angle CHE=180°$，$\angle CDF+\angle CH'F=180°$，因此，$\angle CHE+\angle CH'F=180°$，即

$$\angle CHE=\angle CH'E.$$

又直线EF交B、C、E三点圆于E、H，故H与H'重合，即H是B、C、E三点圆与D、C、F三点圆的交点，从而由割线定理得

$$EH\cdot EF=EC\cdot ED,$$

$$FH\cdot FE=FC\cdot FB.$$

又因为EM、FN是圆$ABCD$的切线，所以由切割线定理得

$$EM^2=EC\cdot ED,$$

$$FN^2 = FC \cdot FB.$$

而 $EM = EK$，$FN = FK$，于是

$$EK^2 = EH \cdot EF,$$

$$FK^2 = FH \cdot FE.$$

从而推知

$$EK^2 + FK^2 = EF \cdot (EH + HF) = EF^2.$$

故 $$EK \perp KF.$$

例 5 如图 16-6，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交，公共弦为 MN，公切线为 AB 与 CD，直线 MN 交 AB 于 P，交 D 于 Q. 求证：$PQ^2 = AB^2 + MN^2$.

证明 因为 AB 为 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的公切线，所以由切割线定理得

$$PA^2 = PM \cdot PN = PB^2,$$

从而有 $PA = PB$. 于是 $AB^2 = 4PM \cdot PN$.

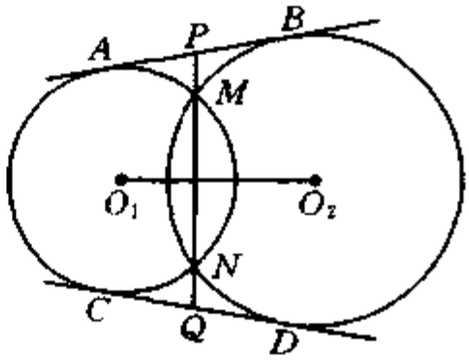


图 16-6

同理得 $CQ = QD$，则 $AC \parallel PQ \parallel BD$，所以 $PQ \perp O_1O_2$ 且直线 O_1O_2 平分线段 PQ.

又 $MN \perp O_1O_2$，且直线 O_1O_2 平分公共弦 MN，因而有 $PM = QN$.

所以

$$\begin{aligned} & AB^2 + MN^2 \\ =& 4PM \cdot PN + MN^2 \\ =& 4PM^2 + 4PM \cdot MN + MN^2 \\ =& (2PM + MN)^2 \\ =& (PM + MN + NQ)^2 \\ =& PQ^2. \end{aligned}$$

例 6 证明：三角形三条角平分线的乘积小于三条边的乘积.

证明 设法找出一角平分线与此角的两边的关系.

设三角形的三条角平分线分别为 AD、BE、CF. 作$\triangle ABC$ 的外接圆,延长 AD 交此圆于 G 点,连 CG,则由 $\angle ABD = \angle AGC$、$\angle BAD = \angle GAC$ 得

$$\triangle ABD \backsim \triangle AGC.$$

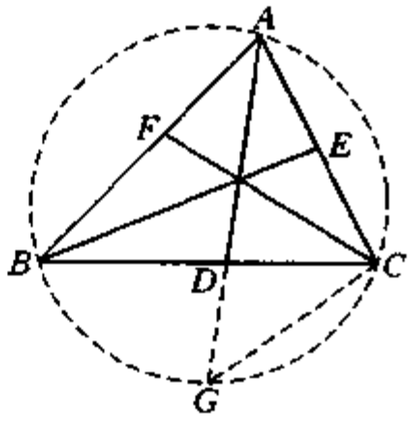


图 16-7

于是

$$\frac{AB}{AG} = \frac{AD}{AC}.$$

即

$$AG \cdot AD = AB \cdot AC.$$

令 $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, 则

$$bc = AG \cdot AD > AD^2.$$

同理可得

$$BE^2 < ac,$$

$$CF^2 < ab.$$

所以有 $$AD^2 \cdot BE^2 \cdot CF^2 < a^2b^2c^2,$$

即 $$AD \cdot BE \cdot CF < abc.$$

例 7 如图 16-8,设$\triangle ABC$ 是直角三角形,点 D 在斜边 BC 上,$BD = 4DC$. 一圆过点 C,且与 AC 相交于 F,与 AB 相切于 AB 的中点 G. 求证: $AD \perp BF$.

证明 尝试证明 $\angle CAD = \angle ABF$.

过 C 作 $CE \perp AC$ 交 AD 的延长线于 E 点,则 $CE \parallel AB$. 于是有

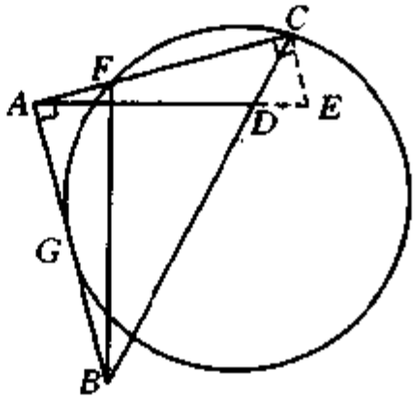


图 16-8

$$\frac{AB}{CE}=\frac{BD}{DC}.$$

又 $BD=4DC$，则有 $AB=4CE$.

因 $AB=2AG$，所以 $AG=2CE$. 于是由切割线定理得

$$AG^2=AF\cdot AC,$$

从而有

$$2AG\cdot\frac{AG}{2}=AF\cdot AC,$$

即

$$AB\cdot CE=AF\cdot AC.$$

因而可知直角 $\triangle ABF\backsim\triangle CAE$，得

$$\angle CAE=\angle ABF,$$

由此推知

$$\angle CAE+\angle AFB=90^\circ,$$

即

$$AD\perp BF.$$

说明 (1) 此题还有多种证明方式，其中有一种证明方式是富有启发意义，它是运用面积公式而得到的.

设 $\angle CAD=\alpha$，$\angle ABF=\beta\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2},0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$，由 $BD=4DC$ 得 $\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ADB}}=\frac{1}{4}$，就有

$$\frac{\frac{1}{2}AD\cdot AC\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}AD\cdot AB\cdot\sin(90^\circ-\alpha)}=\frac{1}{4}.$$

即

$$\frac{AC}{AB}\cdot\tan\alpha=\frac{1}{4}.$$

由切割线定理得 $AG^2=AF\cdot AC$，即

$$\frac{AC}{AG}=\frac{AG}{AF},$$

则
$$\frac{AC}{\frac{1}{2}AB}=\frac{\frac{1}{2}AB}{AF}.$$

即
$$\frac{AC}{AB}=\frac{1}{4}\cdot\frac{AB}{AF}=\frac{1}{4}\cdot\cot\beta.$$

所以
$$\tan\alpha=\tan\beta,$$

得
$$\alpha=\beta.$$

故
$$AD\perp BF.$$

运用面积关系是解决几何问题的基本方法之一.

(2) 与例 7 相关的一个问题是:

如图 16-9,在直角三角形 ABC 中,$\angle CAB=90°$,D 为 BC 上的点,F 是 AC 上的点,G 是 AB 的中点,且满足条件 $AG^2=AF\cdot AC$,$BF\perp AD$. 求 $BD:DC$ 的比值.

(仿例 7 引辅助线读者易求得 $BD:DC=4:1$).

若将上述命题条件 $AG^2=AF\cdot AC$ 用圆幂形式表述,并把"题设 $BF\perp AD$"与"求解 $BD=4DC$"对调,即变为例 7.

(3) 例 7 还可推广为一般的形式:

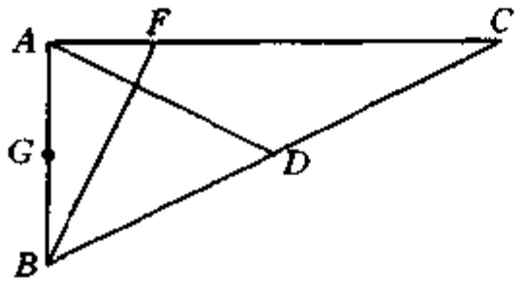


图 16-9

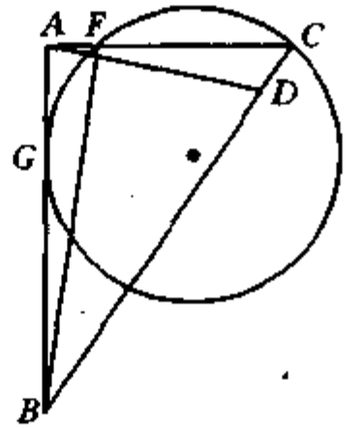


图 16-10

如图 16-10,$\triangle ABC$ 为直角三角形,点 D 在斜边 BC 上,$BD=$

λ^2CD，($\lambda>1$，且 λ 为正整数)，一圆过点 C 且与 AC 相交于 F，与 AB 相切于 G，且 $AG=\frac{1}{\lambda}AB$. 求证：$AD\perp BF$.

练　习　题

A　组

1. 如图 16-11，过⊙O 外一点 P 作⊙O 的两条切线 PA，PB，连结 OP 与 AB 交于 D，与⊙O 交于 C，过 C 作 AP 的垂线，垂足为 E. 若 $PA = 10\,\text{cm}$，$PC = 5\,\text{cm}$，求 CE 的长.

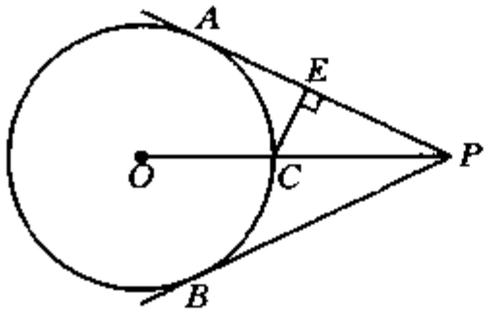


图 16-11

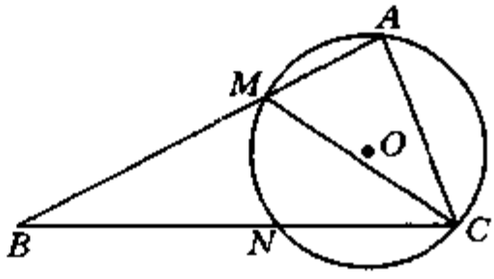


图 16-12

2. 如图 16-12，在△ABC 中，已知 CM 是∠C 的平分线，△AMC 的外接圆交 BC 于 N，若 $AC = \frac{1}{2}AB$. 求证：$BN = 2AM$.

3. 如图 16-13，已知⊙O 分别与△ABC 的 AB、AC 边切于 M、N，交 BC 边于 E、F，且 $BE = EF = FC$. 求证：∠B = ∠C.

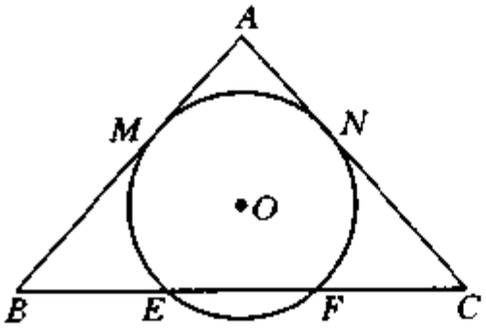


图 16-13

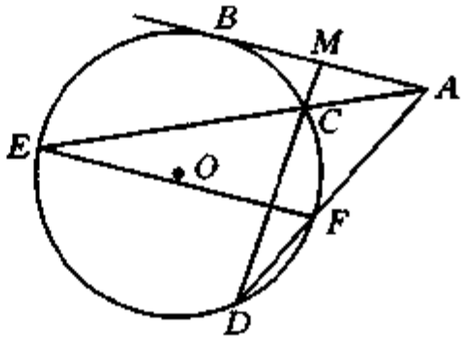


图 16-14

4. 如图 16-14，已知 AB 切⊙O 于 B，M 为 AB 的中点，过 M 作圆的割线 MD 交⊙O 于 C、D 两点，连 AC 并延长交⊙O 于 E，连 AD 交⊙O 于 F，求证：$EF \parallel AB$.

5. 如图 16-15，⊙O 的直径 AB 的延长线与弦 CD 的延长线相交于点 P，E 为⊙O 上的一点，$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{AC}$，$DE$ 交 AB 于 F. 求证：$PF\cdot PO=PA\cdot PB$.

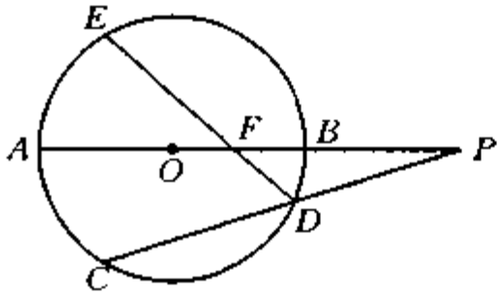


图 16-15

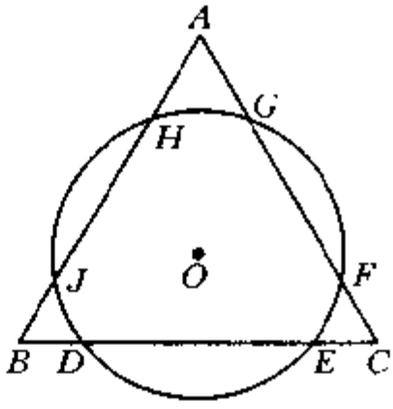


图 16-16

6. 圆与正三角形三边交于 6 个点，如图 16-16，如果 $AG=2$，$GF=13$，$FC=1$，$HJ=7$，求 DE.

7. 一个圆的直径 AB 的长度是一个两位的整数. 把这两位数中两个数字对调一下，就是与直径 AB 垂直的弦 CD 的长度，如图 16-17. 从交点 H 到圆心 O 的距离是一个正的有理数，求 AB 的长度.

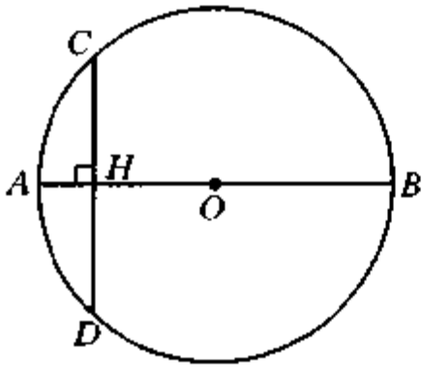


图 16-17

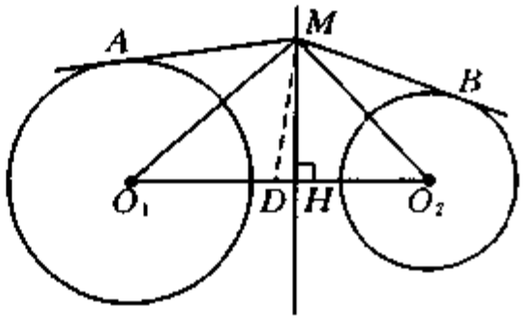


图 16-18

B 组

8. 如图 16-18，⊙O_1 与⊙O_2 的半径为 r_1、r_2 ($r_1>r_2$)，连心线 O_1O_2 的中点为 D，且连心线 O_1O_2 上有点 H，满足 $2DH\cdot O_1O_2=r_1^2-r_2^2$，过 H 作垂直于 O_1O_2 的直线 l，证明：直线 l 上任一点 M 向两

圆作切线，切线长相等.（这条直线 l 叫做根轴）

9. 如图 16-19，在线段 AB 的同一侧作出三个相似的三角形 PAB，AQB，ABR，再关于 AB 的垂直平分线对称地作出三个相似三角形 $P'AB$，$AQ'B$，ABR'. 求证：P，Q，R，P'，Q'，R' 在同一个圆上.

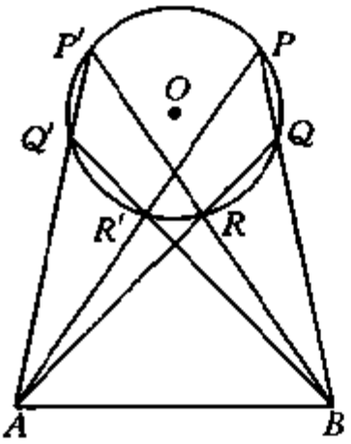


图 16-19

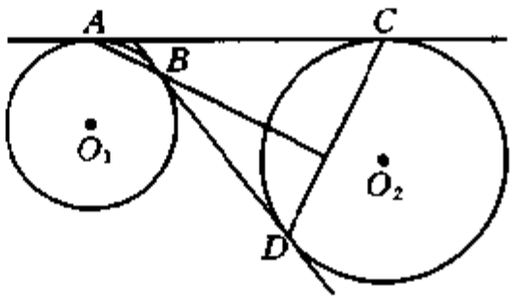


图 16-20

10. 如图 16-20，设⊙O_1 和⊙O_2 相离，引它们的一条外公切线切⊙O_1 于 A，切⊙O_2 于 C，引它们的一条内公切线切⊙O_1 于 B，切⊙O_2 于 D. 求证：直线 AB 和 CD 的交点在两圆的连心线上.

测 试 题

1. 圆内接四边形 $ABCD$ 的边 $AB:BC:CD:DA=1:9:9:8$，AC 交 BD 于 P，求 $S_{\triangle PAB}:S_{\triangle PBC}:S_{\triangle PCD}:S_{\triangle PDA}$.

2. 直线 l 切⊙O 于点 A，AD 垂直弦 BC，垂足为 D，BE、CF 都是 l 的垂线，垂足分别为 E、F. 求证：$AD^2=BE\cdot CF$.（如图 16-21）

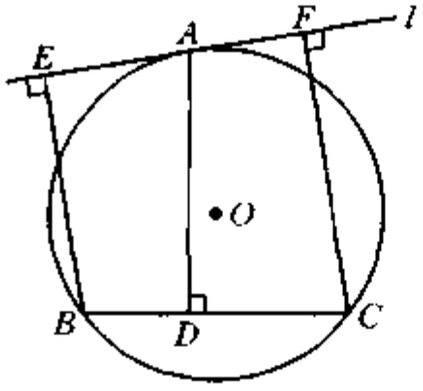


图 16-21

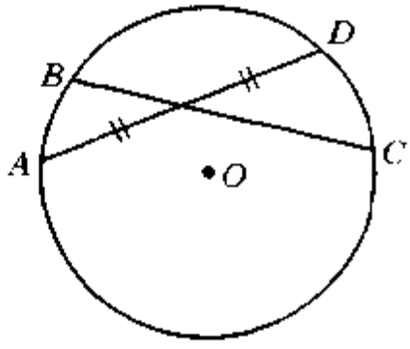


图 16-22

3. 如图 16-22，一个圆的两个相交的弦，其中 B 在 AD 小弧上，设圆半径是 5，$BC=6$，AD 被 BC 等分. 又设从 A 出发的弦只有 AD 能被 BC 等分，这样可以知道 AB 小弧对应的圆心角的正弦是一个有理数. 如果把这个有理数化成最简分数 $\frac{m}{n}$，求 mn.

第十七讲　四点共圆

一、知识要点和基本方法

在第16讲中，我们知道：

如果点 A、B、C、D 共圆，那么，就有这4点（如图17-1）组成的四边形 $ABCD$ 的内对角互补，即

$$\angle ABC+\angle ADC=180^\circ,\quad \angle BAD+\angle BCD=180^\circ,$$

并且 $\angle ADB=\angle ACB$.

如图17-1，延长 AB 与 DC 交于 P 点，连 AC 与 BD 交于 Q 点，那么 $PB\cdot PA=PC\cdot PD$，$AQ\cdot QC=QB\cdot QD$.

反过来情形如何呢？

1. 我们有：如果四边形 $ABCD$ 中有一组内对角互补，那么四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形，即 A、B、C、D 四点共圆.

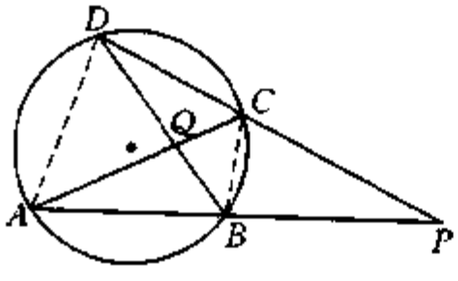


图 17-1

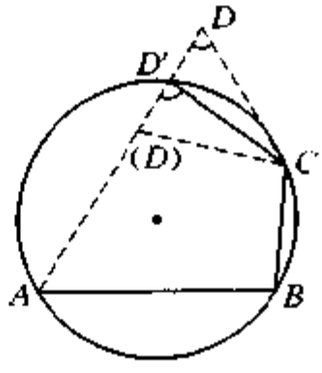


图 17-2

这是因为：如图17-2，$\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$，以 A、B、C 三点作圆，连（或延长）AD 交这个圆于 D' 点. 则 $\angle ABC+\angle AD'C=180^\circ$，而 $\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$，所以 $\angle AD'C=\angle ADC$. 易知 D 点不能在圆内（外），即 D 与 D' 重合，故结论成立.

2. 如果四边形 $ABCD$ 中有 $\angle ACB = \angle ADB$，那么 A、B、C、D 四点共圆.

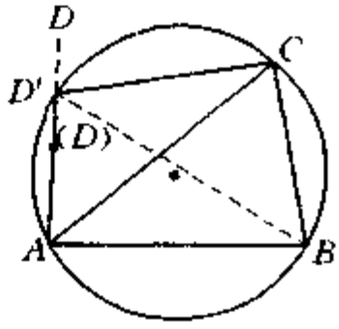


图 17-3

如图 17-3，类似于结论 1. 成立的理由，可以得到结论 17-2 成立.

3. 如果四边形 $ABCD$ 的一组对边 AB 与 DC 的延长线交于点 P，且 $PB \cdot PA = PC \cdot PD$，那么 A、B、C、D 四点共圆.

这是因为：由条件可知 $\triangle PBC \backsim \triangle PDA$，则 $\angle PBC = \angle PDA$，而 $\angle ABC + \angle PBC = 180°$，所以 $\angle AIDC + \angle ABC = 180°$，从而由结论 1. 知 A、B、C、D 四点共圆.

同理可知：

4. 如果四边形 $ABCD$ 的对角线交点为 Q，且 $QA \cdot QC = QB \cdot QD$，那么 A、B、C、D 四点共圆.

当知道了一个四边形 $ABCD$ 的四个顶点共圆时，我们就可以得到了若干角的量的关系，特别是相等关系，利用这样的关系可以简捷地得到几何问题中角及线段的量的关系，从而解决了相关的几何问题.

其实，一个四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形时，不仅具有若干角的关系，而且还有线段之间的关系，特别是四边形边与对角线之间长度关系，即是托勒密定理.

5. (Ptolemy 定理)如果四边形 $ABCD$ 的四个顶点共圆. 那么

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

这是因为：如图 17-4，在 AC 上取一点 M，使得 $\angle ABM = \angle DBC$，则 $\triangle ABM \backsim \triangle DBC$，得 $\frac{BM}{BC} = \frac{AB}{BD} = \frac{AM}{CD}$，即有 $AB \cdot CD = BD \cdot AM$. 于是 $\angle ABD = \angle ABM + \angle MBD = \angle MBD + \angle DBC = \angle MBC$，从而有 $\triangle BCM \backsim \triangle BDA$，得

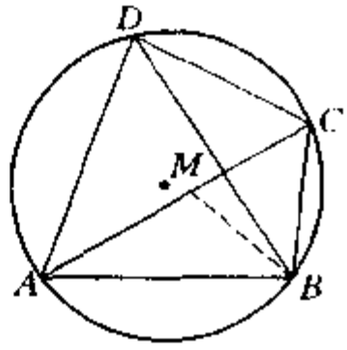


图 17-4

$$\frac{CM}{AD}=\frac{BC}{BD},$$

即
$$AD\cdot BC=BD\cdot CM.$$

因而 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=BD\cdot(AM+CM)=BD\cdot AC$.

利用托勒密定理可以简捷地处理涉及比例线段(或线段等积式)的几何问题.

二、例题精讲

例 1 等腰梯形一条对角线的平方,等于一个腰的平方加上两底之积.

如图 17-5,已知梯形 $ABCD$,$AD=BC$,$AB\parallel CD$,求证:$BD^2=BC^2+AB\cdot CD$.

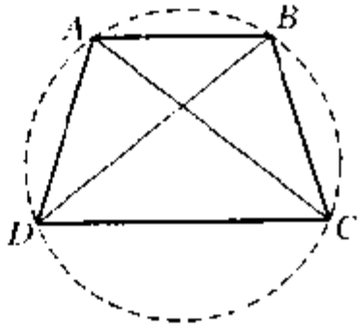


图 17-5

证明 因为四边形 $ABCD$ 为等腰梯形,所以 $\angle BCD=\angle CDA$、$\angle ABC=\angle DAB$,从而知 $\angle DAB+\angle BCD=180°$,故 A、B、C、D 四点共圆.

由托勒密定理得 $AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC$. 又 $\triangle ADC\cong\triangle BCD$,则 $AC=BD$. 因 $AD=BC$,所以 $BD^2=AB\cdot CD+BC^2$.

思考 还有其他证明方法吗?

例 2 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:4$,求证:$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{BC}$.

证明 转化证明等式 $AB\cdot BC+AC\cdot BC=AB\cdot AC$,想及利用托勒密定理,而构建圆内接四边形.

作 $\triangle ABC$ 的外接圆,并作弦 BD,满足 $BD=BC$,如图 17-6,则 $\angle BAD=\angle CAB$.

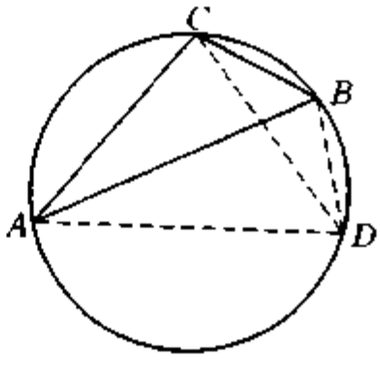


图 17-6

又 $\angle CAB=\angle CDB$,$\angle BCD=$

$\angle CDB$，则 $\angle CAD = 2\angle CAB = \angle CBA = \angle ADC$，$\angle ABD = \angle ACD = \angle ACB - \angle DCB = \angle ACB - \angle CDB = \angle ACB - \angle CAB = 3\angle CAB = 2\angle CAB + \angle CDB = \angle CBA + \angle CDB = \angle ADC + \angle CDB = \angle ADB$. 所以 $AC = CD$，$AB = AD$.

因 A、B、C、D 四点共圆，所以由托勒密定理得

$$AD \cdot BC + AC \cdot BD = AB \cdot CD,$$

即

$$AB \cdot BC + AC \cdot BC = AB \cdot AC,$$

从而有

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{BC}.$$

例 3 在边长为 1 的正七边形 $ABCDEFG$ 中，对角线 AD、BG 的长分别为 a、$b(a \neq b)$，求证：$(a+b)^2(a-b) = ab^2$.

证明 作正七边形 $ABCDEFG$ 的外接圆，连 BD、DG、BE、GE，则有

$$BD = EG = BG = b,$$

$$DG = BE = AD = a,$$

$$DE = AB = AG = 1.$$

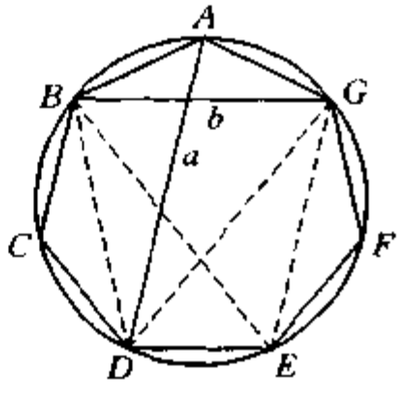


图 17-7

在四边形 $ABDG$ 中，由托勒密定理有

$$AD \cdot BG = AB \cdot DG + AG \cdot BD,$$

即

$$ab = a + b. \qquad ①$$

同理，在四边形 $BDEG$ 中，有

$$BE \cdot DG = BD \cdot GE + BG \cdot DE,$$

即

$$a^2 = b^2 + b. \qquad ②$$

由①、②得

$$(a+b)(a^2 - b^2) = ab^2,$$

即

$$(a+b)^2(a-b)=ab^2.$$

例4 如图 17-8，直角三角形 OAB 和直角三角形 OCD 的 $\angle O$ 公用，$CD\perp OA$，$AB\perp OC$，自点 B 作 OA 的垂线，自点 D 作 OC 的垂线，垂足分别为 M、N. 若 AB 交 CD 于点 P，求证：$MN\perp OP$.

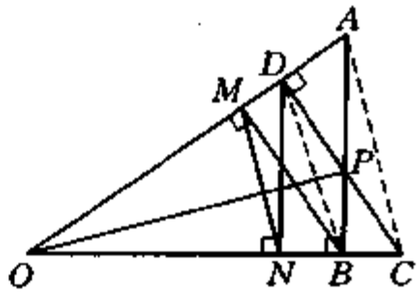


图 17-8

证明 由 P 为 $\triangle OAC$ 的垂心知需证 $MN\parallel AC$.

因为 $CD\perp OA$，$AB\perp OC$，所以由 $\angle ADC=\angle ABC$ 得 A、D、B、C 四点共圆，从而知 $\angle ODB=\angle OCA$.

又 $\angle DMB=\angle DNB=90°$，所以 B、D、M、N 四点共圆，得 $\angle ONM=\angle MDB$. 于是 $\angle ONM=\angle OCA$，由此推知 $MN\parallel AC$.

在 $\triangle AOC$ 中，$AB\perp OC$，$CD\perp OA$，则 P 为 $\triangle AOC$ 的垂心，所以 $OP\perp AC$. 因而 $MN\perp OP$.

例5 如图 17-9，圆 O_1、O_2 相交于点 A、B，P 是 BA 延长线上一点，割线 PCD 交圆 O_1 于 C、D，割线 PEF 交圆 O_2 于 E、F. 求证：C、D、F、E 四点共圆.

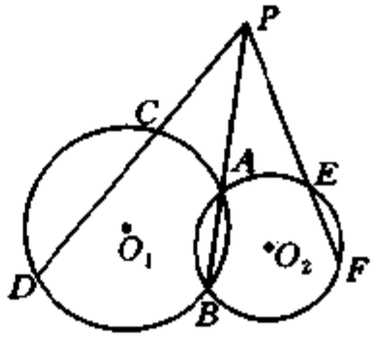


图 17-9

证明 由题意知 A、B、D、C 四点共圆，则有

$$PA\cdot PB=PC\cdot PD.$$

又 A、B、F、E 四点共圆，则有

$$PA\cdot PB=PE\cdot PF.$$

所以 $$PC\cdot PD=PE\cdot PF,$$

即

$$\frac{PC}{PF}=\frac{PE}{PD}.$$

因 $\angle DPF=\angle EPC$，所以 $\triangle DPF\backsim\triangle EPC$，得

$$\angle ECP = \angle PFD.$$

因为 $\angle ECP + \angle DCE = 180°$，所以 $\angle DCE + \angle PFD = 180°$，因而 C、D、F、E 四点共圆.

说明 例 5 换一种说法就是：

如果直线 CD、AB、EF 相交于一点 P，且 A、B、D、C 四点共圆，A、B、F、E 四点共圆，那么 C、D、F、E 四点共圆.

上述命题的逆命题成立吗？

例 6 已知 A、B、D、C 四点共圆，A、B、F、E 四点共圆，C、D、F、E 四点共圆，那么直线 AB、CD、EF 互相平行或相交于一点.

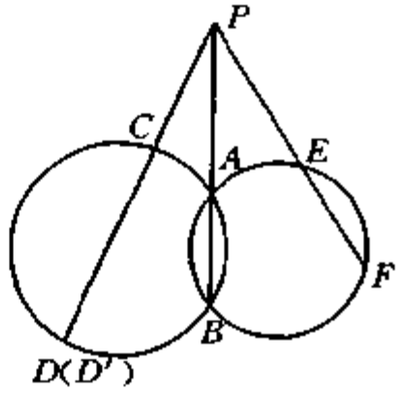


图 17-10

证明 假设 $AB \parallel CD$，但 EF 不平行于 AB，则令直线 FE 交直线 AB 于 P 点. 连 PC 交圆 ABC 于 D' 点. 于是

$$PC \cdot PD' = PA \cdot PB = PE \cdot PF.$$

从而知(由例 5)

C、D'、F、E 四点共圆，即 D' 点在 C、D、F、E 的四点圆上. 因而，圆 CEF 与圆 ABC 交于点 C、D、D'，且此两圆不重合，C 与 A 不重合，C 与 D' 不重合. 故 D 与 D' 重合. 从而有直线 DC 与 AB 也交于点 P.

这样，就有当 $AB \parallel CD$ 时必有 $AB \parallel EF$；当 AB 与 EF 交于点 P 时，P 点也在直线 CD 上. 故结论成立.

例 7 (1) 如图 17-11，$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，E 在 AB 上，F 是 AC 延长线上一点，EF 交 BC 于点 D. 证明：$BE = CF$ 当且仅当 $DE = DF$.

(2) 在(1)中 M 是 BC 中点，O 是直线 AM 上的点，使得 $OB \perp AB$，求证：OD 垂直于 EF，当且仅当 $DE = DF$.

证明 (1) 如图 17-11，过 F 点作 $FG \parallel AB$，交直线 BC 于 G，则

$$\angle ABC = \angle CGF.$$

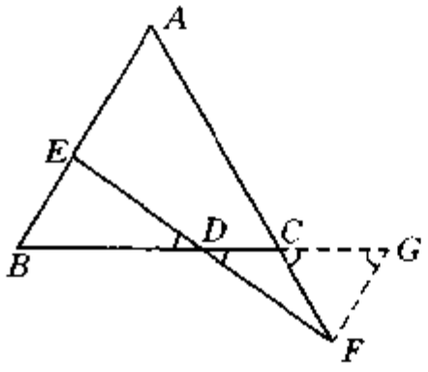


图 17-11

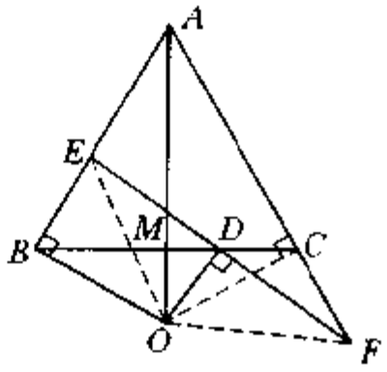


图 17-12

又 $\angle ACB = \angle GCF$，且 $AB = AC$，所以 $\angle ABC = \angle ACB$，$\angle GCF = \angle CGF$，

从而有 $CF = FG$.

当 $BE = CF$ 时，$BE = FG$，$\angle BDE = \angle FDG$，$\angle EBD = \angle DGF$，则 $\triangle BDE \cong \triangle GFD$，得 $DE = DF$.

当 $DE = DF$ 时，同理得 $\triangle BDE \cong \triangle GFD$，得 $BE = FG = CF$.

故结论成立.

(2) 连结 OE、OF、OC，则 $OB = OC$，$OC \perp AC$.

当 $DE = DF$ 时，由(1)知 $BE = CF$，则直角三角形 $OBE \cong$ 直角三角形 OCF，得 $OE = OF$.

在等腰三角形 OEF 中，D 为 EF 的中点，所以 $OD \perp EF$.

当 $OD \perp EF$ 时，因 $\angle ABO + \angle ODE = 180°$，所以 B、O、D、E 四点共圆，得 $\angle DEO = \angle DBO$.

又 $\angle OCF = \angle ODF = 90°$，所以 O、D、C、F 四点共圆，得 $\angle OFD = \angle OCB$.

因 $OC = OB$，于是有 $\angle OCB = \angle OBC$，从而推知 $\angle OED = \angle OFD$，故 D 为 EF 中点，即 $DE = DF$.

例 8 三角形 ABC 的外接圆为⊙O，$\angle C = 60°$，N 是弧 AB 的中点，H 是垂心. 求证：$CN \perp OH$.

证明 设法证明 OH、CN 是菱形的对角线.

连 OC、ON，延长 AH 交⊙O 于 H'，连 OH'，CH'.

由 $\angle ACB = 60°$ 得 $\angle CAH' = 30°$.

所以 $\angle COH' = 2\angle CAH' = 60°$.

因为 $OC = OH'$，所以三角形 OCH' 是等边三角形，即 $OC = OH' = CH'$.

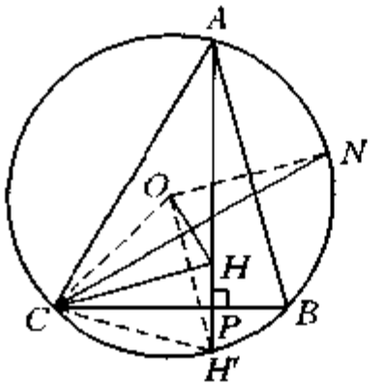


图 17-13

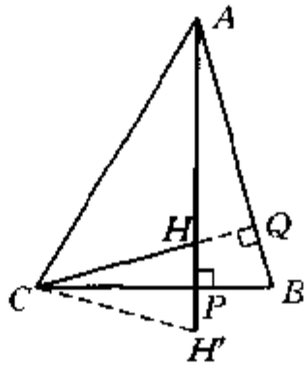


图 17-14

因为 $AH \perp BC$，$CH \perp AB$，如图 17-14，所以 B、Q、H、P 四点共圆，得 $\angle CHH' = \angle CBA$. 又 $\angle CH'A = \angle CBA$，从而知 $\angle CHH' = \angle CH'A$，于是 $\triangle CHH'$ 为等腰三角形，且有 $CH = CH'$.

由于 H 为垂心，N 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，

所以 $CH \perp AB$，$ON \perp AB$，

从而得 $CH \parallel ON$. 又 $ON = OC = CH' = CH$，由此推知四边形 $OCHN$ 为菱形.

因而 $OH \perp CN$.

练　习　题

A　组

1. 如果点 P 是正三角形 ABC 的外接圆劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上任一点，求证：$PA = PB + PC$.

2. 如图 17-15，$OQ \perp AB$，O 为圆心，F 为直线 OQ 与 AB 的交点，BC 与 OQ 交于 P 点，A、C、Q 三点共线，求证：$OA^2 = OP \cdot OQ$.

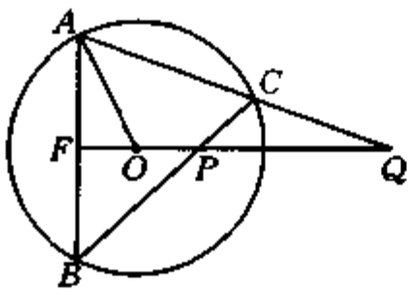


图 17-15

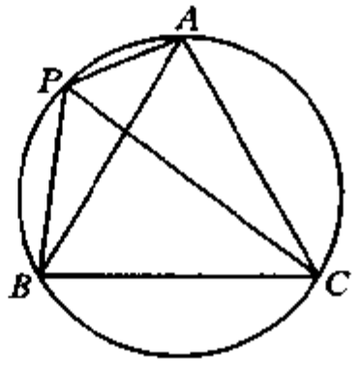


图 17-16

3. 已知 P 点为正三角形外接圆的劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点. 连结 PC 交 AB 于 D，求证：$\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} = \frac{1}{PD}$. （如图 17-16）

4. 在三角形 ABC 中，$AB < AC < BC$，D 点在 BC 上，E 点在 BA 的延长线上，且 $BD = BE = AC$，三角形 BDE 的外接圆与三角形 ABC 的外接圆交于 F 点，求证：$BF = AF + CF$. （如图 17-17）

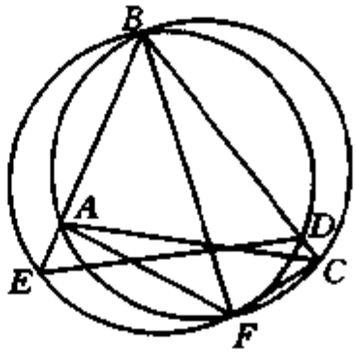


图 17-17

5. 设三角形 DEF 是锐角三角形 ABC 的垂足三角形，求证：(1) $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \cos^2 A$；(2)若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的外接圆半径分别为 R 和 R'，则 $R = 2R'$.

6. 在等边三角形 ABC 中，D、E 分别是 BC、AC 边上的点，且

有 $BD = CE = \frac{1}{2}CD$，连 BE、AD 交于 P 点，证明：$CP \perp AD$.

7. 若 a、b、x、y 为正实数，且 $a^2 + b^2 = 1$，$x^2 + y^2 = 1$，求证：$ax + by \leqslant 1$.

B 组

8. 设 a、b、c 是三角形 ABC 的三边，且满足 $a^2 = b(b + c)$，求证：$\angle A = 2\angle B$.

9. 设三角形 ABC 的外接圆 O 的半径为 R，内心为 I，$\angle B = 60°$，$\angle A < \angle C$，$\angle A$ 的外角平分线交圆 O 于 E，证明：$IO = AE$.

10. 已知三角形 ABC 中，$\angle ABC < \angle ACB$，BD、CE 是角平分线，求证：$CE < BD$.

11. 已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABC'$ 都是同斜边的直角三角形，$AC = BC$，$AC' \neq BC'$，C 与 C' 在直线 AB 的同侧，求证：$S_{\triangle ABC} > S_{\triangle ABC'}$.

12. 已知等腰三角形 ABC，$AB = AC$，AD 垂直于 BC 于 D 点，DE 垂直于 AC 于 E 点，F 是 DE 的中点，求证：$AF \perp BE$.

13. 如图 17-18，AB 为定圆 O 中的定弦，作圆 O 的弦 C_1D_1，C_2D_2，…，$C_{1999}D_{1999}$，对其中每一个 i $(i = 1, 2, 3, \cdots, 1999)$，$C_iD_i$ 都被弦 AB 平分于 M_i，过 C_i、D_i 分别作圆 O 的切线，两切线交于 P_i，求证：点 P_1，P_2，…，P_{1999} 与某定点等距离，并指出这一定点.

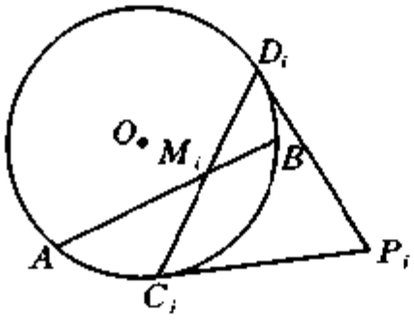


图 17-18

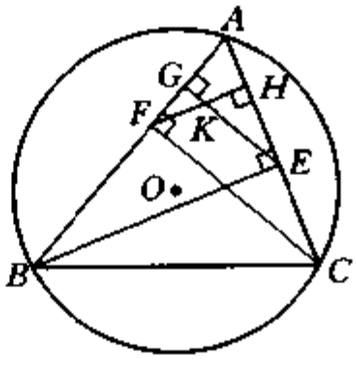


图 17-19

14. 如图 17-19，已知 O 是锐角三角形 ABC 的外心，BE、CF 为 AC、AB 边上的高，自垂足 E、F 分别作 AB、AC 的垂线，垂足为 G、H，EG、FH 相交于 K.

(1) 试证明：A、K、O 三点共线.

(2) 若 $AK = KO$，求$\angle A$.

15. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 外角的平分线交边 AC 的延长线于 P，$\angle A$ 外角的平分线交 CB 的延长线于 Q，BP 与 AQ 交于 R，如果过点 P、Q、C 的圆也过旁心 R，且 $PQ = 1$，求 PR 和 RQ 的长.

测 试 题

1. 如图 17-20，正方形 $ABCD$，$\angle EAF = 45°$，$EG \perp AC$，$FH \perp AC$，求证：过 H、G、B 三点圆的圆心在 BC 上.

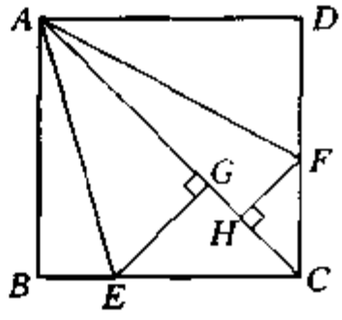


图 17-20

2. AB、CD 为圆 O 的两条定直径，试证明：圆周上任一点 P 在 AB、CD 上射影之间的距离为一定值.

3. 已知 PA、PB 切圆 O 于 A 和 B，PO 交 AB 于 M，过 M 作一弦 CD，求证：$\angle APC = \angle BPD$（如图 17-21）.

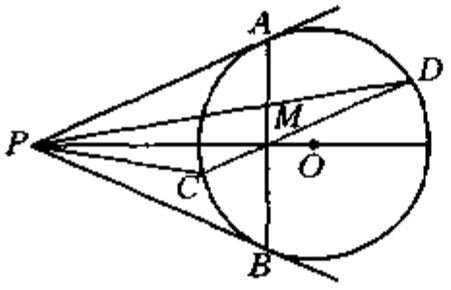


图 17-21

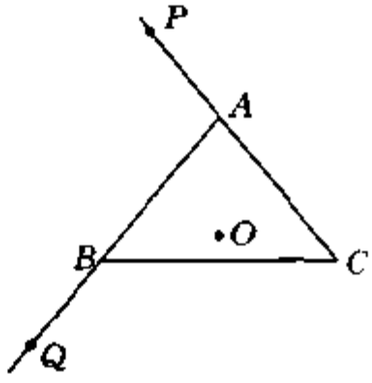


图 17-22

4. 如图 17-22，在三角形 ABC 中，$AB = AC$，任意延长 AB 到 Q，延长 CA 到 P，使 $AP = BQ$，求证：$\triangle ABC$ 的外心 O 与 A、P、Q 四点共圆.

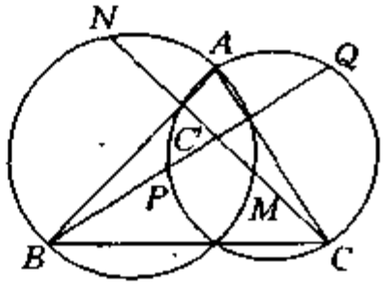


图 17-23

5. 已知平面上一个锐角三角形 ABC，以 AB 为直径的圆与 AB 边的高 CC' 及其延长线交于 M、N，以 AC 为直径的圆与 AC 边的高 BB' 及其延长线交于 P、Q. 求证：M、N、P、Q 四点共圆.（如图 17-23）

第十八讲　一元二次方程的整数根

一、知识要点和基本方法

对于有理系数的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（a、b、c 为有理数），如果此方程有整数根，那么判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 必须是一个完全平方数，即有有理数 m，使得 $b^2-4ac=m^2$. 但若 $b^2-4ac=m^2$，未必得到方程有整数根.

解决一元二次方程整数根问题，通常直接考虑有理数与实数的关系，或因式分解，或利用一元二次方程的判别式与求根公式，或运用根与系数关系式，或者转化为讨论一元二次函数的取值范围，或者运用配方，或者运用整数的若干基本性质.

具体操作时，应视具体问题的特征，恰当地选择解题思路.

二、例题精讲

例1　已知 n 为正整数，方程 $x^2-(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}n-6=0$ 有一个整数根，求 n 的值.

解　由 $\sqrt{3}$ 想及有理数与无理数之间的关系.

根据题意，设题中方程的一个整数根为 α，则有

$$\alpha^2-(\sqrt{3}+1)\alpha+\sqrt{3}n-6=0,$$

即

$$\alpha^2-\alpha-6=\sqrt{3}(\alpha-n).$$

因 $\sqrt{3}$ 是无理数，而 $\alpha-n$，$\alpha^2-\alpha-6$ 是整数，所以，$\alpha=n$、从而

$$n^2 - n - 6 = 0,$$

又 n 为正整数，于是有 $n = 3$.

例 2 已知方程 $a^2x^2 - (3a^2 - 8a)x + 2a^2 - 13a + 15 = 0$（其中 a 是非负整数）至少有一个整数根，求 a 的值.

解 根据题意知 $a \neq 0$，且有

$$a^2x^2 - a(3a - 8)x + (2a - 3)(a - 5) = 0,$$

则有

$$(ax - 2a + 3)(ax - a + 5) = 0,$$

得

$$x = 2 - \frac{3}{a} \quad 或 \quad x = 1 - \frac{5}{a}.$$

因为原方程至少有一个整数根，所以 a 必为 1、3、5，即

$$a = 1，或\ a = 3，或\ a = 5.$$

说明 运用因式分解是处理有关一元二次方程整数根的基本思路之一.

例 3 当 x 为何有理数时，代数式 $9x^2 + 23x - 2$ 的值恰为两个连续正偶数的乘积？

解 设两个连续正偶数为 k，$k + 2$，则

$$9x^2 + 23x - 2 = k(k + 2),$$

即

$$9x^2 + 23x - (2 + k^2 + 2k) = 0.$$

由 x 是有理数，所以判别式为一个有理数的完全平方数，即有

$$\Delta = 23^2 + 4 \times 9 \times (k^2 + 2k + 2)$$

$$= 565 + [6(k + 1)]^2.$$

令 $\Delta = p^2 (p \geqslant 0)$，则

$$p^2 - [6(k + 1)]^2 = 565 = 113 \times 5 = 565 \times 1,$$

即

$$[p+6(k+1)][p-6(k+1)]=113\times 5=565\times 1.$$

因为 $p\geqslant 0$，$k>0$，所以有

$$\begin{cases}p+6(k+1)=113,\\ p-6(k+1)=5\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}p+6(k+1)=565,\\ p-6(k+1)=1.\end{cases}$$

从而有 $k=8$ 或 $k=46$.

当 $k=8$ 时，原方程为 $9x^2+23x-82=0$，解得 $x=2$ 或 $x=-\frac{41}{9}$.

当 $k=46$ 时，原方程为 $9x^2+23x-221=0$，解得 $x=-17$，或 $x=\frac{130}{9}$.

于是，当 $x=2$ 或 $x=-17$ 时，$9x^2+23x-2$ 恰为两个正偶数 8 和 10，或者 46 和 48 的乘积.

例 4 设 a 为整数，已知存在整数 b 和 c，对于任意实数 x，都有 $(x+a)(x-15)-25=(x+b)(x+c)$，求 a 可能的值.

解 由 $(x+a)(x-15)-25=(x+b)(x+c)$ 得

$$(b+c-a+15)x+bc+25+15a=0,$$

由 x 的任意性有

$$\begin{cases}b+c=15-a,\\ bc=-15a-25,\end{cases}$$

于是得

$$bc-15(b+c)+15^2=-25,$$

即

$$(b-15)(c-15)=-25=-1\times 25=-5\times 5=1\times(-25),$$

从而有

$$\begin{cases}b-15=-1,\\ c-15=25\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}b-15=-5,\\ c-15=5\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}b-15=1,\\ c-15=-25.\end{cases}$$

即 $b+c=54$ 或 30 或 6.

当 $b+c=54$ 时，$a=-39$；

当 $b+c=30$ 时，$a=-15$；

当 $b+c=6$ 时，$a=9$.

所以，满足题中要求的 a 为 9，或 -15，或 -39.

说明 还可从类似于例 3 的解题思路而得结果.

例 5 求所有的实数 k，使得方程

$$kx^2+(k+1)x+(k-1)=0$$

的根都是整数.

解 当 $k=0$ 时，原方程转化为 $x=1$. 则 $k=0$ 是满足题意的一个值.

当 $k\neq 0$ 时，设方程的两根为 x_1、x_2，且 $x_1\geqslant x_2$，则

$$\begin{cases}x_1+x_2=-1-\dfrac{1}{k},\\ x_1\cdot x_2=1-\dfrac{1}{k}.\end{cases}$$

于是

$$x_1x_2-(x_1+x_2)=2,$$

即

$$(x_1-1)(x_2-1)=3.$$

因为 x_1、x_2 都是整数，所以有

$$(x_1-1)(x_2-1)=3\times 1=(-3)\times(-1),$$

即

$$\begin{cases}x_1-1=3,\\ x_2-1=1\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x_1-1=-1,\\ x_2-1=-3.\end{cases}$$

从而得

$$x_1+x_2=6\text{ 或 }-2.$$

当 $x_1+x_2=6$ 时，$-1-\dfrac{1}{k}=6$，得 $k=-\dfrac{1}{7}$；

当 $x_1+x_2=-2$ 时，$-1-\dfrac{1}{k}=-2$，得 $k=1$.

于是，$k=0$、1、$-\frac{1}{7}$.

例6 设 a 是大于 0 的实数，已知存在唯一的实数 k，使得关于 x 的二次方程

$$x^2+(k^2+ak)x+1\,999+k^2+ak=0$$

的两个根均为质数，求 a 的值.

解 设方程的两个质数根为 p、q，由一元二次方程根与系数的关系有

$$p+q=-k^2-ak,$$

$$pq=1\,999+k^2+ak.$$

则

$$p+q+pq=1\,999,$$

即

$$(p+1)(q+1)=2^4\times 5^3. \qquad ①$$

由①式知 p、q 是奇数，那么 $\frac{p+1}{2}$，$\frac{q+1}{2}$ 均为整数，且

$$\frac{p+1}{2}\cdot\frac{q+1}{2}=2^2\times 5^3.$$

若 $\frac{p+1}{2}$ 为奇数，则 $\frac{p+1}{2}=5^r(r=1,2,3)$，得 $p=2\times 5^r-1$ 是合数，与 p 为质数矛盾. 所以 $\frac{p+1}{2}$ 为偶数.

同理得 $\frac{q+1}{2}$ 也为偶数. 于是有

$$\frac{p+1}{4}\cdot\frac{q+1}{4}=5^3.$$

不妨设 $p\leqslant q$，则

$$\frac{p+1}{4}=1\text{ 或 }5.$$

当 $\frac{p+1}{4}=1$ 时，$p=3$，且 $\frac{q+1}{4}=5^3$，得 $q=499$. 易知 $p=3$，$q=499$ 是质数.

当 $\frac{p+1}{4}=5$ 时，$p=19$，且 $\frac{q+1}{4}=5^2$，得 $q=99$ 是合数，不合题意.

因此，$p=3$，$q=499$，此时，$p+q=-k^2-ak$ 化为

$$k^2+ak+502=0. \tag{②}$$

又 k 是唯一存在的，则方程②有唯一实数解，就有

$$\Delta=a^2-4\times 502=0,$$

得

$$a=2\sqrt{502}.$$

故

$$a=2\sqrt{502}.$$

例7 试求方程 $4x^2-40[x]+51=0$ 的全部实数解. 此处 $[x]$ 表示小于或等于实数 x 的最大整数.

解 尝试转化原问题为一元二次方程整数根的问题.

令 $x=[x]+B$，这里 $0\leqslant B<1$，则 $[x]\leqslant x<[x]+1$. 于是 $4x^2-40x+51\leqslant 4x^2-40[x]+51=0$，且 $4x^2-40(x-1)+51>4x^2-40[x]+51=0$. 从而可知满足原方程的实数 x 必须满足

$$\begin{cases}4x^2-40x+51\leqslant 0,\\ 4x^2-40(x-1)+51>0.\end{cases}$$

解得

$$\frac{3}{2}\leqslant x<\frac{7}{2},\text{或}\ \frac{13}{2}<x\leqslant\frac{17}{2}, \tag{①}$$

且有 $[x]=2$、3、7、8.

又 $4x^2=40[x]-51=$ 整数，则 $x^2=\frac{A}{4}$，A 为某整数. 所以 $A=40[x]-51$，且 $x^2=\frac{A}{4}$. ②

当 $[x]=2$ 时，则由①、②得 $A=29$，$x=\frac{\sqrt{29}}{2}$. 因 $2<\frac{\sqrt{29}}{2}$

<3，所以，$x=\frac{\sqrt{29}}{2}$ 是原方程的实数解.

当 $[x]=3$ 时，同理得 $A=69$，$x=\frac{\sqrt{69}}{2}$，但 $x=\frac{\sqrt{69}}{2}>4$，这与 $[x]=3$ 不符，所以 $x=\frac{\sqrt{69}}{2}$ 不是其解.

当 $[x]=7$ 时，由①、②得 $A=229$，$x=\frac{\sqrt{229}}{2}$. 因 $7<\frac{\sqrt{229}}{2}<8$，所以 $x=\frac{\sqrt{229}}{2}$ 是原方程的实数解.

当 $[x]=8$ 时，由①、②得 $A=269$，$x=\frac{\sqrt{269}}{2}$. 因 $9>x=\frac{\sqrt{269}}{2}>8$，所以 $x=\frac{\sqrt{269}}{2}$ 也为原方程的实数解.

故原方程的实数解为 $x=\frac{\sqrt{29}}{2}$，$\frac{\sqrt{229}}{2}$，$\frac{\sqrt{269}}{2}$.

练　习　题

A　组

1. 满足 $|ab|+|a+b|=1$ 的整数对(a, b)共有(　　)个.

(A) 4 个　　(B) 7 个　　(C) 6 个　　(D) 8 个

2. x、y 是正整数,且满足 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{100}$,求 y 的最大值.

3. 已知 a、b 为整数,且满足

$$\left[\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}-\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right]\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{2}{3},$$

求 $a+b$ 的值.

4. 已知方程 $x^2+(m+1)x+2m+1=0$ 的两个根都是整数,求 m 的整数值.

5. 方程 $(x-a)(x-8)=1$ 有两个整数根,求 a 的值.

6. 如图 18-1,正方形 $EFGH$ 内接于 $\triangle ABC$,设 $BC=\overline{ab}$ ($\overline{ab}$是一个两位数),$EF=c$,三角形高 $AD=d$,已知 a、b、c、d 是从小到大的四个连续正整数,试求 $\triangle ABC$ 的面积.

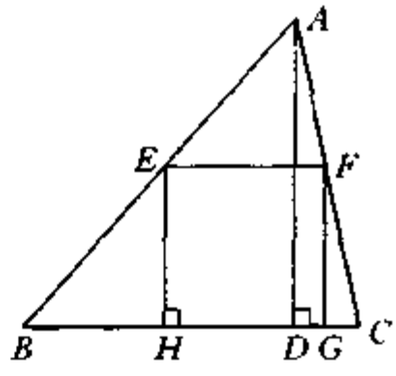


图 18-1

7. 关于 x 的一元二次方程 $mx^2-4x+4=0$ 与方程 $x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$ 的根都是整数,求 m 的值.

B　组

8. 证明:二次函数 $y=\frac{1}{3}(x^2-x+1)$ 的图象不可能经过纵、横

坐标都是整数的点.

9. 若 m、n 都是整数,求证方程

$$x^2 + 10mx - 5n + 3 = 0$$

没有整数根.

10. 设方程 $ax^2 + bx + c = 0$,系数 a、b、c 都是奇数,证明:这个方程无整数根.

11. 已知 n 为自然数,关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - 8nx + 10x - n^2 + 35n - 76 = 0$ 的两根为质数,试解此方程.

12. 已知 k 是正整数,关于 x 的一元二次方程 $x^2 + x + 10 = k(k-1)$ 有一个正整数根,求这个根及 k 的值.

测 试 题

1. 设 $\sqrt{27-10\sqrt{2}}=a+b$，其中 a 为正整数，b 在 0、1 之间，求 $\frac{a+b}{a-b}$ 的值.

2. m 为何整数时，$9m^2+5m+26$ 能分解为两个连续整数的乘积?

3. 求使关于 x 的方程

$$(a+1)x^2-(a^2+1)x+2a^3-6=0$$

都为整数根的所有整数 a.

4. 已知关于 x 的方程

$$(m^2-1)x^2-3(3m-1)x+18=0$$

有两个正整数根(m 是整数)，$\triangle ABC$ 的三边 a、b、c 满足 $c=2\sqrt{3}$，$m^2+a^2m-8a=0$，$m^2+b^2m-8b=0$. 求：(1)m 的值. (2)$\triangle ABC$ 的面积.

第十九讲　不定方程

一、知识要点和基本方法

未知数个数多于方程个数的方程(组),叫做不定方程(组).通常只讨论它的整数解或正整数解.

不定方程是整数论中最古老的一个分支,早在公元三世纪初,古希腊数学家丢番图就研究过这样的方程,人们又把不定方程叫做丢番图方程.

对于二元一次方程 $ax+by=c$,其中 a、b、c 均为整数,且 a、b 均不为零,我们有结论:

如果 $(a,b)=d>1$,但 d 不能整除 c,即 $d\nmid c$,那么此方程无整数解.

如果方程 $ax+by=c$ 的一个整数解为 $x=x_0$,$y=y_0$,这里 $(a,b)=1$,那么这个方程的所有解为 $x=x_0+bt$,$y=y_0-at$,其中 $t=0$,± 1,± 2,….

在初中涉及的不定方程问题,通常有两种基本的解题思路:一,运用整数的若干基本性质.二,运用初中的基本知识与基本方法,如因式分解,配方,用一元二次方程的根的判别式及根与系数之间的关系,用不等关系等.一般具体操作时,常综合这两个基本解题思路解决有关不定方程的问题.

二、例题精讲

例 1　求满足 $xy-3x^2=12$ 的正整数解.

解　若将方程中的 x 看成字母系数,得到关于 y 的一次方程.

由 $xy-3x^2=12$ 可知 $x\neq 0$，则有

$$y=\frac{3x^2+12}{x}=3x+\frac{12}{x}.$$

因为 x、y 为正整数，所以 x 必须是 12 的正因数，从而有 $x=1$、2、3、4、6、12. 这样就分别得到 y 为 15，12，13，15，20，37.

故原方程的正整数解为

$$\begin{cases}x_1=1,\\y_1=15;\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=2,\\y_2=12;\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=3,\\y_3=13;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_4=4,\\y_4=15;\end{cases}\quad\begin{cases}x_5=6,\\y_5=20;\end{cases}\quad\begin{cases}x_6=12,\\y_6=37.\end{cases}$$

说明 (1) 可以把原方程看作关于 x 的一元二次方程，且 x、y 为正整数，则 $\Delta=y^2+12^2$ 是一个完全平方数，即 $y^2+12^2=p^2$，得 $(y+p)(p-y)=12^2$. 因而可以求得 y，进而得 x.

(2) 可以直接利用整数整除的基本性质，原方程化为 $x(y-3x)=12$，则由 $x\mid 12$ 且 x 为正整数得 $x=1$，2，3，4，6，12，从而求得 y.

例 2 求满足 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$ 的所有正整数 x、y.

解 原方程 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$ 变形为

$$4(y-x)=xy.$$

考虑因式分解，则有

$$(4-x)(y+4)=16.$$

因 x、y 均为正整数，所以 $1\leqslant 4-x\leqslant 3$. 从而有 $4-x=1$，2，即 $x=3$，2. 于是有 $x=3$ 时，$y=12$；$x=2$ 时，$y=4$.

故满足题中条件的 x、y 分别为 $x=3$，$y=12$；$x=2$，$y=4$.

说明 (1) 题中“正整数 x、y”改为“整数 x、y”，结果如何呢？

(2) 由例 2 可知，一般地满足 $\frac{1}{x}\pm\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$ (a 为正整数)的整数

x、y,都可以利用例 2 的解题方法求得.

例 3 设 a、b、c、d 都是正整数,且 $a^5 = b^4$, $c^3 = d^2$, $c - a = 19$. 求 $d - b$ 的值.

解 令 $a^5 = b^4 = m^{20}$, $c^3 = d^2 = n^6$, 其中 m、n 均为正整数,则 $a = m^4$, $b = m^5$, $c = n^2$, $d = n^3$. 又 $c - a = 19$, 所以有

$$n^2 - m^4 = 19.$$

分解因式得

$$(n + m^2)(n - m^2) = 19.$$

因 19 是质数,于是由 $n + m^2 > n - m^2$ 得

$$\begin{cases} n - m^2 = 1, \\ n + m^2 = 19. \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} n = 10, \\ m = 3. \end{cases}$$

故 $d - b = 10^3 - 3^5 = 757$.

例 4 求方程 $\dfrac{x + y}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{3}{7}$ 的所有整数解.

解 由原方程可知 $x^2 - xy + y^2 \neq 0$, 而 $x^2 - xy + y^2 = \left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2 = \left(\dfrac{x}{2} - y\right)^2 + \dfrac{3}{4}x^2$, 则 x、y 不能同时为 0. 于是原方程可以转化为

$$3x^2 - (3y + 7)x + 3y^2 - 7y = 0.$$

因 x 是整数,那么上述关于 x 的二次方程应有实数根,故有

$$\Delta = (3y + 7)^2 - 4 \times 3(3y^2 - 7y) \geqslant 0,$$

即

$$\frac{21 - 14\sqrt{3}}{9} \leqslant y \leqslant \frac{21 + 14\sqrt{3}}{9}.$$

由 y 是整数得 $y = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

当 $y=0$ 时，原方程化为 $3x^2-7x=0$，又 $x\neq 0$，得 $x=\frac{7}{3}$，不为整数.

当 $y=1$ 时，原方程化为 $3x^2-10x-4=0$，得根 x 不为整数.

当 $y=2$ 时，原方程化为 $3x^2-13x-2=0$，也无整数根 x.

当 $y=3$ 时，原方程化为 $3x^2-16x+6=0$，无整数根 x.

当 $y=4$ 时，原方程化为 $3x^2-19x+20=0$，得整数根 $x=5$.

当 $y=5$ 时，原方程化为 $3x^2-22x+40=0$，得整数根 $x=4$.

所以，原方程的所有整数解为

$$\begin{cases}x=4,\\ y=5;\end{cases}\quad\begin{cases}x=5,\\ y=4.\end{cases}$$

说明 还可以令 $x+y=p$，$x-y=q$，转化原方程为 $28p=3(p^2+3q^2)$，而利用整除性而求之.

例 5 求方程

$$14x^2-24xy+21y^2+4x-12y-18=0$$

的整数解.

解 原方程化为

$$2(x-3y+1)^2+3(2x-y)^2=20,$$

则 $2(x-3y+1)^2\leqslant 20$，即 $0\leqslant(x-3y+1)^2\leqslant 10$.

所以 $(x-3y+1)^2$ 的值只能是 0、1、4、9.

因为 $(2x-y)^2$ 是平方整数，所以 $(x-3y+1)^2$ 不能取值 0、1、9，但可取 4.

于是有 $(x-3y+1)^2=4$，$(2x-y)^2=4$，即

$$\begin{cases}x-3y+1=2,\\ 2x-y=-2;\end{cases}\quad\begin{cases}x-3y+1=2,\\ 2x-y=2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-3y+1=-2,\\ 2x-y=-2;\end{cases}\quad\begin{cases}x-3y+1=-2,\\ 2x-y=2.\end{cases}$$

从而解得整数 x、y 分别为 $x=1$，$y=0$.

故原方程的整数解为 $x=1$，$y=0$.

例 6 证明：对于任意自然数 n，方程

$$x^2+1-3y^n=0$$

无整数解.

解 设：$x=3k$，$3k+1$，$3k+2$，k 为整数.

当 $x=3k$（k 为整数）时，原方程化为 $9k^2+1-3y^n=0$，即 $3(y^n-3k^2)=1$，这是不可能的. 所以 x 不为形如 $3k$ 的数.

当 $x=3k+1$（k 为整数）时，原方程化为

$$3(y^n-3k^2+2k)=2,$$

这也是不可能的，所以 x 也不是形如 $3k+1$ 的数.

当 $x=3k+2$（k 为整数）时，原方程化为

$$3(y^n-3k^2+2k-1)=2,$$

这是不可能的，所以 x 也不是形如 $3k+2$ 的数.

因此，原方程无整数解.

例 7 求所有的三个正整数，满足这三个数的和等于它们的积.

解 根据题意不妨设三个正整数为 x、y、z，且 $1\leqslant x\leqslant y\leqslant z$，则有

$$x+y+z=xyz. \qquad ①$$

如何求这个方程的正整数解呢？

尝试运用不等关系.

因为 $1\leqslant x\leqslant y\leqslant z$，那么由①得

$$xyz=x+y+z\leqslant z+z+z=3z,$$

所以有

$$1\leqslant xy\leqslant 3,$$

即 xy 可取 1，2，3.

当 $xy=1$ 时，$x=1$，$y=1$，则由 $2+z=z$ 知无解.

当 $xy=2$ 时，$x=1$，$y=2$，则由 $3+z=2z$ 得 $z=3$.

当 $xy=3$ 时，$x=1$，$y=3$，则由 $4+z=3z$ 得 $z=2$，而 $z<y=3$，故不合要求.

所以，满足①的正整数 x、y、z 分别为 $x=1$，$y=2$，$z=3$. 因而，题中所求三数为 1、2、3.

说明 (1) 利用例 7 的解题思路，求解例 2.

(2) 如果把例 7 中“三个正整数”改为“四个正整数”、“七个正整数”，结果如何呢？

如果“n 个正整数的和等于它们的积”，你能直接回答出其中一组解吗？

例 8 在三角形 ABC 中，$AB=33$ 厘米，$AC=21$ 厘米，$BC=m$ 厘米，m 为整数. 又在 AB 上可以找到 D，在 AC 上可以找到 E，使 $AD=DE=EC=n$ 厘米，n 为整数，求 m 的值.

解 在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理得

$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$$

$$=\frac{1530-m^2}{2\times 33\times 21}.$$

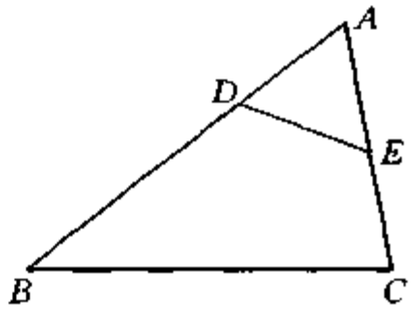


图 19-1

在$\triangle ADE$ 中，也有

$$\cos A=\frac{n^2+(21-n)^2-n^2}{2n\cdot(21-n)}=\frac{21-n}{2n},$$

从而有

$$n(2223-m^2)=3^3\times 7^2\times 11.$$

因为 m、n 是整数，所以 n 是 $3^3\times 7^2\times 11$ 的因数.

又 $AD+DE>AE$，即 $2n>21-n$，得 $n>7$，而 $n<21$. 则 n 只能取 9 或 11.

当 $n=9$ 时，$m^2=2223-3\times 7^2\times 11=606$，但 606 不是平方数，$m$ 不是整数.

当 $n=11$ 时，$m^2=2223-3^3\times 7^2=900$，得 $m=30$.

故 $m=30$.

练　习　题

A　组

1. 求方程 $x^2 = 5 - xy$ 的整数解.

2. 求方程组 $\begin{cases} x + 100 = y^2, \\ x + 168 = z^2 \end{cases}$ 的正整数解.

3. 解方程组 $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1. \end{cases}$

4. 求方程 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ 的正整数解.

5. 求不定方程 $x^2 - 12x + y^2 + 2 = 0$ 的正整数解集.

6. 求方程 $y^3 = x^2 + x$ 的整数解.

7. 求方程 $4x^2y = y^4 + 2x^4 + 1$ 的所有整数解.

8. 求方程 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = \frac{13}{12}$ 的整数根.

9. 求方程 $x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}} = \frac{10}{7}$ 的正整数解.

B　组

10. 求方程 $m^2 - 2mn + 14n^2 = 217$ 的正整数解.

11. 求方程组

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz, \\ x^2 = 2(y + z) \end{cases}$$

的正整数解.

12. 求 $x^2 - 11y = 4$ 的整数解.

13. 解方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy - 3x + 3 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - 2zx + 3 = 0. \end{cases}$$

14. 求方程 $3x^2 - 4xy + 3y^2 = 35$ 的整数解.

15. 求使前 n 个正整数 1、2、…、n ($n > 1$) 的平方和的平均值是一个整数的最小正整数 n.

16. 求 $y^2 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ 的一切整数解.

测 试 题

1. 求方程 $xy-10(x+y)=1$ 的整数解.

2. 若 y、z 均为质数，$x=yz$，且 x、y、z 满足 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{z}$，求 $1\,998x+5y+3z$ 的值.

3. 若 x、y、z 的最小值不小于 3，求方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ 的整数解.

4. 求方程 $x^3-y^3=xy+61$ 的正整数解.

第二十讲　$[x]$与$\{x\}$

一、知识要点和基本方法

设 x 是实数，不大于 x 的最大整数叫做 x 的整数部分，记作$[x]$（函数 $y=[x]$ 也叫做高斯函数）. $\{x\}=x-[x]$，称为 x 的小数部分.

例如：$[5.1]=5$，$\{4.1\}=0.1$，$[-1.3]=-2$，$\{-1.3\}=0.7$，$[-0.2]=-1$ 而不是 0，$[\sqrt{2}]=1$，$\{\sqrt{2}\}=\sqrt{2}-1$.

$[x]$与$\{x\}$具有如下基本性质：

1. 对于任何实数 x，有

$$x=[x]+\{x\},$$

其中

$$0\leqslant\{x\}<1.$$

当 $\{x\}=0$ 时，x 为整数；当 x 为整数时，$\{x\}=0$.

2. 当 $0\leqslant x<1$ 时，$[x]=0$；反之，当 $[x]=0$ 时，$0\leqslant x<1$.

3. 对于任何实数 x，有

$$[x]\leqslant x<[x]+1,\ x-1<[x]\leqslant x.$$

讨论关于$[x]$与$\{x\}$的问题时，基本思路是寻求不等关系“$n\leqslant x<n+1$，某个整 n”，确定$[x]$，进而顺利地解决问题.

二、例题精讲

例 1　证明：(1) $[x]+[y]\leqslant[x+y]$，

$$\{x\}+\{y\}\geqslant\{x+y\}.$$

(2) $[n+x]=n+[x]$，n 为整数.

(3) $[-x]=\begin{cases}-[x]-1 & \text{当 } x \text{ 不是整数,}\\ -[x] & \text{当 } x \text{ 是整数.}\end{cases}$

证明 (1) 因为 $x=[x]+\{x\}$, $y=[y]+\{y\}$, 那么 $x+y=[x]+[y]+\{x\}+\{y\}$. 所以 $[x]+[y]$ 是不超过 $x+y$ 的整数, 而 $[x+y]$ 是不超过 $x+y$ 的最大整数, 从而有

$$[x]+[y]\leqslant[x+y].$$

又 $x+y=[x+y]+\{x+y\}$,

所以 $\{x+y\}\leqslant\{x\}+\{y\}$.

(2) 因为 $x=[x]+\{x\}$, 那么

$$n+x=n+[x]+\{x\},\ 0\leqslant\{x\}<1,$$

所以 $$[n+x]=[n+[x]]=n+[x].$$

(3) 因为 $$x=[x]+\{x\},$$

$$-x=-[x]-\{x\},$$

所以当 x 为整数时, $\{x\}=0$, 有 $[-x]=-x=-[x]$; 当 x 不为整数时, $0<\{x\}<1$, 有

$$-x=-[x]-1+1-\{x\},\ 0<1-\{x\}<1,$$

则 $$[-x]=-[x]-1.$$

说明 (1) 由 $[n+x]=n+[x]$ 可知 $\{x+n\}=\{x\}$.

(2) 在例 1(1)的证明过程中, 我们发现, 若 $\{x\}+\{y\}=1$, 则 $x+y$ 为整数; 若 $[x+y]=x$, 则 x 是整数, 且 $0\leqslant y<1$.

(3) 对于任意 $x\leqslant y$, 令 $y=x+t$, $t\geqslant0$, 那么对照例 1(1)的推导过程, 我们还容易得到:

若 $x=y$, 则 $[x]=[y]$;

若 $x<y$, 则 $[x]\leqslant[y]$;

若 $[x]<[y]$, 则 $x<y$.

这里注意由 $x<y$ 不一定有 $[x]<[y]$, 如 $3.4<3.7$, 但 $[3.4]=[3.7]=3$; 由 $[x]\leqslant[y]$ 也不一定有 $x\leqslant y$, 这是因为当 $[x]=$

$[y]$时，有 $x<y$ 或者 $x=y$ 或者 $x>y$.

例 2 (1) 在前 n 个连续的正整数 1、2、…、n 中，能被正整数 p 整除的数的个数为 $\left[\frac{n}{p}\right]$.

(2) 对于数 $A=1\times2\times3\times4\times\cdots\times(n-1)\times n$，其中质数 p 出现的个数(即数 A 的质数分解式中 p 的最高次幂的指数)为

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^m}\right],$$

其中 $p^m\leqslant n$，且 $p^{m+1}>n$.

(3) 利用(2)中的结论求数

$$A=1\times2\times3\times\cdots\times1\,998\times1\,999$$

中末尾 0 的个数.

解 (1) 令 $n=ps+r$，这里 $0\leqslant r\leqslant p^{-1}$，则 $\frac{n}{p}=s+\frac{r}{p}$，且 $0\leqslant\frac{r}{p}<1$. 于是 $s=\left[\frac{n}{p}\right]$.

在 1、2、3、…、n 中能被 p 整除的数分别为

$$p,\ 2p,\ 3p,\ 4p,\ \cdots,\ sp,$$

即为 s 个，而 $s=\left[\frac{n}{p}\right]$. 所以在前 n 个连续正整数能被 p 整除的数的个数为 $\left[\frac{n}{p}\right]$.

因此，当 $p=q^m$，这里 q 是质数，那么在 1、2、…、n 中能被 q^m 整除的数的个数为 $\left[\frac{n}{q^m}\right]$.

(2) 在 1、2、3、…、n 中能被 p 整除的有且仅有 $\left[\frac{n}{p}\right]$ 个：

$$p、2p、3p、\cdots、\left[\frac{n}{p}\right]p;$$

能被 p^2 整除的有且仅有 $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ 个：

$$p^2、2p^2、3p^2、\cdots、\left[\frac{n}{p^2}\right]p;$$

如此下去，能被 p^k 整除的有且仅有$\left[\frac{n}{p^k}\right]$个：

$$p^k、2p^k、\cdots、\left[\frac{n}{p^k}\right]p;$$

最后能被 p^m 整除的有且仅有$\left[\frac{n}{p^m}\right]$个，即 1 个，为$\left[\frac{n}{p^m}\right]p^m$，这里 $p^m \leqslant n < p^{m+1}$.

我们注意到在 1、2、…、n 中有一数 a 含 p 的最高次幂为 p^k，那么 a 同时能被 p，p^2，…，p^k 整除，p^k 在$\left[\frac{n}{p}\right]$、$\left[\frac{n}{p^2}\right]$、…、$\left[\frac{n}{p^{k-1}}\right]$及$\left[\frac{n}{p^k}\right]$中各计算过一次，所以 $1\times2\times3\times\cdots\times n$ 中含 p 的最高次幂指数应为

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^m}\right],$$

这里 $p^m \leqslant n < p^{m+1}$.

(3) 由(2)可知 $\left[\frac{1\,999}{5^5}\right]=0$，$\left[\frac{1\,999}{5^4}\right]=3$，$\left[\frac{1\,999}{5^3}\right]=15$，$\left[\frac{1\,999}{5^2}\right]=79$，$\left[\frac{1\,999}{5}\right]=399$，所以 $1\times2\times3\times4\times\cdots\times1\,999$ 中 5 的最高幂指数为

$$\left[\frac{1\,999}{5}\right]+\left[\frac{1\,999}{5^2}\right]+\left[\frac{1\,999}{5^3}\right]+\left[\frac{1\,999}{5^4}\right]$$

$$=399+79+15+3=496.$$

因为 $1\times2\times3\times4\times\cdots\times1\,999$ 中含有 2 大于 $\left[\frac{1\,999}{2}\right]=999>496$，故每一个 2 可以与一个 5 相乘得出末尾一个零，从而有 496 个零，即数 $1\times2\times3\times\cdots\times1\,999$ 的末尾有 496 个 0.

例 3 证明：对于任意实数 x，有

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x].$$

解 因为 $x=[x]+\{x\}$，这里 $0\leqslant\{x\}<1$，所以 $x+\frac{1}{2}=[x]+\{x\}+\frac{1}{2}$，$2x=2[x]+2\{x\}$.

当 $0\leqslant\{x\}<\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1}{2}<\{x\}+\frac{1}{2}<1$，$0<2\{x\}<2\times\frac{1}{2}=1$，从而得

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x],\ [2x]=2[x].$$

故有
$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=2[x]=[2x].$$

当 $\frac{1}{2}\leqslant\{x\}<1$ 时，由 $1\leqslant\{x\}+\frac{1}{2}<1+\frac{1}{2}$ 得 $x+\frac{1}{2}=[x]+1+\{x\}-\frac{1}{2}$，这里 $0\leqslant\{x\}-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$. 又 $2x=2[x]+2\{x\}=2[x]+1+2\{x\}-1$，这里 $0\leqslant 2\{x\}-1<1$. 那么有

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=2[x]+1=[2x].$$

说明 一般地有

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx],$$

其中 n 是一个大于 1 的自然数.

证明思路类似于例 3，读者自行证明.

例 4 设 n 是正整数，且

$$I=(n+1)^2+n-\left[\sqrt{(n+1)^2+(n+1)}\right]^2,$$

那么(　　).

(A) $I>0$　　(B) $I<0$　　(C) $I=0$

解 利用基本性质估计出 $\sqrt{(n+1)^2+(n+1)}$ 的整数部分.

因为 $(n+1)^2<(n+1)^2+(n+1)<(n+1)^2+2(n+1)$

$+1=(n+2)^2$，所以 $n+1<\sqrt{(n+1)^2+(n+1)}<(n+1)+1$，从而有 $\left[\sqrt{(n+1)^2+(n+1)}\right]=n+1$. 于是

$$\begin{aligned} I &= (n+1)^2+n-\left[\sqrt{(n+1)^2+(n+1)}\right]^2 \\ &= (n+1)^2+n-(n+1)^2 \\ &= n>0. \end{aligned}$$

故 $I>0$，即选(A).

说明 利用“若 $n\leqslant x<n+1$，则 $[x]=n$”，求取$[x]$，这是一种常用方法.

例5 实数 x 满足

$$x-[x]+\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]=1.$$

求证：x 不为有理数.

证明 显然 $x=\pm 1$ 时，$x-[x]+\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]=0$，不等于 1，则 x 不可能为 1 或 -1.

当 $x\neq\pm 1$ 的整数时，$0<\left|\frac{1}{x}\right|<1$，但 $x-[x]+\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]=\left(x-[x]-\left[\frac{1}{x}\right]\right)+\frac{1}{x}$ 不是整数，即不等于1，所以 x 不是整数.

假设 x 不为整数但为有理数，设 $x=\frac{q}{p}$，p、q 是互质的两个整数，$p>0$.

若 $0<q<p$，则 $0<\frac{q}{p}<1$，$p=qs+r$，这里 $s\geqslant 1$，$0\leqslant r\leqslant q-1$，且 $\frac{p}{q}=s+\frac{r}{q}$，$0<\frac{r}{q}<1$，所以

$$x-[x]+\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]=\frac{q}{p}-0+\frac{p}{q}-s,$$

由 q^2+p^2 不能被 p 和 q 整除，则有 $x-[x]+\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$ 不是整数，

显然不等于 1，矛盾.

若 $q<0$，且 $|q|<p$，则 $-1<\frac{q}{p}<0$，$p=-qs+r$，这里 $0<r\leqslant(-q-1)$，且 $\frac{p}{q}=-s+\frac{r}{q}$，$-1\leqslant\frac{r}{q}<0$，所以

$$x-[x]+\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]=\frac{q}{p}-1+\frac{p}{q}-(-s-1),$$

不是整数，显然不等于 1，矛盾.

同理可知若 $|q|>p$，则也有 $x-[x]+\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\neq 1$.

故满足 $x-[x]+\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]=1$ 的 x 不是有理数.

例 6 若 $x>0$，$[x]^2=x(x-[x])$，求 $x-\frac{1}{x}$.

解 因为 $x>0$，那么 $[x]\geqslant 0$，且 $0\leqslant\langle x\rangle<1$，所以由 $[x]^2=x(x-[x])$ 得

$$[x]^2=([x]+\langle x\rangle)\cdot\langle x\rangle<[x]+1,$$

有

$$0\leqslant[x]<\frac{1+\sqrt{5}}{2}<2.$$

即 $[x]=0$ 或 1.

当 $[x]=0$ 时，有 $0=x(x-0)$，得 $x=0$，而 $x>0$，所以 $[x]=0$ 不符合题中要求. 故有 $[x]=1$.

由 $[x]=1$ 及 $[x]^2=x(x-[x])$ 得

$$x^2-x=1,$$

即

$$x-\frac{1}{x}=1.$$

说明 将原问题化为关于$[x]$的不等式(如一元二次不等式)得$[x]$的取值范围，利用$[x]$的整数取值性分别讨论得到结论. 这是常用的方法.

例 7 解方程 $x^3-[x]=3$.

解 令 $x=[x]+\langle x\rangle$，则 $0\leqslant\langle x\rangle<1$，且有

$$x^3 = x - \{x\} + 3,$$

即
$$0 \leqslant \{x\} = 3 + x - x^3 < 1.$$

得
$$2 < x(x^2 - 1) \leqslant 3.$$

当 $x < 0$ 时，由 $x(x^2-1) > 0$ 得 $x^2 - 1 < 0$，则有 $-1 < x \leqslant 0$，所以 $x(x^2 - 1) < 1$ 与 $2 < x(x^2 - 1)$ 矛盾.

当 $x > 0$ 时，$x(x^2 - 1) > 2$，得 $x^2 - 1 > 0$，即 $x > 1$. 又 $x(x^2 - 1) \leqslant 3$，则 $x < 2$. 所以 $1 < x < 2$. 从而 $[x] = 1$.

于是由 $x^3 = [x] + 3 = 4$ 得 $x = \sqrt[3]{4}$.

例 8 解方程 $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$，并证明它的根都不是有理数.

解 由 $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$ 得

$$x + \frac{1}{x} = [x] + \left[\frac{1}{x}\right] + 1$$

是整数.

令 $x + \frac{1}{x} = k$，k 是整数，所以

$$x^2 - kx + 1 = 0.$$

当 $|k| = 0, 1$ 时，方程无解；

当 $|k| \geqslant 2$ 时，$x = \frac{1}{2}\left(k \pm \sqrt{k^2 - 4}\right)$；

若 $|k| = 2$，则 $x = 1, -1$，不满足题中等式；

若 $|k| \geqslant 3$，则 $x = \frac{1}{2}(k \pm \sqrt{k^2 - 4})$ 是满足等式的全体实数；

由于 $k^2 - 4 = h^2$，$k^2 - h^2 = 4$，但当 $|k| \geqslant 3$ 时，两个平方数之差不小于 5，所以 $k^2 - 4$ 不是完全平方数，即 $\sqrt{k^2 - 4}$ 是无理数.

因此，满足题设的 x 是无理数.

例 9 在前 1 000 个正整数中，可以表示成下列形式：

$$[2x] + [4x] + [6x] + [8x]$$

的正整数有多少个？

解 令 $T=[2x]+[4x]+[6x]+[8x]=[n+2a]+[2n+4a]+[3n+6a]+[4n+8a]$，$0\leqslant a<\frac{1}{2}$，$n$ 为非负整数.

当 $0\leqslant a<\frac{1}{8}$ 时，$T=10n$；

当 $\frac{1}{8}\leqslant a<\frac{1}{6}$ 时，$T=10n+1$；

当 $\frac{1}{6}\leqslant a<\frac{1}{4}$ 时，$T=10n+2$；

当 $\frac{1}{4}\leqslant a<\frac{1}{3}$ 时，$T=10n+4$；

当 $\frac{1}{5}\leqslant a<\frac{3}{8}$ 时，$T=10n+5$；

当 $\frac{3}{8}\leqslant a<\frac{1}{2}$ 时，$T=10n+6$.

因此，可知在前 1 000 个自然数中每 10 个数中就有 6 个数满足条件. 故共有 600 个满足条件.

说明 由上述结果，易知不存在实数 x，满足 $[2x]+[4x]+[6x]+[8x]=147$.

练　习　题

A　组

1. 已知 $a=\left[\frac{1}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}\right]$，$b=\left\{\frac{1}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}\right\}$，求 a、b.

2. 求 $\left[\sqrt[3]{n^3+n^2+n+1}\right]$（$n$ 是正整数）.

3. 求 $\left[\sqrt{2\,000^2+1}+1-\sqrt{2}\right]$.

4. 设 $\frac{1}{3-\sqrt{7}}$ 的整数部分为 a，小数部分为 b，求 $a^2+(1+\sqrt{7})ab$ 的值.

5. 如果 $[x]=3$，$[y]=0$，$[z]=1$，求 $[x+y-z]$ 的值.

6. 若 $y=4\left(\frac{x+[u]}{4}-\left[\frac{x+[u]}{4}\right]\right)$，且当

$x=2$，5，12，15 时，$y=2$；

$x=1$，8，11，14 时，$y=1$；

$x=3$，6，9，16 时，$y=3$；

$x=4$，7，10，13 时，$y=0$.

则满足此条件的 u 的表达式是（　　）.

(A) $\frac{x+2}{4}$　　(B) $\frac{x+1}{4}$　　(C) $\frac{x}{4}$　　(D) $\frac{x-1}{4}$

7. 若 $1\times2\times3\times\cdots\times99\times100=12^n\cdot M$，其中 M 为正整数，n 是使等式成立的最大正整数，则 m（　　）.

(A) 能被 2 整除，但不能被 3 整除

(B) 能被 3 整除，但不能被 2 整除

(C) 能被 4 整除，但不能被 3 整除

(D) 不能被 3 整除，也不能被 2 整除

8. 求方程 $x+2\{x\}=3[x]$ 的非零解.

9. 求方程 $[3x+1]=2x-\frac{1}{2}$ 的所有根的和.

10. 满足 $[-1.77x]=[-1.77]x$ 的正整数有多少个?

11. 求方程组 $\begin{cases}3[x]+2(y-[y])=7,\\3(x-[x])-[y]=-4\end{cases}$ 的解.

12. 设 m 为给定的自然数,$[a-\sqrt{a}]=m$ 的整数 a 的个数是几个?

B 组

13. 解方程 $[x]^2=x\{x\}\quad(x>0)$.

14. 解不等式 $[x]\{x\}<x-1$.

15. 解方程:

(1) $[x]^2-[x-4]-6=0$;

(2) $x^2-8[x]+7=0$.

16. 求 $\left[\frac{23\times1}{101}\right]+\left[\frac{23\times2}{101}\right]+\left[\frac{23\times3}{101}\right]+\cdots+\left[\frac{23\times99}{101}\right]+\left[\frac{23\times100}{101}\right]$ 的值.

17. 计算

$$[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{n^2-1}].$$

18. k 是正整数,且 $\frac{1001\times1002\times\cdots\times2000}{11k}$ 是整数,求 k 的最大值.

19. 已知 n 为正整数,求方程 $x^2-[x^2]=(x-[x])^2$ 在 $1\leqslant x\leqslant n$ 中根的个数.

20. 试确定 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1990}$ 的小数点后一位数字.

21. 设 a、b 为正整数,$(a,b)=1$,求证:

$$\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{2a}{b}\right]+\cdots+\left[\frac{(b-1)a}{b}\right]=\frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

测 试 题

1. 求方程 $3x + 5[x] - 49 = 0$ 的解.

2. 求 $\left[\sqrt{1\,999^2 + 1} - 2 + \sqrt{3}\right]$ 的值.

3. 解方程组 $\begin{cases}[x + y - 8] = 6 - x, \\ [x - 5] + [y - 4] = 15 - x - y.\end{cases}$

4. 求使 $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ 是质数的正整数 n 的值.

第二十一讲　几何定值问题

一、知识要点和基本方法

在平面几何中有一类问题涉及线段之间的和、差、积、商为定值，涉及角与角之间的数量不变性，涉及几何图形的面积不变性等，这类问题叫几何定值问题.

解决几何定值问题，因需知其定值，常考虑特殊图形下数量的不变性得到定值(定量，定位)；或者运用运动变化观点考察运动变化至极限位置时的定值性，得到一般问题的定值.

一旦得知具体定值，就将定值问题转化为证明题，此时运用证明题的基本思路就可以容易地解决.

二、例题精讲

例1　设 C 为定圆上定弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，P 为 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意一点，且 C 与 P 不在直线 AB 的同侧，求证：$\dfrac{PA+PB}{PC}$ 为定值.

解　先力求探明定值是什么.

由点 P 的任意性，考虑点 P 与 A 重合，则

$$\frac{PA+PB}{PC}=\frac{AB}{AC}.$$

因 A、B、C 为定点，则 AB、AC 为定值，所以题中定值可能是 $\dfrac{AB}{AC}$.

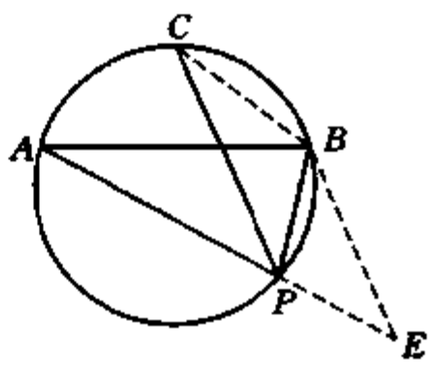


图 21-1

尝试证明 $\dfrac{PA+PB}{PC}=\dfrac{AB}{AC}$.

转化 $PA+PB$，寻求相似三角形.

在 AP 的延长线上取点 E，使 $PE=PB$，连 BE、BC，则有 $\angle BAP=\angle BCP$，$AC=BC$.

因 C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，所以 $\angle APB=2\angle CPB$. 又 $PE=PB$，则 $\angle PBE=\angle PEB$，而 $\angle APB=\angle PBE+\angle PEB$，于是有 $\angle CPB=\angle PEB$，从而推知 $\triangle ABE\backsim\triangle PBC$，得

$$\frac{PE}{PC}=\frac{AB}{BC},$$

即

$$\frac{PE}{PC}=\frac{AB}{AC}=\text{定值}.$$

说明 对于有关线段比例式(积式)的定值问题，恰当地运用三角形相似是有益的.

例 2 设 PQ 是定圆内的一定弦，动弦 PA、PB 分居 PQ 两侧且与 PQ 的夹角保持不变. 求证：直线 AB 有定向.

解 关键在于定向的具体方位.

运用运动变化观点，考虑极限状态.

当 $\angle APQ$ 和 $\angle BPQ$ 越来越小趋近于零时，点 A 和点 B 沿定圆无限地趋近于 Q 点，这时直线 AB 的极限位置就是定圆在定点 Q 处的切线 QT.

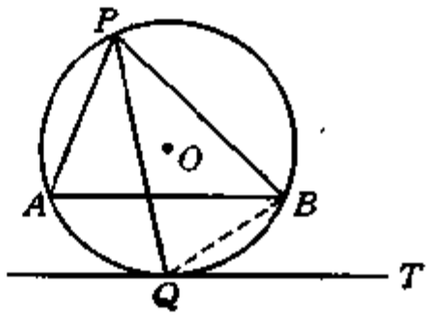


图 21-2

尝试证明 $AB\parallel QT$.

如图 21-2，过 Q 点作定圆的切线 QT，连结 BQ，则 $\angle BQT=\angle QPB$.

又 $\angle APQ=\angle QPB$，$\angle APQ=\angle ABQ$，所以 $\angle QPB=\angle ABQ$，从而有

$$\angle QBT=\angle ABQ,$$

即直线 AB 平行于 QT，而 QT 为定直线. 故直线 AB 有定向.

说明 例 1 的解题关键是利用特殊点(图形)求得可能的定值；例 2 的解题关键是利用点或角或线段变化的极限状态探求得定值. 上述的做法是解决几何定值问题的两个基本的思路.

例 3 任意一直线截平行四边形 $ABCD$，分别交直线 AB、BC、CD、DA 于 E、F、G、H. 求证：圆 EFC 和圆 GHC 的另一交点 Q 必在定直线上.

解 探明定直线位置，想及特殊图形.

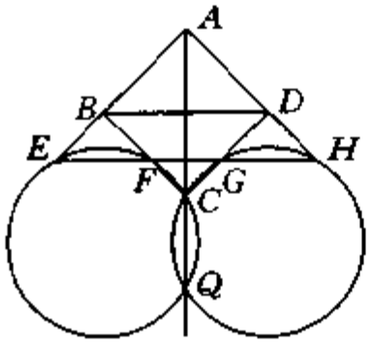


图 21-3(1)

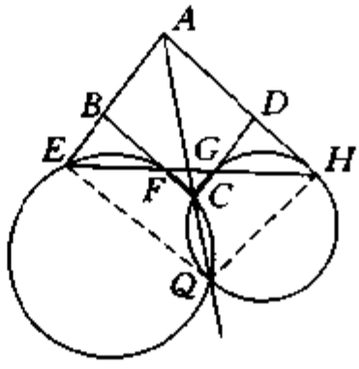


图 21-3(2)

若取平行四边形 $ABCD$ 为菱形，直线取平行于对角线 BD 的位置(如图 21-3(1))，则易知圆 EFC 和圆 GHC 是两个等圆，它们关于直线 AC 对称，点 Q 在直线 AC 上. 由此猜出定直线就是对角线 AC 所在直线.

尝试证明 Q 点在直线 AC 上，即 A、C、Q 三点共线.

连 QE，QF，QC，QA，则由 E、Q、C、F 四点共圆得 $\angle EQC = \angle GFC$，由 G、H、Q、C 四点共圆得 $\angle HQC = \angle FGC$.

又 $\angle BAD = \angle FCG$，则有

$$\begin{aligned}&\angle EQH + \angle BAD\\ =&\angle EQC + \angle HQC + \angle BAD\\ =&\angle GFC + \angle FGC + \angle FCG\\ =&180^\circ,\end{aligned}$$

所以 A、E、Q、D 四点共圆，从而

$$\angle EQA = \angle EHA.$$

因为 $BC \parallel AD$，所以 $\angle EHA = \angle GFC = \angle EQC$，由此推知

$$\angle EQA = \angle EQC.$$

即 A、C、Q 三点共线. 故点 Q 在定直线 AC 上.

例 4 已知等边三角形 ABC 内接于单位圆 O(即半径为 1)，P 是圆 O 上的任意一点，求证：$PA^2 + PB^2 + PC^2$ 为定值.

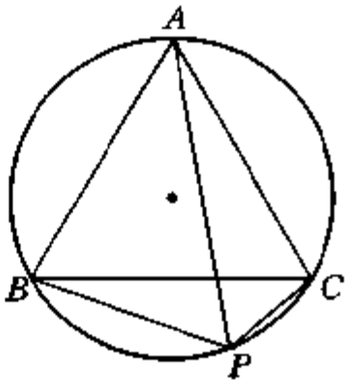


图 21-4

解 如图 21-4，点 P 为 C 点时，$PA^2 + PB^2 + PC^2$ 的定值为 $2BC^2$(定值).

努力证明 $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 2BC^2$.

因为 A、B、P、C 四点共圆，则 $\angle BPC = 180° - \angle A$，又 $\triangle ABC$ 为等边三角形，所以 $\angle BPC = 120°$.

在 $\triangle BPC$ 中，$\cos \angle BPC = -\frac{1}{2}$，则由余弦定理得

$$BC^2 = PB^2 + PC^2 - 2PB \cdot PC \cos \angle BPC,$$

即

$$PB^2 + PC^2 + PB \cdot PC = BC^2.$$

运用托勒密定理得 $BC \cdot PA = PB \cdot AC + PC \cdot AB$. 又 $AB = BC = AC$，所以 $PA = PB + PC$. 从而

$$\begin{aligned} & PA^2 + PB^2 + PC^2 \\ =& (PB + PC)^2 + PB^2 + PC^2 \\ =& 2(PB^2 + PC^2 + PB \cdot PC) \\ =& 2BC^2. \end{aligned}$$

因为圆 O 的半径为 1，所以 $BC = 2 \times 1 \cdot \sin 60° = \sqrt{3}$.

故 $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 2BC^2 = 6$.

例 5 设 O 为三角形 ABC 内任一点，AO、BO、CO 的延长线分

别交对边于 A_1、B_1、C_1，求证：

$$\frac{AO}{AA_1}+\frac{BO}{BB_1}+\frac{CO}{CC_1}$$

为定值.

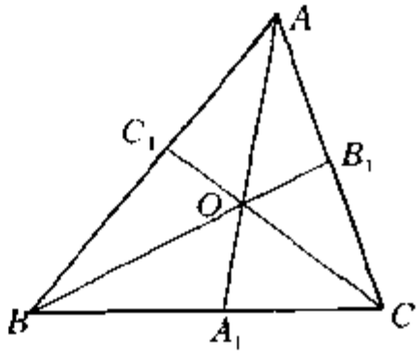


图 21-5(1)

解 由线段比例式可想及面积或三角形相似或圆中性质.

尝试面积转化.

以 AO、$A'A_1$ 为底边的三角形 ABO、三角形 ABA_1 的高相等，则有

$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AA_1B}}=\frac{AO}{AA_1}.$$

同理有

$$\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle AA_1C}}=\frac{AO}{AA_1},$$

于是 $$\frac{AO}{AA_1}=\frac{S_{\triangle AOB}+S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle AA_1B}+S_{\triangle AA_1C}}=\frac{S_{\triangle AOB}+S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle ABC}}.$$

同理可得

$$\frac{BO}{BB_1}=\frac{S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle ABC}},$$

$$\frac{CO}{CC_1}=\frac{S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle ABC}}.$$

从而有

$$\frac{AO}{AA_1}+\frac{BO}{BB_1}+\frac{CO}{CC_1}=\frac{2(S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COA})}{S_{\triangle ABC}}=2.$$

说明 (1) 可以求$\frac{A_1O}{AA_1}$. 因$\triangle OBC$与$\triangle ABC$的底相同，高不同，但它们高之比值等于$\frac{A_1O}{AA_1}$. 所以有

$$\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{A_1O}{AA_1}.$$

如图 21-5(2)，同理 $\frac{B_1O}{BB_1}=\frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle ABC}}$，$\frac{C_1O}{CC_1}=\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABC}}$. 于是

$$\frac{A_1O}{AA_1}+\frac{B_1O}{BB_1}+\frac{C_1O}{CC_1}=1.$$

而 $\frac{AO}{AA_1}=1-\frac{A_1O}{AA_1}$，$\frac{BO}{BB_1}=1-\frac{B_1O}{BB_1}$，$\frac{CO}{CC_1}=1-\frac{C_1O}{CC_1}$，因此有题中结论成立.

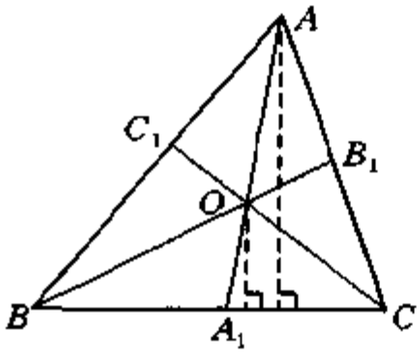


图 21-5(2)

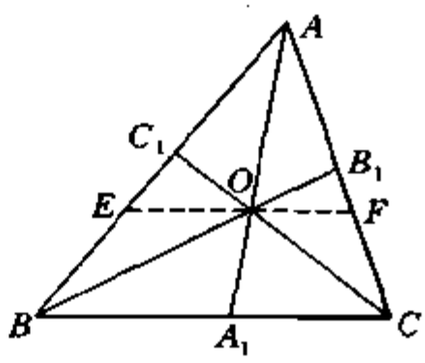


图 21-5(3)

(2) 还可以运用三角形相似.

过 O 作 BC 的平行线，交 AB 于 E，AC 于 F，则 $\triangle AEO\backsim\triangle ABA_1$，$\triangle AOF\backsim\triangle AA_1C$，所以由 $\frac{AO}{AA_1}=\frac{EO}{BA_1}=\frac{OF}{A_1C}$ 得

$$\frac{AO}{AA_1}=\frac{EO+OF}{BC}.$$

又 $\triangle C_1EO\backsim\triangle C_1BC$，则 $\frac{C_1O}{C_1C}=\frac{EO}{BC}$，

即 $\frac{CO}{CC_1}=\frac{BC-EO}{BC}=1-\frac{EO}{BC}$.

同理得 $\frac{BO}{BB_1}=1-\frac{OF}{BC}$.

因此结论成立.

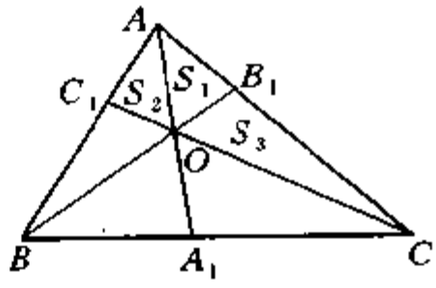
(3) 利用例 5 的结果可以容易解决下列问题：

在例 5 中，已知 $AO=6$，$BO=9$，$OA_1=6$，$OB_1=3$，$CC_1=20$，求三角形 ABC 的面积.

令 $S_{\triangle AOC_1}=S_2$，$S_{\triangle AOB_2}=S_1$，$S_{\triangle OCB_1}=S_3$.

由例 5 的结论

$$\frac{AO}{AA_1}+\frac{BO}{BB_1}+\frac{CO}{CC_1}=2,$$



及 $BO=9$，$OB_1=3$，$AO=6$，$OA_1=6$，$CC_1=20$ 得

$$OC=15,\ O_1C=5,$$

即 $OC=3O_1C$，且有 $OA_1=OA$，$OB=3OB_1$，所以

$$S_{\triangle OBC_1}=\frac{1}{2}OC_1\cdot OB\cdot\sin\angle BOC_1$$

$$=\frac{1}{2}OB_1\cdot OC\cdot\sin\angle B_1OC$$

$$=S_{\triangle OB_1C},$$

即
$$S_{\triangle OBC_1}=S_3.$$

同理得 $S_{\triangle BOA_1}=3S_1$，$S_{\triangle OA_1C}=3S_2$.

又 $AO=OA_1$，则 $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle COA_1}$，$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle A_1OB}$，即 $S_1+S_3=3S_2$，$S_2+S_3=3S_1$，于是 $S_1=S_2$，$S_3=2S_1=2S_2$.

因为 $S_{\triangle COA_1}=3S_2$，$S_{\triangle BOA_1}=3S_1$，所以

$$S_{\triangle COA_1}=S_{\triangle BOA_1},$$

得
$$OC=OB.$$

从而在$\triangle OCB$中，有 $BC^2=2(CO^2+BO^2)-4OA_1^2$，

由余弦定理得

$$\cos\angle COB=\frac{OC^2+OB^2-BC^2}{2\times OB\times OC}=-\frac{3}{5},$$

这样 $\sin\angle COB=\frac{4}{5}$.

$$S_{\triangle COB}=\frac{1}{2}OC\cdot OB\cdot\sin\angle COB=54.$$

故 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle COB}=108$.

例6 已知圆 O 的半径为 R，两弦 $AB\perp CD$ 于 M，求证：$AB^2+(CM-DM)^2$ 为定值.

证明 考虑特殊弦（直径 AB），求定值.

当弦 AB 为直径时，$CM=DM$，则 $AB^2+(CM-DM)^2=4R^2$.

尝试证明 $AB^2+(CM-DM)^2=4R^2$.

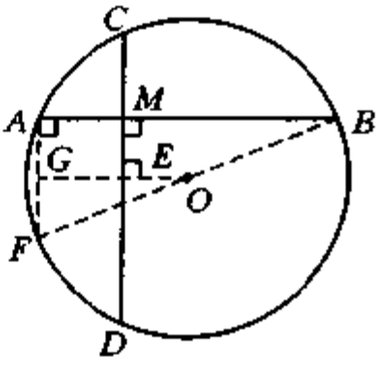


图 21-6

连 BO 并延长交圆 O 于 F，连 AF，则 $BF=2R$，$AB\perp AF$.

取 CD 的中点 E，连 OE 并延长交 AF 于 G，由 O 为圆心，得 $OE\perp CD$，且 $CE=ED=\frac{1}{2}CD$. 又 $CD\perp AB$，所以 $AF\parallel CD$，$OE\parallel AB$，从而得 $OG\perp AF$. 因此有四边形 $AMEG$ 为矩形，得 $AG=EM$.

因 O 为 BF 中点，$OG\parallel AB$，所以 G 为 AF 的中点，即 $AG=\frac{1}{2}AF$，从而 $ME=\frac{1}{2}AF$，即 $AF=2ME$.

于是，

$$\begin{aligned}&AB^2+(CM-DM)^2\\=&AB^2+(CD-2CM)^2\\=&AB^2+4(CE-CM)^2\\=&AB^2+4ME^2\\=&AB^2+AF^2\\=&BF^2=4R^2\text{（定值）}.\end{aligned}$$

命题得证.

例7 已知 A、B 为平面上两定点，C 为平面上位于直线 AB 同侧的一个动点. 分别以 AC、BC 为边，在 $\triangle ABC$ 外作正方形 $CADF$、$CBEG$，设 AB 的中点为 O，DE 的中点为 M，求证：$OM\perp AB$，OM

$= \frac{1}{2}AB$.

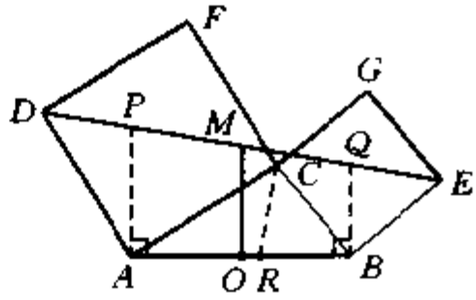


图 21-7

证明 过点 A、B 作 AB 的垂线 AP、BQ，分别交 DE 于 P、Q. 在 AB 上取 $AR = AP$，并连结 CR.

在 $\triangle ARC$ 和 $\triangle APD$ 中，$AC = AD$，$\angle CAR = \angle DAP$，$AR = AP$，所以 $\triangle ARC \cong \triangle APD$，得

$$CR = DP,\ \angle ARC = \angle APD.$$

同理可得 $\triangle BRC \cong \triangle BQE$，有

$$EQ = CR,\ BR = BQ.$$

因此，$EQ = DP$，从而由 $MD = ME$ 得

$$MP = MQ,$$

即 M 是 PQ 的中点. 所以 $OM \parallel AP \parallel QB$，得 $OM \perp AB$，且

$$OM = \frac{1}{2}(PA + QB) = \frac{1}{2}(AR + RB) = \frac{1}{2}AB.$$

说明 (1) 例 7 可以叙述为定值问题：

a. 设 A、B 为平面上两定点，C 为平面上位于直线 AB 同侧的一个动点. 分别以 AC、BC 为边，在 $\triangle ABC$ 外作正方形 $CADF$、$CBEG$，设 AB 中点为 O，DE 的中点为 M，求证：OM 为定长.

b. 设 A、B 为平面上两定点，C 为平面上位于直线 AB 同侧的一个动点. 分别以 AC、BC 为边，在 $\triangle ABC$ 外作正方形 $CADF$、$CBEG$，求证：线段 DE 的中点 M 必在定直线上.

(2) 综合问题 a 与问题 b，我们得到命题 c.

c. 设 A、B 为平面上两定点，C 为平面上位于直线 AB 同侧的一个动点. 分别以 AC、BC 为边，在 $\triangle ABC$ 外作正方形 $CADF$、$CBEG$. 求证：无论点 C 取在直线 AB 同侧的任何位置，线段 DE 的中点 M 的位置不变.

(3) 在例 7 的证明过程中，我们得到了另一结果，就是不论点 C

在直线 AB 的哪一侧，都有 $OA=OB=OM$，即 $\triangle ABM$ 为直角三角形，$\angle AMB=90°$. 因此，例 7 又可引申为如下定值问题.

d. 设 A、B 为平面上两定点，C 为平面上的一个动点. 分别以 AC、BC 为边，在 $\triangle ABC$ 外作正方形 $CADF$、$CBEG$. 求证：线段 AB 在 DE 的中点 M 的视角为常量.

(4) 如果在 $\triangle ABC$ 的各边 AC、CB，向形外作等腰 $\triangle ACD$、等腰 $\triangle CBE$，且顶角 $\angle CAD$ 与顶角 $\angle CBE$ 相等，为 2α（α 为常数）. 那么，我们可以得到类似于问题 a～d 的结论.

练　习　题

A　组

1. 已知 AB 和 CD 为圆 O 的两条定直径，P 是圆周上的任意一点，$PM \perp AB$ 于 M，$PN \perp CD$ 于 N，求证线段 MN 为定长.

2. 设 A 为定圆外一定点，P 为定圆上一定点，由 A 向定圆引任一割线 ABC. 若 PB、PC 的中点分别为 M、N. 求证：直线 MN 恒通过一个定点 Q.

3. 已知从圆 O 外一点 P 作圆 O 的切线 PA、PB，分别切圆 O 于点 A、B，在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任取一点 C，过点 C 作圆 O 的切线，分别交 PA、PB 于点 D 和 E. 求证：(1)$\triangle PDE$ 的周长是定值；(2)$\angle DOE$ 的大小是定值.

4. 设 P 为定角 AOB 平分线上的一定点，以 OP 为弦任作一圆，分别交 OA、OB 于 C、D. 求证：$OC+OD$ 为定值.

5. 设 P 是定角 $\angle MAN$ 的平分线上一定点，过 A、P 两点任作一圆与 $\angle MAN$ 的两边分别交于 B、C 两点，求证：$AB+AC$ 为定值.

6. 如果点 M、N 是梯形 $ABCD$ 上底 AB、下底 CD 上的一点，且 MN 平分此梯形的面积. 证明：MN 必过某定点.

7. 已知经过 $\angle XOY$ 的平分线上任一定点 A，任意作一直线与 OX 和 OY 分别相交于 P、Q. 求证：$\dfrac{1}{OP}+\dfrac{1}{OQ}$ 为定值.

B　组

8. 在四边形 $ABCD$ 中，如果对角线 $AC = BD$，证明：内接于这个四边形且各边分别平行于两对角线的四边形的周长为定值.

9. 如图 21-8，设 PMN 是通过圆 O 圆心的一条割线，PAB 是另一条割线，M、N、A、B 是这两条割线与圆的交点. 求证：$\dfrac{AM \cdot BM}{AN \cdot BN}$ 是一个定值.

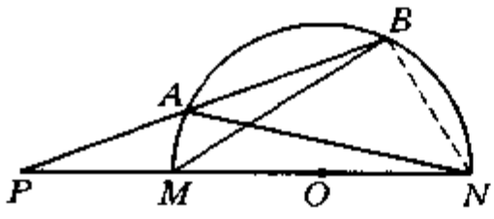


图 21-8

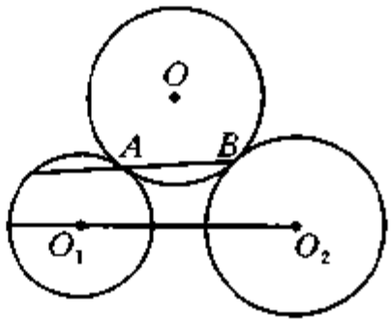


图 21-9

10. 圆 O 外一定直线 AA'，由 A 作圆 O 的切线 AE，AF（E、F 为切点），作 $OC \perp AA'$ 于 C，EF 交 OC 于 P，设圆 O 半径为 r，OC 为定长 d. 试证明：无论 A 在定直线上何处，OP 之长为一定值.

11. 在已知三角形 ABC 的两边 AB、AC 上分别取 D、E，使 $BD = CE$，DE、BC 中点分别为 G、F. 求证：直线 GF 有定向.

12. 设圆 O_1 和圆 O_2 是半径分别为 r_1 与 r_2 的两个定圆，且 $r_1 < r_2$，任一圆 O 分别与圆 O_1、圆 O_2 外切于 A、B. 求证：直线 AB 恒通过一定点，如图 21-9.

测　试　题

1. 设 AD 为已知三角形 ABC 底边 BC 上的中线，P 是线段 BC 上任意一点，自 P 作 AD 的平行线，交直线 AB 及 CA 的延长线于 Q、R. 求证：$PQ+PR$ 为定值.（如图 21-10）

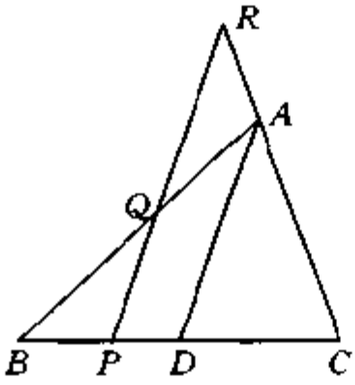


图 21-10

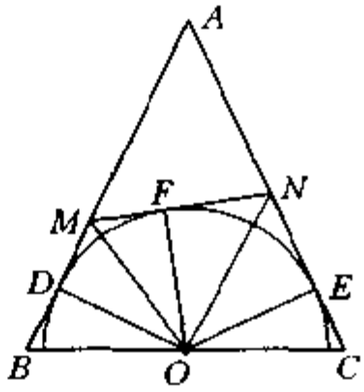


图 21-11

2. 设 O 为等腰三角形 ABC 底边 BC（定长）的中点，以 O 为圆心作半圆与两腰相切于 D、E，过半圆上任一点 F 作半圆的切线，分别交 AB、AC 于 M、N（如图 21-11）. 求证：$BM\cdot CN$ 为定值.

3. 设 A 为定圆 O 上的一定点，在过 A 的切线上任取一点 B，并过线段 AB 的中点 C 作任意割线 CDE，交圆 O 于 D、E，又直线 BD、BE 与圆 O 相交于 P、Q. 求证：弦 PQ 恒有定向.（如图 21-12）

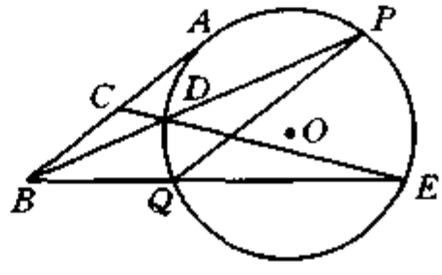


图 21-12

第二十二讲　三角形的“五心”

一、知识要点和基本方法

在三角形里有重心、外心、垂心、内心、旁心，这 5 个重要的点.

重心是三角形的三条中线的点，且各中线被这点分成比为 2∶1 的两部分.

外心是三角形三边的垂直平分线的交点，此点到三角形三个顶点的距离都相等，以此点为圆心，到一顶点的距离为半径的圆经过三角形的三顶点(即是三角形的外接圆).

垂心是从三角形的各顶点向其对边所作的三条垂线的交点. 三角形三个顶点、三个垂足、垂心这 7 个点可以得到 6 个四点圆.

内心是三角形的三条内角平分线的交点. 此点到三角形三边的距离都相等. 以此点为圆心且到三角形一边的距离为半径的圆分别与三角形的三边相切. 三角形的面积等于内切圆半径与三角形周长的一半的积.

旁心是三角形的任意两角的外角平分线和第三个角的内角平分线的交点. 此点到三角形三边所在直线的距离都相等. 以此点为圆心且到三角形一边所在直线的距离为半径的圆分别切三角形一边及其余两边的延长线. 三角形有三个旁心.

关于三角形“五心”问题包含两个基本内容，一是涉及到线共点，二是这五心若干应用. 通过处理三角形“五心”问题，我们可以得到处理线共点问题的基本方法，以及如何运用“五心”处理线段及角之间关系的问题的基本思路.

二、例题精讲

例1 [塞瓦(Ceva)定理及逆定理] 对于$\triangle ABC$内任意一点P,直线AP、BP、CP分别与边BC、CA、AB相交于D、E、F,则

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

反之亦成立,即

在$\triangle ABC$的边BC,CA,AB上分别取点D,E,F.如果$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$,那么直线$AD$,$BE$,$CF$相交于同一点.

证明 如图22-1,过B、C分别作垂线BM、CN,垂足为M、N,则有

$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}=\frac{BM}{CN}.$$

而$\triangle BMD\backsim\triangle CND$,有$\frac{BD}{DC}=\frac{BM}{CN}$,

所以

$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}=\frac{BD}{DC}.$$

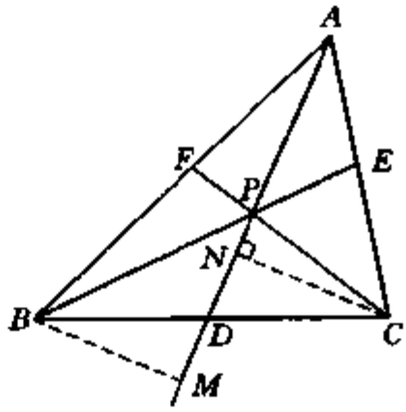


图22-1

同理可得

$$\frac{S_{\triangle BCP}}{S_{\triangle BAP}}=\frac{CE}{EA},$$

$$\frac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle CBP}}=\frac{AF}{BF}.$$

于是有

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

反之证明如下:

设AD和BE相交于P,直线CP,交直线AB于F'.利用上述已证明的结论有

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF'}{F'B}=1.$$

而 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$，所以，

$$\frac{AF'}{F'B}=\frac{AF}{FB},$$

即有 $\frac{AF'+F'B}{F'B}=\frac{AF+FB}{FB}$，

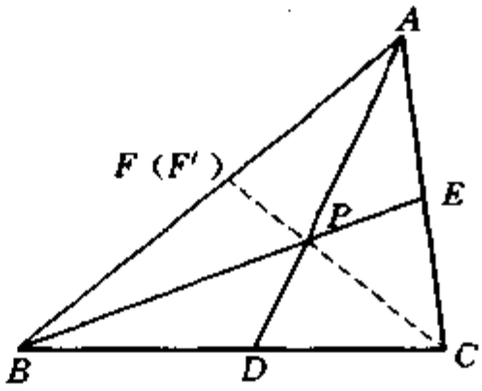


图 22-2

得

$$F'B=FB,$$

即 F 与 F' 重合. 故 AD、BE、CF 相交于同一点 P.

例 2 求证：三角形的三条中线、三条内角平分线和三条高所在的直线分别相交于同一点.

证明 (1) 证明三角形三条中线相交于同一点.

设 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 边 BC、CA、AB 的中点，则有

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{BD}{BD}\cdot\frac{CE}{CE}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$$

由塞瓦定理逆定理知 AD、BE、CF 三线共点.

(2) 证明三角形的三条内角平分线交于同一点.

设 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的内角平分线 AD、BE、CF 与边 BC、CA、AB 的交点，则易知(如图 22-3，过 D 作 $DR\ /\!/\ AC$) $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$，

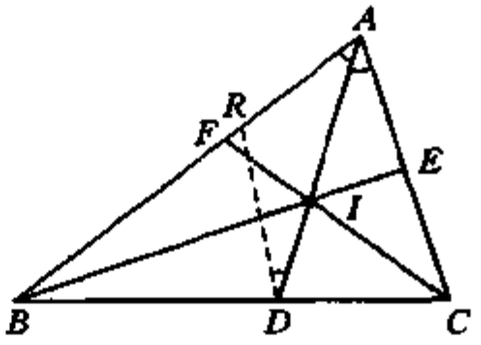


图 22-3

$$\frac{CE}{EA}=\frac{BC}{AB},\frac{AF}{FB}=\frac{AC}{BC},$$

所以

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1,$$

从而知 AD、BE、CF 共点 I.

(3) 证明三条高线相交于同一点 H.

当$\triangle ABC$ 为锐角三角形时，如图 22-4，则有

$BD = AB \cdot \cos B$, $CD = AC \cdot \cos C$, $CE = BC \cdot \cos C$, $AE = AB \cdot \cos A$, $AF = AC \cdot \cos A$, $FB = BC \cdot \cos B$. 于是有

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1,$$

从而知 AD、BE、CF 三线共点.

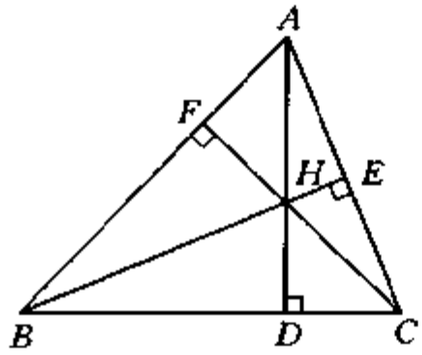


图 22-4

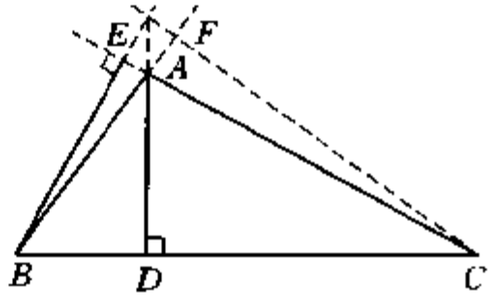


图 22-5

当$\triangle ABC$ 为钝角三角形时，如图 22-5，则

$BD = AB \cdot \cos B$, $CD = AC \cdot \cos C$, $CE = BC \cdot \cos C$, $EA = AB \cdot (-\cos A)$, $AF = AC \cdot (-\cos A)$, $FB = BC \cdot \cos B$. 所以有

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1,$$

从而 AD、BE、CF 三线共点.

当$\triangle ABC$ 为直角三角形时，高 AD、BE、CF 经过直角顶点，即它们共点.

说明 (1) 如果 P 点在$\triangle ABC$ 外，结论也成立.

(2) 对于三角形 ABC 的三条垂直平分线，如图 22-6，设 AC、BC 边的垂直平分线 OE、OD 交于点 O，则有 $OB = OC$, $OA = OC$, 即

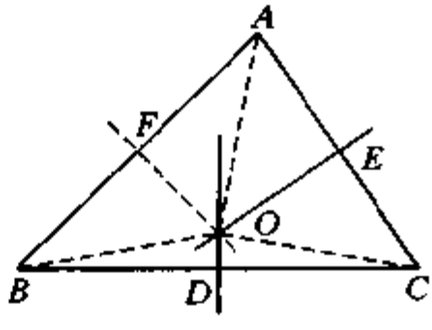


图 22-6

$$OB = OA.$$

取 AB 中点 F，那么在$\triangle AOB$ 中 $OB = OA$，有 $OF \perp AB$，即 OF 为 AB 的垂直平分线. 所以三角形的三条垂直平分线共点.

类似于三角形三内角平分线交于一点的证明可得到三角形的两个角的外角平分线与其余一角的内角平分线交于同一点，即旁心.

(3) 证明线共点的基本思路之一是利用塞瓦定理的逆定理.

(4) 与塞瓦定理的三线共点相对应的三点共线，也有相应的结论，即梅涅劳斯(Menelaus)定理：

如果一直线与$\triangle ABC$ 的三边 AB、BC、CA 或延长线分别相交于 D、E、F，则

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1.$$

其逆定理也成立，并作为证明点共线的基本思路.

此定理及逆定理的证明比较容易，如图 22-7，读者不难得到结论.

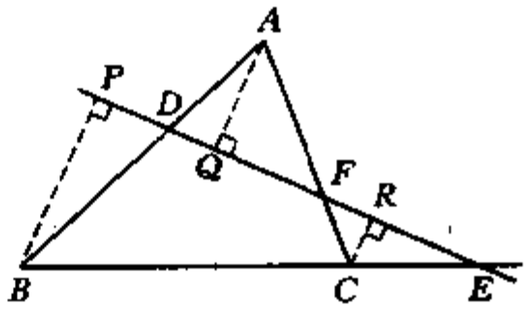


图 22-7

例 3 证明：在任意三角形 ABC 中，垂心到顶点 B 的距离是$\triangle ABC$ 的外接圆圆心到边 AC 距离的两倍.

证明 过 B 作 $BD \perp AC$，过 A 作 $AE \perp BC$，BD 与 AE 交于 H 点，过 O 作 $OP \perp AC$，交直线 AC 于 P 点，连 C、O 并延长交$\triangle ABC$ 的外接圆 O 于 Q 点，连 BQ、AQ.

因为 CQ 是直径，所以 $\angle QAC = 90°$，从而有 $AQ \parallel OP$. 又 O 为 QC 中点，则 $AQ = 2OP$.

由于 $BD \perp AC$，$QA \perp AC$，那么 $AQ \parallel BD$. 又 $\angle QBC = 90°$，$AE \perp BC$，所以 $BQ \parallel AE$.

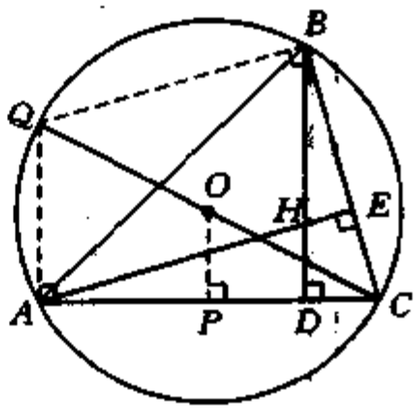


图 22-8

于是四边形 $AQBE$ 为平行四边形，从而有

$$BH = AQ = 2OP.$$

说明 如图 22-9，若令 OH 与 BP 的交点为 G，则由 $BD \parallel OP$ 得 $\frac{BH}{OP} = \frac{BG}{GP} = \frac{GH}{OG} = 2$，即 G 是分 BP 为 2∶1 的点，而 P 为 AC 中点，所以 G 是 $\triangle ABC$ 的重心.

由上述我们得到：任意一个三角形的垂心、重心和外心三点共线，且重心分垂心和外心的连线段为 2∶1. 这条线称为欧拉线.

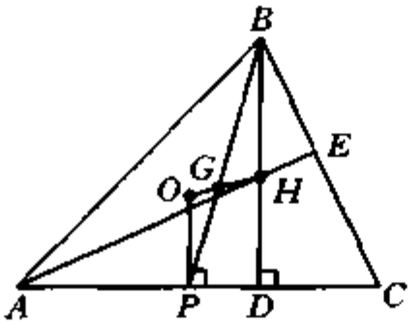


图 22-9

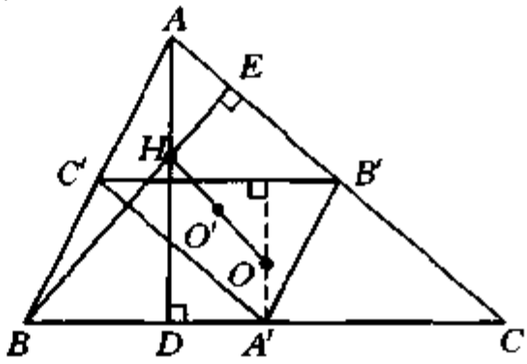


图 22-10

关于欧拉线，我们还可以得到：

中位三角形（原三角形的三边中点连结而成的三角形）的外心是原三角形欧拉线上线段 HO 的中点，且中位三角形的外接圆的半径等于原三角形的外接圆半径的一半.（如图 22-10）

例 4 证明：锐角三角形的垂心与以三垂足为顶点的三角形的内切圆的圆心重合.

证明 如图 22-11(1)，$BD \perp AC$，$AF \perp BC$，$CE \perp AB$，则 E、H、D、A 四点共圆，A、B、F、D 四点共圆，B、F、H、E 四点共圆. 于是有 $\angle FEH = \angle HBF = \angle HAD = \angle HED$. 由此可知 EH 为 $\angle FED$ 的内角平分线. 同理可得 HF 是 $\angle DFE$ 的内角平分线、HD 是 $\angle EDF$ 的内角平分线. 故 H 是 $\triangle DEF$ 的内心. 又 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，因此，结论成立.

说明 (1) 在例 3 中，还可以得到 $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \cos^2 A$，$R = 2R'$，$R$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径，R' 为 $\triangle DEF$ 外接圆半径.

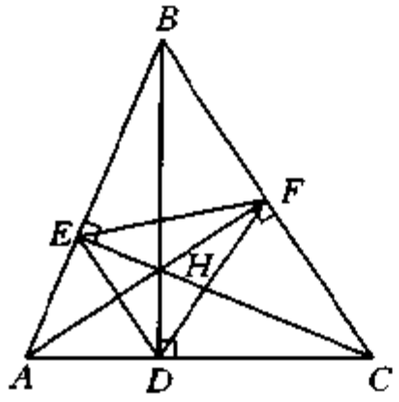


图 22-11(1)

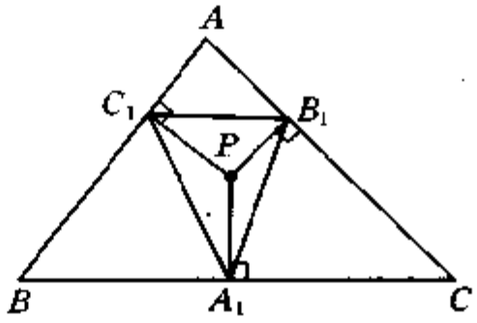


图 22-11(2)

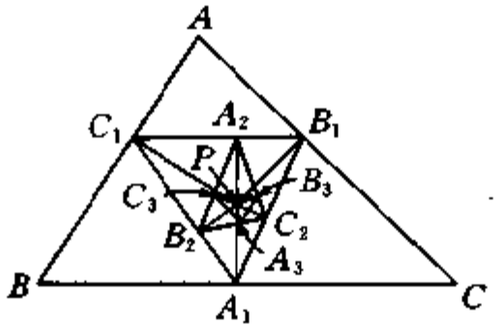


图 22-11(3)

(2) 由 $\triangle ABC$ 三条高线的垂足而构成的三角形 DEF，称为 $\triangle ABC$ 的垂足三角形.

一般地，考虑 $\triangle ABC$ 内任意一点 P，向三边 BC、CA、AB 引垂线 PA_1、PB_1、PC_1，以它们的垂足为顶点的三角形 $A_1B_1C_1$ 称为 $\triangle ABC$ 的由“点 P 生成”的垂足三角形.(如图 22-11(2))

当 P 是垂心或外心时，就得到了垂足三角形或中位三角形.

(3) 由点 P 生成 $\triangle ABC$ 的垂足三角形 $\triangle A_1B_1C_1$(第一个)，由点 P 生成 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂足三角形 $A_2B_2C_2$(称为 $\triangle ABC$ 的第二个垂足三角形)，如此下去，得到第三个垂足三角形 $A_3B_3C_3$，并且有 $\triangle A_3B_3C_3$ 与 $\triangle ABC$ 相似.

这是因为：$PB_1 \perp AB_1$，$PC_1 \perp AC_1$，则 P 在 $\triangle AB_1C_1$ 的外接圆上. 同理 P 也在 $\triangle A_2B_1C_2$，$\triangle A_3B_3C_2$，$\triangle A_2B_2C_1$ 和 $\triangle A_3B_2C_3$ 的外接圆上，所以 $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P = \angle A_2B_1P = \angle A_2C_2P = \angle B_3C_2P = \angle B_3A_3P$.

又 $\angle PAB_1 = \angle PC_1B_1 = \angle PC_1A_2 = \angle PB_2A_2 = \angle PB_2C_3 = \angle PA_3C_3$，则 $\angle C_1AP + \angle PAB_1 = \angle B_3A_3P + \angle PA_3C_3$. 所以 $\angle BAC = \angle B_3A_3C_3$，同理 $\angle ACB = \angle A_3C_3B_3$，$\angle CBA = \angle C_3B_3A_3$. 故 $\triangle ABC \backsim \triangle A_3B_3C_3$. (如图 22-11(3))

(4) 在 1940 年 B. M. Stewart 把上述结论推广为：

任意 n 边形的第 n 个垂足三角形与原 n 边形是相似的.

例 5 如图 22-12，$\triangle ABC$ 的外心为 O，内心为 I，R 和 r 分别为它的外接圆和内切圆的半径，则 $OI^2 = R^2 - r^2$.

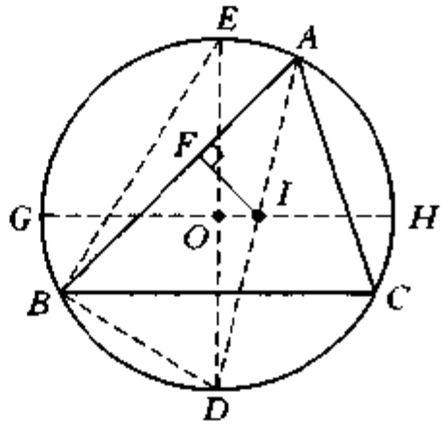


图 22-12

证明 连 AI 交圆 O 于 D，连 DO 反向延长 OD 交圆 O 于 E，连 BD、BE，延长 OI 交圆 O 于 G、H，过 I 作 $IF \perp AB$ 于 F，则 $IF = r$，$DE = 2R$.

因为 $GI \cdot IH = AI \cdot ID$，而 $GI = R + OI$，$IH = R - OI$，所以 $GI \cdot IH = R^2 - OI^2$，从而有

$$R^2 - OI^2 = AI \cdot ID.$$

由 $\angle BAD = \angle BED$，$\angle AFI = \angle EBD = 90°$ 得 $\triangle AFI \backsim \triangle EBD$，则有 $\frac{AI}{DE} = \frac{IF}{BD}$，即 $AI \cdot BD = DE \cdot IF = 2Rr$.

又 $\angle IBD = \frac{1}{2}\angle ABC + \angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAC = \angle BID$，则 $ID = BD$.

因此，$R^2 - OI^2 = AI \cdot BD = 2Rr$，即

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

因为 $OI^2 \geqslant 0$，所以有 $R \geqslant 2r$. 进一步我们可以得到三角形的外接圆的半径不小于内切圆的直径.

说明 上述例 5 的结论，称为欧拉定理.

例 6 如图 22-13，已知三角形 ABC 的内角 A 所包含的旁心为 I_a，内角 B 所含的旁心为 I_b，内角 C 所含的旁心为 I_c，则 $\triangle I_aI_bI_c$ 的垂

足三角形是$\triangle ABC$.

证明 因为CI_c是$\angle ACB$的内角平分线，I_aI_b是$\angle ACB$的外角平分线，所以 $I_cC \perp I_aI_b$.

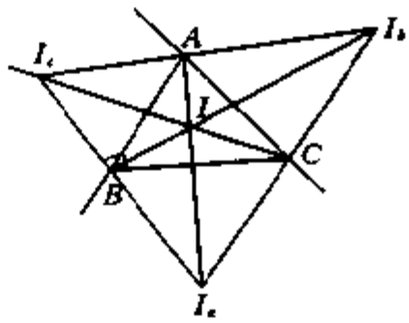


图 22-13

同理 $I_aA \perp I_bI_c$,

$I_bB \perp I_cI_a$.

因此，A、B、C是$\triangle I_aI_bI_c$的三垂足，从而可知$\triangle ABC$是$\triangle I_aI_bI_c$的垂足三角形.

例7 (1)[斯特沃特(Stewart)定理] 在$\triangle ABC$边BC上任取一点D，则 $AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot BD \cdot DC$.

(2) 在$\triangle ABC$中，G是重心，M是平面上任一点，求证：$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$.

证明 (1) 令 $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$, $AD = t$, $BD = u$, $CD = v$, 则欲证结论为(如图 22-14)

$$c^2v + b^2u - t^2a = auv.$$

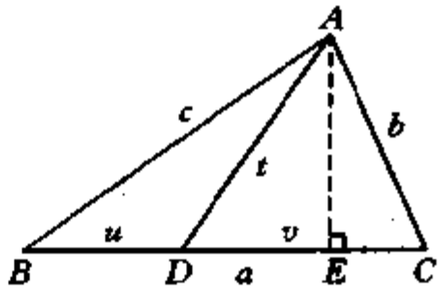


图 22-14

过A作$AE \perp BC$于E，设$DE = x$，则

$$AE^2 = b^2 - (v - x)^2 = c^2 - (u + x)^2 = t^2 - x^2,$$

即
$$\begin{cases} t^2 = b^2 - v^2 + 2vx, \\ t^2 = c^2 - u^2 - 2ux. \end{cases}$$

于是就有 $(u + v)t^2 = b^2u - v^2u + c^2v - u^2v$,

即 $c^2v + b^2u - t^2a = auv$.

故 $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD \quad t^2a = BC \cdot BD \cdot DC$

(2) 如图 22-15，$\triangle ABC$的三条中线AD、BE、CF交于重心G，不妨设M在$\triangle GDC$中.

在$\triangle AMD$中，对G运用(1)中的结论，就有

$$MA^2 \cdot GD + MD^2 \cdot AG - MG^2 \cdot AD = AD \cdot AG \cdot GD.$$

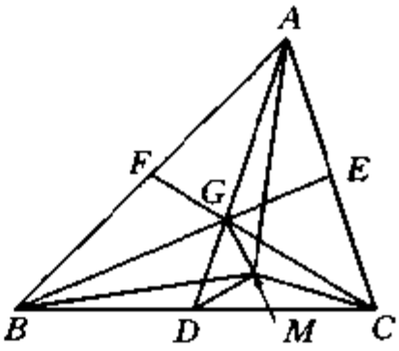


图 22-15

因为$DG = \frac{1}{3}AD$，$AG = \frac{2}{3}AD$，所以有

$$MG^2 = \frac{1}{3}MA^2 + \frac{2}{3}MD^2 - \frac{2}{9}AD^2.$$

在$\triangle MBC$中，对D运用(1)中结论及$BD = DC = \frac{1}{2}BC$，得

$$MD^2 = \frac{1}{2}(MB^2 + MC^2) - \frac{1}{4}BC^2.$$

在$\triangle GBC$中，对D运用(1)中结论有

$$GD^2 = \frac{1}{2}(GB^2 + GC^2) - \frac{1}{4}BC^2.$$

于是，$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{2}BC^2 - \frac{2}{3}AD^2$

$$= (MA^2 + MB^2 + MC^2) - (GB^2 + GC^2) + 2GD^2 - \frac{2}{3}AD^2$$

$$= (MA^2 + MB^2 + MC^2) - (GA^2 + GB^2 + GC^2).$$

即 $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2.$

说明 (1) 我们运用斯特沃特定理可得到中线长公式，令$u = v = \frac{1}{2}a$，$AD = m_a$，则

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

当 AD 为内角平分线时，就有 $\frac{u}{v}=\frac{c}{b}$，而 $u+v=a$，则 $u=\frac{ac}{b+c}$，$v=\frac{ab}{b+c}$. 令 $AD=t_a$，那么有

$$t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},$$

这里 $2p=a+b+c$，这就是内角平分线长公式.

当 AD 是 $\triangle ABC$ 的高时，$AD^2=b^2-u^2=c^2-v^2$，及 $u+v=a$ 得 $u=\frac{1}{2a}(a^2-b^2+c^2)$，$v=\frac{1}{2a}(a^2+b^2-c^2)$. 令 $AD=h_a$，则 $h_a=\frac{1}{2a}\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}$，这就是三角形的高长公式.

(2) 由例 7(2)的结论可知，当 M 异于 G 时，总有 $MA^2+MB^2+MC^2>GA^2+GB^2+GC^2$. 由此我们得到结论：

到三角形三顶点距离的平方和为最小的点是三角形的重心.

例 8 设 H 是锐角三角形 $\triangle ABC$ 的垂心，由 A 向以 BC 为直径的圆作切线 AP、AQ，切点分别为 P、Q，求证：P、H、Q 三点共线.

证明 BC 边上高线为 AE，AC 与 $\odot O$ 的交点为 F，连 BF，则 $BF\perp AC$.

连 PQ 交 AE 于 H_0，那么欲证 P、H、Q 三点共线，转化为证明 H_0 与 H 重合，这样就仅需证明 $FH_0\perp AC$.

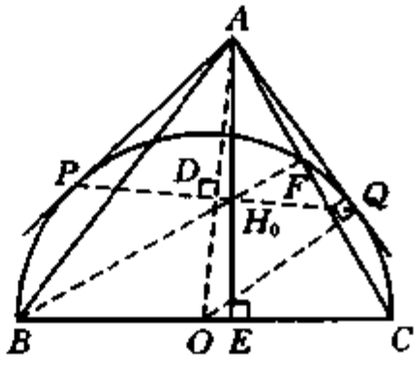


图 22-16

如图 22-16，连 OQ，则 $OQ\perp AQ$，$PQ\perp OA$，于是在直角三角形 AQO 中，$AQ^2=AD\cdot AO$.

又 $\angle QDO=\angle AEO=90°$，则 O、D、H_0、E 四点共圆，得

$$AD\cdot AO=AH_0\cdot AE.$$

又由切割线定理得

$$AQ^2=AF\cdot AC,$$

所以 $AH_0 \cdot AE = AF \cdot AC$，从而推知 H_0、E、C、F 四点共圆. 因此有

$$\angle H_0EC + \angle H_0FC = 180°,$$

而 $\angle H_0EC = 90°$，由此推得 $\angle H_0FC = 90°$，

即 $H_0F \perp AC$. 又 $BF \perp AC$，故 H_0 在 BF 上，即 H_0 是 $\triangle ABC$ 的垂心，得 $H_0 = H$.

因而，结论成立.

说明 在例 8 中，如果 AB 交 $\odot O$ 于 G，过 G、F 分别作圆 O 的切线交于 R，那么就有 $AR \perp BC$.

这个结论的成立，仅需证明 R 在 AH 上，且为 AH 的中点. 考虑运用同一法及含 H 的四点共圆.（读者可自行证明）

我们还有如下结论：

在例 8 中，如果过 R、Q 分别作 $RS \perp BC$、$QM \perp BC$ 交 BC 于 S、M，连 RM、QS 并交于点 N，那么 $AN \perp BC$.

例 9 如图 22-17，设 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，D、E、F 分别是 $\odot O$ 与 BC、CA、AB 的切点.

（1）若 DO 的延长线与 EF 相交于 K，求证：直线 AK 平分 BC；

（2）已知 $BC = a$，$AC = b$，$AB = c$，且 $b > c$，求 $S_{\triangle AMK} : S_{\triangle BKC}$.

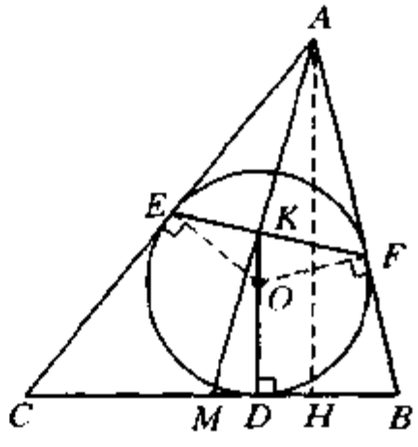


图 22-17

证明 （1）如图 22-17，设 AK 与 BC 相交于 M，连结 OE、OF.

在等腰 $\triangle EOF$ 中，由 O、E、C、D 四点共圆得 $\angle EOK = \angle C$，由 O、F、B、D 四点共圆得 $\angle FOK = \angle B$. 则由正弦定理得

$$\frac{FK}{\sin \angle FOK} = \frac{OF}{\sin \angle FKO},$$

$$\frac{EK}{\sin \angle EOK} = \frac{OE}{\sin \angle EKO},$$

而 $\sin\angle EKO=\sin\angle FKO$，于是

$$\frac{FK}{EK}=\frac{\sin B}{\sin C}.$$

同理

$$\frac{FK}{\sin\angle FAK}=\frac{EK}{\sin\angle KAE},$$

则

$$\frac{\sin B}{\sin\angle FAK}=\frac{\sin C}{\sin\angle KAE},$$

所以，

$$\frac{BM}{CM}=\frac{\frac{BM}{AM}}{\frac{CM}{AM}}=\frac{\frac{\sin\angle FAK}{\sin B}}{\frac{\sin\angle KAE}{\sin C}}=1,$$

即

$$BM=CM.$$

(2) 作 $AH\perp BC$ 于 H，由 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BKC}}=\frac{AH}{DK}$ 及 $\triangle AHM\backsim\triangle KDM$

得

$$\frac{AH}{KD}=\frac{HM}{MD},$$

则

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BKC}}=\frac{HM}{MD}.$$

又 $HM=BM-BH=\frac{1}{2}BC-AB\cdot\cos B$，而 $AB=c$，$AC=b$，$BC=a$，则有 $HM=\frac{a}{2}-c\cos B=\frac{a}{2}-c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{b^2-c^2}{2a}$. 而 $DM=BM-BD=\frac{a}{2}-\frac{a+c-b}{2}=\frac{b-c}{2}$.

所以

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BKC}}=\frac{b+c}{a}.$$

说明 在例 9 中，把“内切圆”改为“旁切圆”，同样有上述结论成立，就是 1991 年四川省竞赛题.

最后给出点共线的一个例子.

例 10 $\triangle ABC$ 的外接圆上任意一点 P，过 P 作三边所在直线的垂线，求证此三垂足共线.

已知 P 为$\triangle ABC$ 外接圆上一点，$PD \perp BC$，$PE \perp AB$，$PF \perp CA$，D、E、F 为垂足.

求证：D、E、F 三点共线.

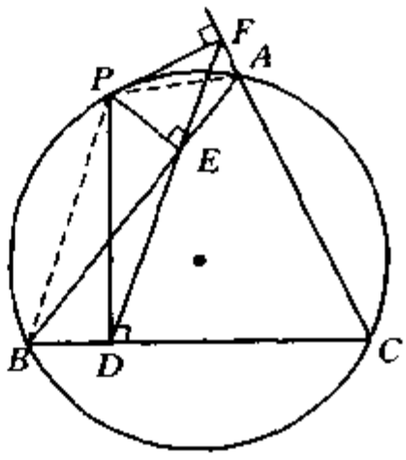


图 22-18(1)

证明 如图 22-18(1)，连 PA、PB.

尝试证明 $\angle BED = \angle FEA$.

因为 $PD \perp BC$，$PE \perp AB$，$PF \perp CA$，所以 B、D、E、P，A、E、P、F 四点分别共圆. 从而有 $\angle BED = \angle BPD$，$\angle FEA = \angle FPA$.

又 $\angle PBD = 90° - \angle BPD$，$\angle FAP = 90° - \angle FPA$，且 A、C、B、P 四点共圆，则 $\angle FAP = \angle PBD$. 所以有 $\angle BPD = \angle FPA$，从而 $\angle BED = \angle FEA$. 故 D、E、F 三点共线.

说明 (1) 人们称此线为西姆松(L. Simson)线.

(2) 容易知道外接圆上任意一点的西姆松线平分该点和垂心的连线.

(3) 例 10 中，将“$\angle PEB = \angle PFA = \angle PDB = 90°$”改为“$\angle PEB = \angle PFA = \angle PDB$”，结论成立吗？

我们有

P 为$\triangle ABC$ 外接圆上一点，过 P 作三边的斜线 PD、PE、PF，且有 $\angle PDC = \angle PEA = \angle PFM$，则 D、E、F 三点共线. [如图 22-18(2)]

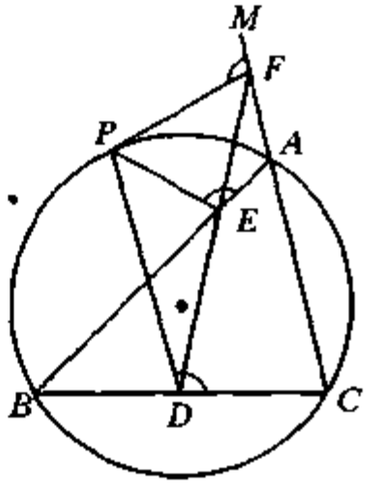


图 22-18(2)

练　习　题

A　组

1. 平面上有 P、Q 两点，以 P 为外心、Q 为内心的三角形的数量为(　　).

(A) 只能画出 1 个　　(B) 可以画出 2 个

(C) 最多画出 3 个　　(D) 能画无数个

2. 锐角$\triangle ABC$ 的三边是 a、b、c，它的外心到三边的距离分别是 m、n、p，那么，$m:n:p=$(　　).

(A) $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$　　(B) $a:b:c$

(C) $\cos A:\cos B:\cos C$　　(D) $\sin A:\sin B:\sin C$

3. 如图 22-19，点 O 在锐角$\triangle ABC$ 内部，过 O 作 $EF\ //\ BC$，$PQ\ //\ CA$，$HG\ //\ AB$. 当 $\frac{EF}{BC}=\frac{PQ}{CA}=\frac{HG}{AB}$ 时，O 点是$\triangle ABC$ 的(　　).

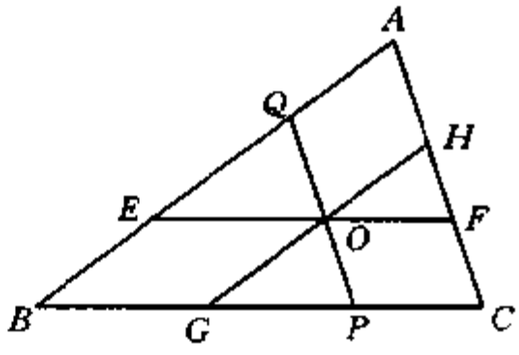


图 22-19

(A) 垂心　　(B) 重心

(C) 外心　　(D) 内心

4. 设 O 是等边三角形 ABC 所在平面上一点，且使得$\triangle ABO$、$\triangle OBC$、$\triangle OCA$ 是等腰三角形，满足这种条件的 O 点共有____个.

5. 如图 22-20，D 是$\triangle ABC$ 的内心，E 是$\triangle ABD$ 的内心，F 是$\triangle BDE$ 的内心. 若$\angle BFE$ 的度数是整数，则$\angle BFE$ 至少是____.

6. $\triangle ABC$ 中，AC、AB 边上的中线分别是 BD、CE，设 BD、CE 交于 G. 求证：$S_{\triangle BCG}=S_{ADGE}$.

7. O 为$\triangle ABC$ 的外心，AO 延长线交外接圆于 A_1，BO 延长线交外接圆于 B_1，CO 延长线交外接圆于 C_1，证明：

$$S_{\triangle ABC_1} + S_{\triangle BCA_1} + S_{\triangle CAB_1} = S_{\triangle ABC}.$$

8. 在凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAC = 25°$，$\angle BCA = 20°$，$\angle BDC = 50°$，$\angle BDA = 40°$，设四边形的对角线 AC、BD 交于 P，求 $\angle CPD$ 的度数.

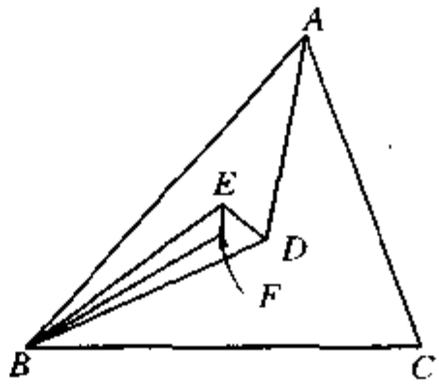


图 22-20

9. 设 M 是 $\triangle ABC$ 边 BC 的中点，若 $\angle BAM = \angle C$，$\angle MAC = 15°$，求 $\angle C$ 的度数.

10. M 是等腰 $\triangle ABC$ 底边上任意一点，过点 M 分别作 $MP \parallel CA$ 交 AB 于点 P，$MQ \parallel AB$ 交 AC 于点 Q. 设 M' 是点 M 关于直线 PQ 的对称点. 求证：点 M' 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

B 组

11. 梯形 $ABCD$ 中，$BC \parallel DA$，P 为两条对角线交点，记 $\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCD$、$\triangle PDA$ 的内切圆半径分别为 r_1，r_2，r_3，r_4，且 $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_3} = \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_4}$. 求证：$AB + CD = BC + DA$.

12. 如图 22-21，M、N、P 分别为正三角形 $\triangle ABC$、$\triangle BFE$、$\triangle EDC$ 的重心. 求证：$\triangle MNP$ 为正三角形.

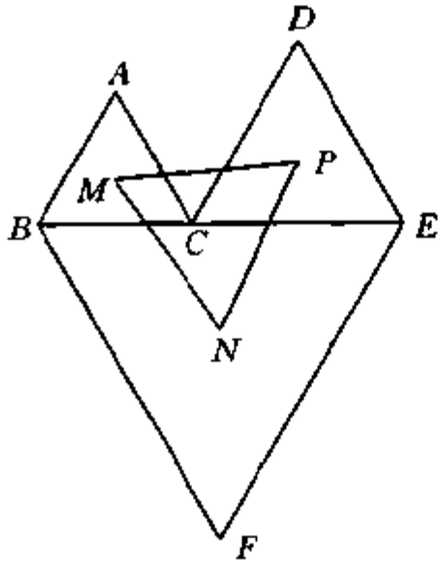


图 22-21

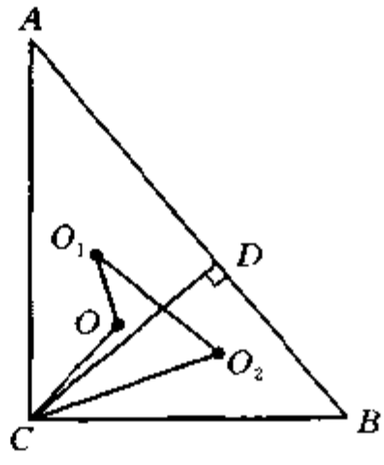


图 22-22

13. 如图 22-22，已知直角$\triangle ABC$中，CD是斜边AB上的高，O、O_1、O_2分别是$\triangle ABC$、$\triangle ACD$、$\triangle BCD$的内角平分线的交点. 求证：(1) $O_1O \perp CO_2$. (2) $OC = O_1O_2$.

14. 设I_1、I_2、I_3分别为$\triangle ABC$的边BC、CA、AB外的旁心，A_1、B_1、C_1分别为$\triangle I_1BC_1$、$\triangle I_2CA$、$\triangle I_3AB$的外心. 求证：$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$有相同的外心.

15. 已知O、I分别为$\triangle ABC$的外心和内心，AD是BC边上的高. I在线段OD上. 求证：$\triangle ABC$外接圆半径等于BC边上的旁切圆半径.

16. 已知$\triangle ABC$中，高AD. 在其内部，过$\triangle ABD$、$\triangle ACD$的内心I_1、I_2引直线分别交AB、AC于E、F.

(1) 若$\angle BAC = 90°$，则$AE = AF$.

(2) 若$AE = AF$，则$\angle BAC = 90°$也成立吗？若仍成立，请证明；若不成立，请说明理由，并指出不成立的情形.

测　试　题

1. 已知$\triangle ABC$的两条高AD、BE相交于H，延长AD交外接圆于K，求证：$HD = DK$.

2. 若过三角形内心和重心的直线平行于一边，则三角形其他两边之和为这一边的2倍.

3. 已知$\triangle ABC$中，内心I、外心O、垂心H互不重合，但在一直线上. 求证：$\triangle ABC$是等腰三角形.

4. 如图22-23，在直角$\triangle ABC$中，CD为斜边AB上的高，O、O_1、O_2分别为$\triangle ABC$、$\triangle ACD$、$\triangle BCD$的内心. 连结CO_1延长交AB于M，连CO_2延长交AB于N. 求证：$OM \perp ON$.

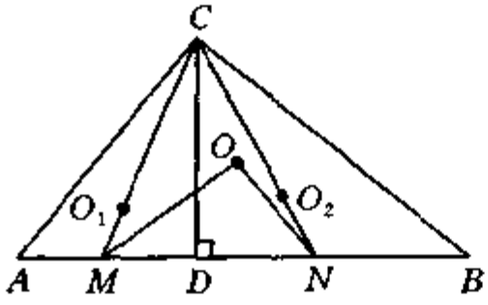


图 22-23

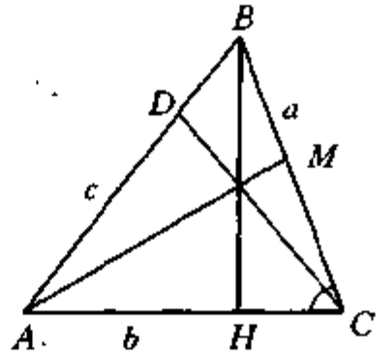


图 22-24

5. 已知如图22-24，$\triangle ABC$的中线AM、高BH和角平分线CD相交于一点，求$\triangle ABC$三边a、b、c的关系.

第二十三讲　几何不等式

一、知识要点和基本方法

几何中的若干量的不等关系式叫做几何不等式.

处理几何不等式问题须利用基本的不等关系.

两点间连接两点的线段最短是基本的不等关系.由这个基本不等关系可知平面上任意三点中,一点到其余两点的线段和大于等于这两点的连线段.当一点介于这两点连线段上时等号成立.因此,我们就有:

三角形中,任意两边之和大于第三边,即有任意两边之差小于第三边.

从而有:

平面上一个定点与一条定直线上各点所连接的线段中,垂线最短.

三角形中,外角大于和它不相邻的内角.

三角形中,大角对大边,大边对大角.

两组边对应相等的两个三角形中,夹角(第三边)大的第三边(夹角)也大.

几何不等式主要有线段不等式、角的不等式及面积不等式.

二、例题精讲

例 1　如图 23-1,在$\triangle ABC$中,$\angle B=2\angle C$,求证:$AC<2AB$.

证明　力求把已知的关系集中到一个三角形中.

延长 CB 至 D,使得 $BD=AB$,则 $\angle BDA=\angle BAD$,且 $\angle ABC=2\angle ADB$.又 $\angle ABC=2\angle ACB$,

所以　$\angle ADB = \angle ACB$,

所以　　$AD = AC$.

在$\triangle ABD$中,有 $BD + AB > AD$, 故 $2AB > AD$.

即 $AC < 2AB$.

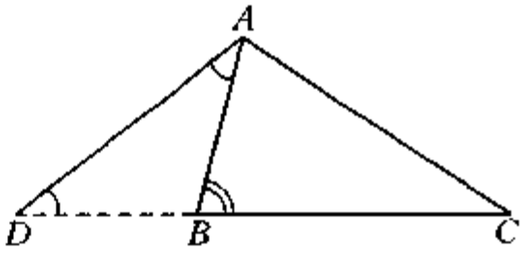
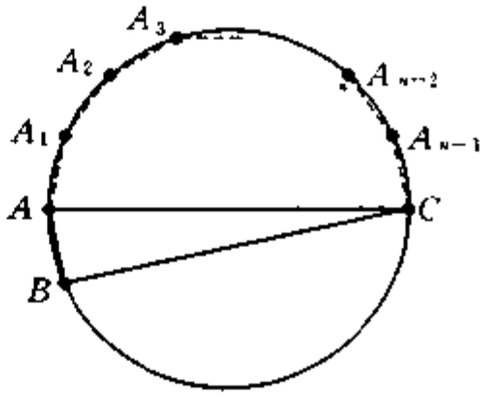


图 23-1

说明　(1) 把欲证的不等量尽量集中到一个三角形(或者两个具有紧密关系的三角形)中,利用三角形中的线段不等关系(或角的不等关系)而解决之. 这是常用的思路之一.

(2) 此题中"$\angle B = 2\angle C$"可以改为"$\angle B = n\angle C$"吗? 我们有:

在$\triangle ABC$中,$\angle B = n\angle C$ (n 是大于 1 的正整数),求证: $AC \leqslant nAB$.

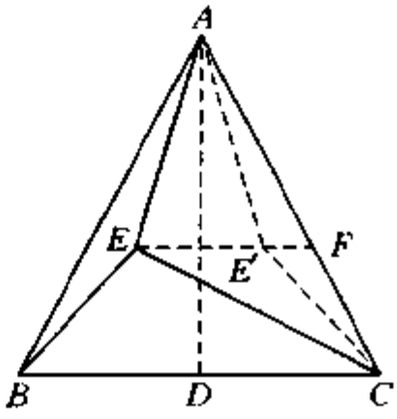


如图 23-2

这是因为:在三角形 ABC 的外接圆上,将$\angle B$所对的弧 $\overset{\frown}{AC}$ n 等分,连结相邻分点得 AA_1, A_1A_2, …, $A_{n-2}A_{n-1}$, $A_{n-1}C$ 共 n 条彼此相等的弦,这些弦都与 AB 相等. 由折线 $AA_1A_2A_3\cdots A_{n-1}C$ 的长大于 AC,可知 $nAB > AC$.

这是将不等关系集中到多边形(或圆)中.

例 2　如图 23-3,在等腰三角形 ABC 中, $AB = AC$, BC 的中点为 D, E 为 $\triangle ABD$ 内任意一点,连 AE、BE、CE,求证: $\angle AEB > \angle AEC$.



如图 23-3

证明　把欲证不等关系集中到一个三角形中.

怎么办? 考虑对称.

作点 E 关于 AD 的对称点 E',连 AE'、$E'C$、EE',并延长 EE' 交 AC 于 F.

因为 E 在$\triangle ABD$ 内，$AB=AC$，D 为 BC 中点，所以 $\triangle AEB\cong\triangle AE'C$，得 $\angle AEB=\angle AE'C$.

又 $\angle AE'F=\angle AEF+\angle EAE'>\angle AEF$，$\angle CE'F=\angle CEF+\angle ECE'>\angle CEF$，所以 $\angle AE'F+\angle CE'F>\angle AEF+\angle CEF$，即 $\angle AE'C>\angle AEC$.

故 $\angle AEB>\angle AEC$.

说明 考虑对称性，把角或线段集中到一个易讨论图形中去，这也是处理几何不等式的思路之一.

例 3 求证：三角形大边与这边上的高之和大于或等于小边与其边上的高之和.

已知$\triangle ABC$ 中，$AB<BC$，$AD\perp BC$ 于 D，$CE\perp AB$ 于 E. 证明：$BC+AD>AB+CE$.（如图 23-4）

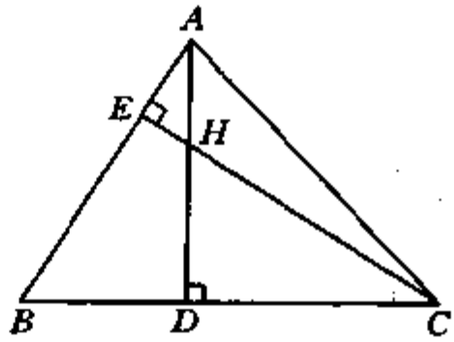


图 23-4

证明 图中有相似线段比，可尝试考虑比值大于 1.

因为 $CE\perp AB$，$AD\perp BC$，所以 $\triangle CBE\backsim\triangle ABD$，得

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CE},$$

即

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{CE}=\frac{BC-AB}{CE-AD}.$$

而 $AB>AD$，于是

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{CE}=\frac{BC-AB}{CE-AD}>1.$$

又 $BC>AB$，即 $BC-AB>0$，则 $CE-AD>0$.

所以有 $BC-AB>CE-AD$，

即

$$BC+AD>AB+CE.$$

说明 利用三角形相似，得比例线段之间比值大于 1（小于 1），

而证得不等式，这是解决几何不等式问题的一条思路.

在例 3 中，还可以在边 BC 上取点 A'，使得 $BA'=BA$. 过点 A' 作 $A'F\perp CE$ 交 CE 于点 F，过 A' 作 $A'G\parallel CE$ 交 BA 于 G.（如图 23-5）

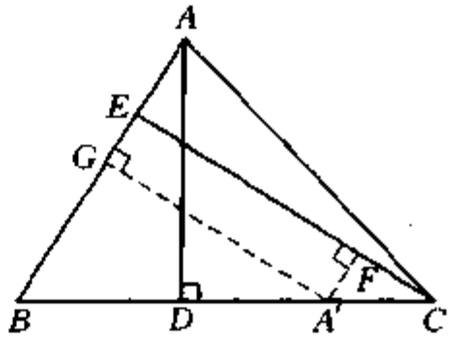


图 23-5

易知 $\triangle ABD\cong\triangle A'BG$，得 $AD=A'G=FE$. 而 $A'C>CF$，故有

$$BC-AB>CE-AD.$$

这就是作差将不等量集中到一个直角三角形中，且利用斜边大于直角边.

例 4 证明：任何三角形三个内角平分线的乘积必小于三边的乘积.

如图 23-6，三角形 ABC 的三边 AB、BC、CA 分别为 c、a、b. $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的内角平分线，长分别为 t_a、t_b、t_c. 证明：$t_at_bt_c<abc$.

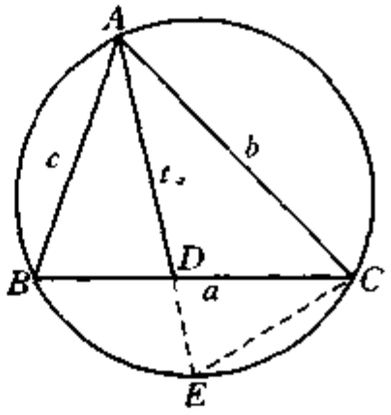


图 23-6

证明 考虑 t_a 与 a、b、c 之间的相等关系.

作 $\triangle ABC$ 的外接圆 O，延长 AD 交圆 O 于 E 点. 因为 AD 为 $\angle A$ 的平分线，所以 E 为弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点.

又 $\angle ABC=\angle AEC$，$\angle BAE=\angle EAC$，则 $\triangle ABD\backsim\triangle AEC$，

得
$$\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC},$$

即
$$AE\cdot t_a=bc.$$

而 $AE>AD=t_a$，所以 $t_a^2<bc$.

同理得 $t_b^2<ac$，$t_c^2<ab$.

于是有

$$t_a^2\cdot t_b^2\cdot t_c^2<a^2b^2c^2,$$

即 $$t_a t_b t_c < abc.$$

例 5 已知三条线段的长分别为 a、b、c，且 $a \leqslant b \leqslant c$，若这三条线段能构成三角形，则有 $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3$.

反之，亦成立.

证明 因为

$$\begin{aligned} &a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc - (a^3 + b^3 + c^3) \\ =&a[(b-c)^2 - a^2] + b[(c-a)^2 - b^2] + c[(a+b)^2 - c^2] \\ =&(a+b-c)(ab - ac - a^2 - bc + ab - b^2 + ac + bc + c^2) \\ =&(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b), \end{aligned}$$

由三角形两边之和大于第三边可知

$$a+b-c>0,\ c+a-b>0,\ c-a+b>0,$$

于是有

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3.$$

反之，由 $0 < a \leqslant b \leqslant c$ 知 $b+c-a>0$，$c+a-b>0$，所以由 $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc - (a^3 + b^3 + c^3) = (a+b-c)(c+a-b)(c-a+b) > 0$ 知 $a+b>c$.

故这三条线段在满足上述不等式的条件下可以构成三角形.

说明这里证明几何不等式成立，利用了代数变形、因式分解.

例 6 求证：在凸四边形 $ABCD$ 中，有

$$\begin{aligned} &AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \\ \geqslant &AC^2 + BD^2. \end{aligned}$$

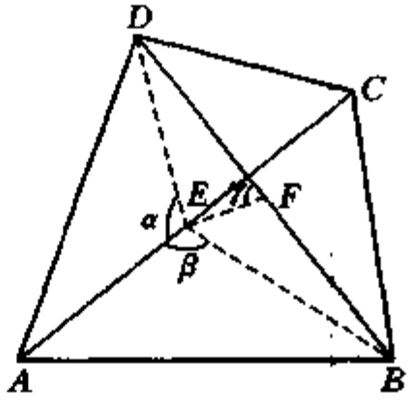


图 23-7

证明 想到线段平方和，努力运用余弦定理.（如图 23-7）

尝试等分对角线.

取 AC 的中点 E，BD 的中点 F，令 $\angle AED=\alpha$，$\angle AEB=\beta$，$\angle DFE=\gamma$，则由余弦定理得

$$DA^2=AE^2+DE^2-2AE\cdot DE\cdot\cos\alpha,$$

$$CD^2=EC^2+DE^2-2EC\cdot DE\cos(180^\circ-\alpha),$$

而 $AE=EC=\frac{1}{2}AC$ 及 $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$，所以

$$DA^2+CD^2=\frac{1}{2}AC^2+2DE^2.$$

同理可得 $$AB^2+BC^2=\frac{1}{2}AC^2+2BE^2,$$

$$2(BE^2+DE^2)=BD^2+4EF^2,$$

于是有

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4EF^2.$$

因为 $EF\geqslant 0$，所以

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2\geqslant AC^2+BD^2.$$

说明 (1) 当 $EF=0$ 时，$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$，且有四边形 $ABCD$ 为平行四边形. 因此我们有结论：

平行四边形的四边长平方和等于对角线长的平方和.

反过来，若四边形的四边长平方和等于对角线长的平方和，则此四边形为平行四边形.

(2) 运用余弦(或正弦)定理得到几何线段的不等式，是其思路之一.

例7 (史坦纳(Steiner)定理) 设点 M 是$\triangle ABC$ 内一点，使得

$$\frac{\sin\angle BMC}{a}=\frac{\sin\angle CMA}{b}=\frac{\sin\angle AMB}{c},$$

又设 p 为$\triangle ABC$ 内任意一点，求证：

$$aPA+bPB+cPC\geqslant aMA+bMB+cMC,$$

其等号仅当 P 与 M 重合时成立.

证明 尝试面积转换.

过 A、B、C 分别作 MA、MB、MC 的垂线分别交于 D、E、F，如图 23-8，则有 B、M、C、D，M、A、E、C，M、B、F、A 四点共圆，所以 $\sin\angle BDC = \sin\angle BMC$，$\sin\angle AED = \sin\angle CMA$，$\sin\angle BFA = \sin\angle AMB$.

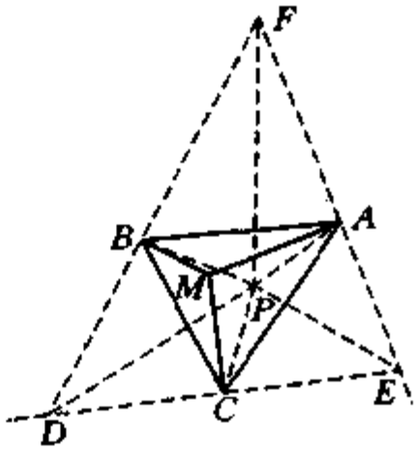


图 23-8

由正弦定理及题设的比例式，得

$$\frac{EF}{\sin D} = \frac{DE}{\sin F} = \frac{DF}{\sin E},$$

则

$$\frac{EF}{a} = \frac{DF}{b} = \frac{DE}{c} = k(k > 0).$$

由面积公式得

$$\begin{aligned} S_{\triangle DEF} &= S_{\triangle FME} + S_{\triangle FMD} + S_{\triangle DME} \\ &= \frac{1}{2}(EF \cdot MA + FD \cdot MB + DE \cdot MC) \\ &= \frac{k}{2}(a \cdot MA + b \cdot MB + c \cdot MC). \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} &\frac{k}{2}(a \cdot PA + b \cdot PB + c \cdot PC) \\ &= \frac{1}{2}(EF \cdot PA + FD \cdot PB + DE \cdot PC) \\ &\geqslant S_{\triangle PEF} + S_{\triangle PDF} + S_{\triangle PDE} = S_{\triangle DEF}, \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} &\frac{k}{2}(a \cdot PA + b \cdot PB + c \cdot PC) \\ &\geqslant \frac{k}{2}(a \cdot MA + b \cdot MB + c \cdot MC), \end{aligned}$$

即

$$aPA + bPB + cPC \geqslant aMA + bMB + cMC,$$

等号成立必有 $EF \perp PA$、$FD \perp PB$、$DE \perp PC$ 同时成立，即 P 点与 M 点必须重合.

说明 (1) 当 $a = b = c$ 时，所得 M 点显然应当满足 $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120°$，这样的点 M 到 A、B、C 三点距离之和最小，M 叫做 $\triangle ABC$ 的费尔马(Fermat)点.

(2) 上述例 7 关联着一个有趣的问题：

有 A、B、C 三个村庄，各村庄的小学生人数分别为 a、b、c，把学校建在什么地方，才能使所有学生所走的路程总和最短？

例 8 (Fermat 光行最速原理) 光线由 A 到 B，在介质分界面 l 上折射. 设 C 为 l 上一点，直线 AC、BC 与 l 所夹锐角分别为 θ_1、θ_2，又设 C' 是 l 上另一点. 求证：当 v_1、v_2(光线在两种不同介质中的速度)满足

$$v_1 : v_2 = \cos\theta_1 : \cos\theta_2$$

时必有

$$\frac{AC'}{v_1} + \frac{BC'}{v_2} > \frac{AC}{v_1} + \frac{BC}{v_2}.$$

证明 运用对称，借助面积，转化问题.

过 B 点作关于直线 l 的对称点 B_1，则有

$$B_1C = BC,\ B_1C' = BC',$$

$$\angle DCB_1 = \angle DCB = \theta_2.$$

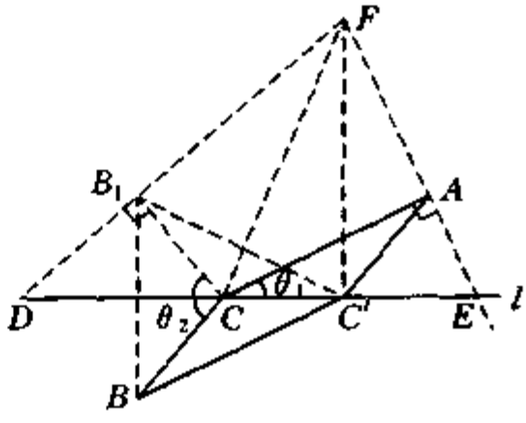


图 23-8

过 A 作 CA 的垂线，过 B_1 作 B_1C 的垂线交于点 F，且与 l 分别交于 E、D.

在 $\triangle DEF$ 中，

$$EF \cdot C'A + DE \cdot C'B_1$$

$$>2(S_{\triangle C'EF}+S_{\triangle C'FD})$$

$$=2S_{\triangle DEF}$$

$$=2(S_{\triangle CEF}+S_{\triangle CDF})$$

$$=EF\cdot CA+DF\cdot CB_1.$$

由正弦定理及 $\angle ECA=\theta_1$，$\angle DCB_1=\theta_2$ 得

$$\frac{EF}{DF}=\frac{\sin\angle FDE}{\sin\angle FED}=\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}=\frac{v_2}{v_1},$$

所以

$$v_2\cdot AC'+v_1B_1C'>v_2\cdot AC+v_1B_1C.$$

即

$$\frac{AC'}{v_1}+\frac{B_1C'}{v_2}>\frac{AC}{v_1}+\frac{B_1C}{v_2},$$

得

$$\frac{AC'}{v_1}+\frac{BC'}{v_2}>\frac{AC}{v_1}+\frac{BC}{v_2}.$$

练　习　题

A　组

1. 设 D 是$\triangle ABC$ 中 BC 边上一点，求证：AD 小于$\triangle ABC$ 中的最大边.

2. 设 P、Q 是$\triangle ABC$ 内部或边上任意两点，求证：线段 PQ 小于或等于$\triangle ABC$ 的最大边.

3. 三角形一边上的中线小于其余两边之和的一半.

4. 三角形大边上的中线小于小边上的中线.

5. 设三角形三边长分别为 a、b、c，相应的边上的中线长为 m_a、m_b、m_c，求证：

$$bc-\frac{a^2}{4}\leqslant m_a^2\leqslant bc+\frac{a^2}{4},$$

$$ca-\frac{b^2}{4}\leqslant m_b^2\leqslant ca+\frac{b^2}{4},$$

$$ab-\frac{c^2}{4}\leqslant m_c^2\leqslant ab+\frac{c^2}{4}.$$

6. 如图 23-9，在定点 A 处悬挂一个电灯泡 B. 若从灯绳 AB 上一定点 C 处将电灯泡 B 拉起，使 B 距离桌面上一定点 D 最近. 问 C 点应拉至什么位置(AD 大于灯绳 AB).

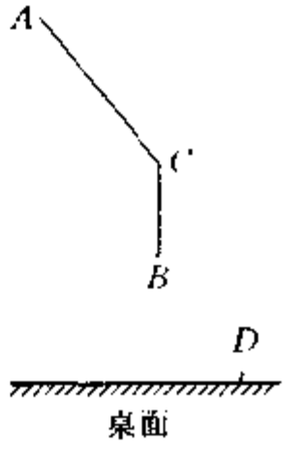


图 23-9

7. 求证：在同底且面积相等的三角形中，等腰三角形周长最短.

8. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC<\angle ACB$，BD、CE 是角平分线，求证：$CE<BD$.

B　组

9. 在锐角$\triangle ABC$ 中，$AC=1$，$AB=c$，$\triangle ABC$ 的外接圆半径

$R \leqslant 1$. 求证：$\cos A \leqslant c \leqslant \cos A + \sqrt{3}\sin A$.

10. 已知锐角三角形 ABC 的三条边长为 a、b、c，外接圆半径为 1. 求证：$\cos A + \cos B + \cos C < \frac{1}{2}(a + b + c)$.

11. P 为边长是 1 的等边三角形 ABC 内任意一点，设 $L = PA + PB + PC$. 求证：$1.5 < L < 2$.

12. 设 $ABCD$ 为正方形，过 A 引直线交 BC 于 X 点，交 DC 的延长线于 Y，AC 为对角线. 求证：$AX + AY > 2AC$.

13. 在$\triangle ABC$ 中，P、Q 在边 AB 上，R 在边 CA 上. 已知 P、Q、R 三点把$\triangle ABC$ 的周界按长度分为三等分，证明：$9S_{\triangle PQR} > 2S_{\triangle ABC}$.

14. 已知正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 1，QR 是正六边形内平行于 AB 的任意线段，求以 QR 线段为底边的内接于正六边形 $ABCDEF$ 的三角形 PQR 的最大面积.

15. 在直角三角形 ABC 中，AD 是斜边上的高，M、N 分别是$\triangle ABD$ 与$\triangle ACD$ 的内心，连接 MN 并延长分别交 AB 与 AC 于 K 及 L. 求证：

$$S_{\triangle ABC} \geqslant 2S_{\triangle AKL}.$$

测 试 题

1. 如图 23-10，$\triangle ABC$ 中 BC 为最大边，$AB=AC$，$CD=BF$，$BD=CE$，则 $\angle DEF$ 的取值范围是（　　）.

(A) $0^\circ<\angle DEF<45^\circ$

(B) $45^\circ<\angle DEF<60^\circ$

(C) $60^\circ\leqslant\angle DEF<90^\circ$

(D) 以上都不对

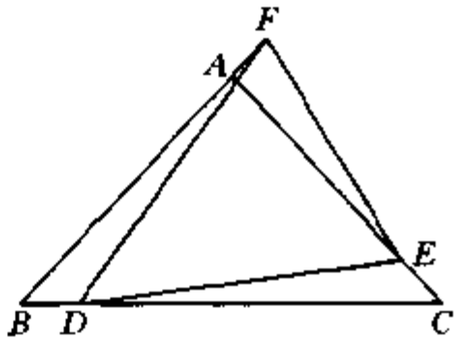


图 23-10

2. 设 a、b、c 为锐角 $\triangle ABC$ 的三边长，h_a、h_b、h_c 为对应边上的三条高，求证：

$$\frac{1}{2}<\frac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c}<1.$$

3. 设正数 x、y、z 满足不等式

$$\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}+\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}>1,$$

求证：x、y、z 是某个三角形的三边长.

4. 证明：在已知一底边和一顶角的所有三角形中，等腰三角形的顶角平分线最长.

5. 在 $\triangle ABC$ 的三边 AB、BC 和 CA 上，分别有与顶点不重合的任意三点 M、K 和 L. 试证明：$\triangle LAM$、$\triangle MBK$ 和 $\triangle KCL$ 中至少一个三角形的面积不大于 $\triangle ABC$ 的面积的 $\frac{1}{4}$.

第二十四讲　极端原理

一、知识要点和基本方法

大家熟知：

任意多个正整数中，必有最小值.

有限个实数中，必有最大值，也必有最小值.

这个基本事实，体现于数学问题中，就是数量上的极值性，如最大、最小数，最小、最大的角(面积)，最短、最长的线段，点的运动变化的极限位置以及各种事物状态变化的极端情形(如最“好”、最“坏”等等).

通过考虑极端情形，从中得到解决一般问题的启示与方法.常常给人们以绝处逢生之感觉.因此，人们把处理问题时运用的上述基本方法、思路称为极端原理.

考虑极端情况，这是解决数学问题的非常重要的思考方式.这是因为，如若在极端情况尚不能解决，则势必在一般情况下也不能解决.

运用极端原理解决问题的基本思路，就是通过考虑问题的极端情形下的结果及解决极端情形的方法，努力“提升”出解决问题的一般思路与方法，使得问题顺利解决.

二、例题精讲

例1　对于一个给定的等边三角形，求证：这个三角形内任一点到三边的垂直距离之和是一个定数.

证明　考虑极端，求得定值.

如图 24-1，当 P 点与顶点 A 重合时，P 到边 AB 及 AC 的距离

都等于零，而 P 到边 BC 的距离恰好等于三角形 ABC 的高.

这样，问题转化为：

在给定正三角形 ABC 内任取一点 P，求证：P 到三角形三边的距离之和等于此三角形的高.

再考虑点 P 的特殊位置，寻求一般解题思路.

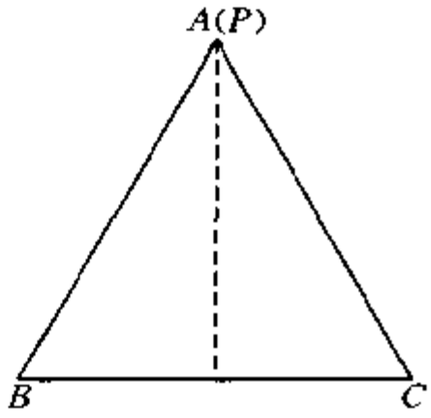


图 24-1

考虑点 P 在三角形边上，不妨设 P 在边 AB 上，如图 24-2，过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D，过 P 作 $PE \perp BC$ 于 E，$PF \perp AC$ 于 F.

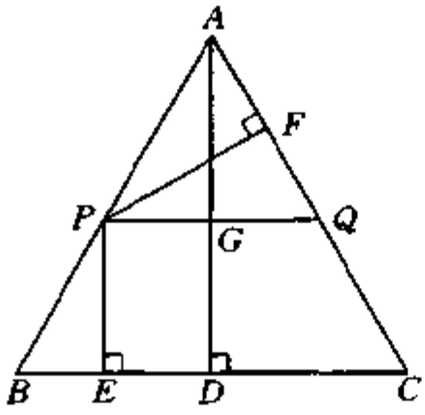


图 24-2

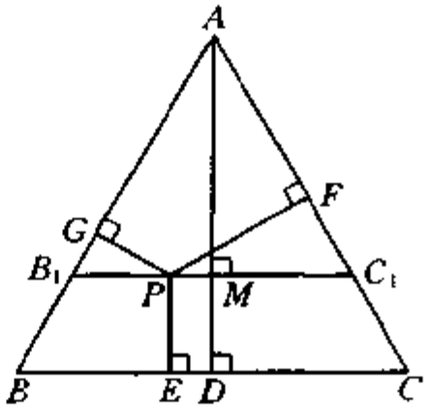


图 24-3

过 P 作 $PQ \parallel BC$ 交 AC 于 Q，交 AD 于 G，则 $\triangle APQ$ 是正三角形，所以 $PF = AG$. 又 $PE = GD$. 故 $PF + PE = AD$.

总结思路，一般情形努力转化上述情形，其“突破口”是作一边的平行线.

在点 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，过 P 作 $B_1C_1 \parallel BC$，如图 24-3，交 AD 于 M.

在等边三角形 AB_1C_1 中，点 P 为边 B_1C_1 上一点，则有 $PG + PF = AM$. 又 $PE = MD$，所以

$$PE + PG + PF = PE + AM = MD + AM = AD.$$

说明 (1) 例 1 展现了运用极端原理逐步解决问题的思路.

(2) 此题还有一个更为简单的一般性证法，就是利用三角形面积关系式.

由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle APB}+S_{\triangle APC}+S_{\triangle BPC}$ 得

$$\frac{1}{2}BC\cdot h_a=\frac{1}{2}\cdot PE\cdot BC+\frac{1}{2}PF\cdot AC+\frac{1}{2}PG\cdot AB,$$

而 $AB=BC=CA$，故

$$PE+PF+PG=h_a.\ (h_a\text{ 为 }BC\text{ 边上的高})$$

利用此解法，我们得到一般结果：

若 $\triangle ABC$ 三边的长分别为 a、b、c，三角形内任意一点 P 到这相应三边的距离为 d_a、d_b、d_c，AB 边上的高为 h_c，则 $\frac{a}{c}d_a+\frac{b}{c}d_b+d_c=h_c=$ 定值.

特别地，$a=b=c$，即为例 1 结果；$d_a=0$，$b=c$，则有 $d_b+d_c=h_c$，即等腰三角形底上一点到两腰的距离之和等于一腰上的高.

(3) 如若 P 在正三角形 ABC 之外，又有怎样的结果呢？

读者可利用面积关系自行得到结果.

例 1 的结论可以推广为“正 n 边形”吗？

例 2 把 2 000 分解成若干不同的正整数之和，问至多能分成几项？

解 考虑至多，想到“极端”——每一项尽可能地小.

令 $2\,000=a_1+a_2+\cdots+a_k$，$1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_k$，$a_1$，$a_2$，…，$a_k$ 均为正整数，则 a_1 的最小值为 1，由此可知 a_2 的最小值为 2，……，这样就有

$$2\,000\geqslant 1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1),$$

得
$$k\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{16\,001}-1).$$

因为 k 为整数，所以 $k\leqslant 62$.

又当 $a_1=1$，$a_2=2$，…，$a_{61}=61$，$a_{62}=109$，有

$$2\,000 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{62}.$$

故至多可以分解为 62 项.

例 3 平面上给定 1 999 个点，任意两点距离小于 1 999，任意三点是某个钝角三角形的顶点. 求证：存在直径不超过 1 999 的圆，覆盖这 1 999 个点.

证明 在这 1 999 个点中，设两两之间距离最大的两点是 A、B 且 $AB < 1\,999$. 以 AB 为直径的圆覆盖了这 1 999 个点.

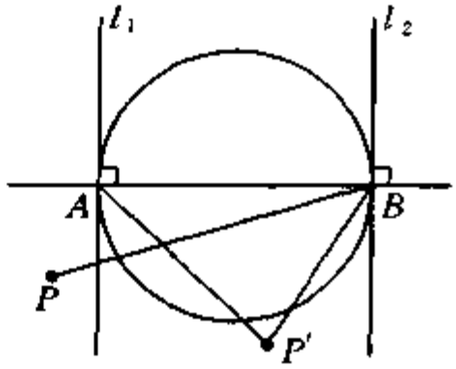


图 24-4

这是因为，如图 24-4，分别过 A、B 作 AB 的垂线 l_1、l_2，则给定的点不能在直线 l_1、l_2 围成的带形之外. 否则这点 P 到点 B(或 A)距离大于 AB，这与 AB 的最大性矛盾.

同时，给定的点也不能在带形内部的圆外. 否则，这点 P' 与 A、B 构成不是钝角三角形，与已知条件矛盾.

故结论成立.

说明 (1) 此例是组合几何问题中的一类覆盖问题，这些问题的解决往往需借助于极端原理的思想.

(2) 此例可以一般化为：

平面上给定 n 个点，任两点距离小于常数 a(如 1)，任三点是某个钝角三角形的顶点. 求证：存在直径不超过 a 的圆，覆盖这 n 个点.

例 4 设有 $n(n \geqslant 2)$ 名选手进行乒乓球比赛，任两名选手都进行一场比赛，每场比赛均决出胜负. 求证：存在选手 A，使得其他的任一选手，或是输给 A，或是输给被 A 打败的某一名选手.

证明 读懂题，寻“极端”A.

A 为取胜场次最多的一名选手.

对于其他的任一选手 B，若输给 A，则命题成立；若 B 不是输给 A，即 B 胜 A. 因为 B 战胜的对手不多于 A 战胜的对手，所以，除 A、B 之外，A 战胜的对手必多于 B 战胜的对手，从而必存在选手 C，是 A 战胜的，但不是 B 战胜的，即 B 输给被 A 打败的选手 C.

例 5 设有 $n(\geqslant 7)$ 个圆，其中任意 3 个圆都不两两相交(包括相切)，求证：一定可以找到一个圆，它至多只能与 5 个圆相交.

证明 设 n 个圆的圆心分别为 O_1、O_2、…、O_n，取 n 个圆中半径最小的圆设为$\odot O_1$.

若$\odot O_1$ 与 6 个(或多于 6 个)圆 O_2、O_3、…、O_7 相交，连结 O_1O_2，O_1O_3，…，O_1O_7，则 $\angle O_2O_1O_3$，$\angle O_3O_1O_4$，$\angle O_4O_1O_5$，$\angle O_5O_1O_6$，$\angle O_6O_1O_7$，$\angle O_7O_1O_2$ 中必有一个角不超过 $\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$，不妨令 $\angle O_2O_1O_3\leqslant 60^\circ$.

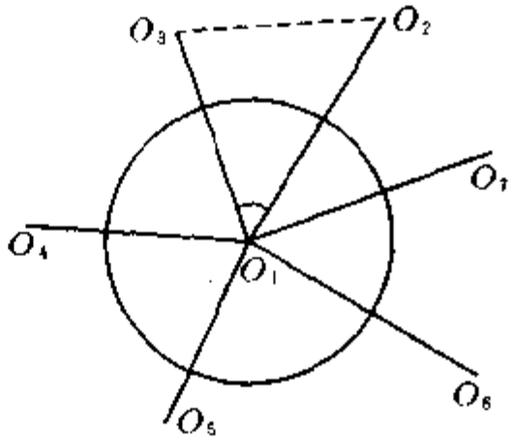


图 24-5

连 O_2O_3，令$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 的半径是 r_1，r_2，r_3，则

$$r_1\leqslant r_2,\ r_1\leqslant r_3.$$

由$\odot O_1$ 与$\odot O_2$、与$\odot O_3$ 均相交，得 $r_1+r_2\geqslant O_1O_2$，$r_1+r_3\geqslant O_1O_3$，则

$$O_1O_2\leqslant r_1+r_2\leqslant r_2+r_3,\ O_1O_3\leqslant r_2+r_3.$$

而 $\angle O_2O_1O_3\leqslant 60^\circ$，那么在其余两个角中必有一个角 $\geqslant 60^\circ$，令 $\angle O_2\geqslant 60^\circ$，就有 $O_1O_3\geqslant O_2O_3$，所以有 $O_2O_3\leqslant r_1+r_3\leqslant r_2+r_3$，从而知$\odot O_2$ 与$\odot O_3$ 必相交，由此推得$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 两两相交. 这与题中条件矛盾.

故一定存在一个圆至多只能与 5 个圆相交.

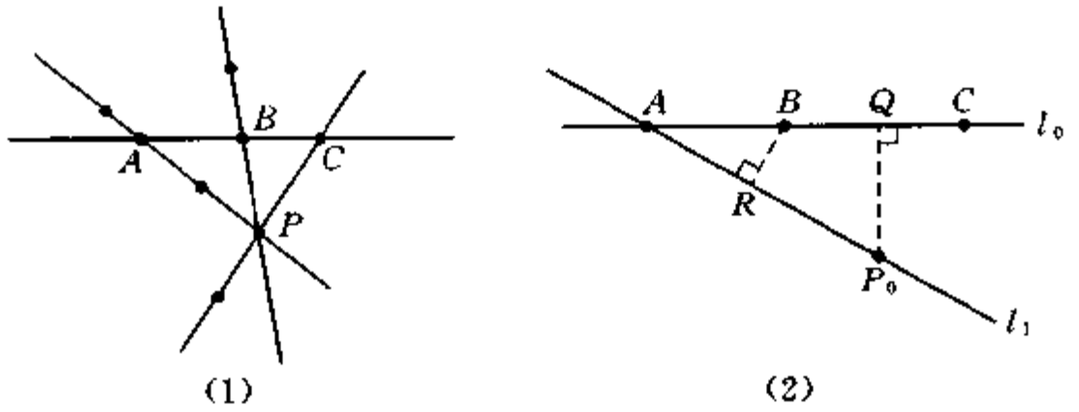
例 6 平面上 n 个点，不全在一直线上，求证：平面上必存在一条直线，恰过其中的两点.

证明 利用点到直线距离，考虑“极端”——最小.

对于给定点中至少两点所作的直线 l，由于给定的点不全在一条直线上，所以直线 l 外有给定点中的若干个点(有限多个). 令这些点到直线 l 的距离的最小值为 $d(l)$.

又过给定点中任意两点的直线只有有限条，则满足上述要求的

$d(l)$必为有限个. 令 d 是这些 $d(l)$中最小的值. 因此,d 是点 P_0 到直线 l_0 的距离,这条直线 l_0 恰过给定点中的两点.



(1) (2)

图 24-6

这是因为,假设给定点中至少有三点 A、B、C 在直线 l_0 上. 过点 P_0 作 $P_0Q \perp l_0$,交 l_0 于点 Q,则 A、B、C 中至少有两点在 Q 的同一侧. 令 A、B 在 Q 的同一侧,且点 B 在 A、Q 之间,那么过点 A 与 P_0 的直线为 l_1,点 B 到 l_1 的垂线 BR 的垂足为 R. 于是有

$$\triangle ABR \backsim \triangle AP_0Q,$$

得
$$\frac{BR}{P_0Q} = \frac{AB}{AP_0},$$

即
$$d(l_1) \leqslant BR = P_0Q\,\frac{AB}{AP_0} \leqslant P_0Q \cdot \frac{AQ}{AP_0} < P_0Q = d,$$

这与 d 的最小性矛盾.

故直线 l_0 上只有两个给定的点.

说明 例 6 的一个等价说法是:

在平面上给出了 n 个点,若仅由这些点所确定的每一条直线上,都至少有 3 个给定的 n 个点中的点,则这 n 个点全都在同一条直线上.

练　习　题

A　组

1. 把 1 600 颗花生，分给 100 只猴子，求证：不管怎样分，至少有 4 只猴子得到的花生一样多.

2. 以四边形的四边为直径，在四边形所在一侧分别作四个半圆，求证：这四个半圆能覆盖整个四边形.

3. 平面上能否作出 $n(\geqslant 2)$ 条线段，使得任一条线段的任一个端点在另外的某一条线段的内部.

4. 平面上有 $n(\geqslant 3)$ 个点，它们不全在一条直线上. 求证：存在不共线的点，使过这三点的圆内没有给定的任何其他的点.

5. 两圆外切于点 P，过 P 点作两条互相垂直的割线 APA_1 和 BPB_1，设两圆直径为 d_1，d_2，求证：$AA_1^2 + BB_1^2 =$ 定值.（如图 24-7）

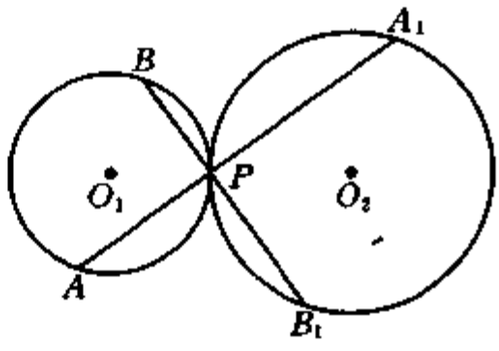


图 24-7

B　组

6. 在平面上任给 $2n$ 个点，其中任三点不共线，并且把其中 n 个点涂成蓝色，n 个点涂成白色，求证：可以一蓝一白把它们连成 n 条线段，使这些线段互不相交.

7. 设有 n 个人 A_1，A_2，…，A_n，其中有些人相互认识. 证明：可用某种方式将他们分成两组，使每人都至少有一半认识的人不与他在同一个组里.

8. 平面上有 100 个点，两两之间距离都不相等，每一个点都同离它最近的点用线段连接. 求证：(1)无论如何，上述构图中不含多边形；(2)也不存在内部相交的线段.

9. 平面上给定 n 个点，两两之间距离的最大值是 D，最小值是 d，求证：

$$\frac{D}{d}>\sqrt{\frac{n\pi}{4}}-1.$$

测 试 题

1. 用百分制记分，得分为整数. 证明：

(1) 若 201 人的总分为 9 999，则至少有 3 人的分数相同.

(2) 若 201 人的总分为 10 101 分，则至少有 3 人的分数相同.

(3) 若 201 人的总分为 10 000 分，且已知无 3 人的分数相同，则必有 1 人 100 分，2 人 0 分.

(4) 若 201 人的总分为 20 100 分，且已知无 3 人的分数相同，则必有 1 人 0 分，2 人 100 分.

2. 平面上有 100 个点，任三点不共线，求证：必可找到 3 点，使得以这 3 点为顶点的三角形内部及边上没有其余的点.

3. 某次国际会议有 A、B 两国代表参加，现知每位 B 国代表都至少认识 1 位 A 国代表，而每位 A 国代表都不全认识所有 B 国代表. 证明：可以从中找出两位 A 国代表 a_1 和 a_2，两位 B 国代表 b_1 和 b_2，其中 a_1 和 b_1，a_2 和 b_2 分别互相认识，而 a_1 和 b_2，a_2 和 b_1 却分别互相不认识.

第二十五讲　数 学 建 模

一、知识要点和基本方法

运用所学的数学基本知识、基本方法和基本思想(观念)处理实际问题的过程,称为数学建模.

具体地说,数学建模过程包括读题、确定"有用"信息、转换为数学语言、恰当建立(选择)数学模型、模型求解、结果检验、实际解释等环节,如图 25-1,其中关键之处是通过读题确定有用信息及数学语言化.

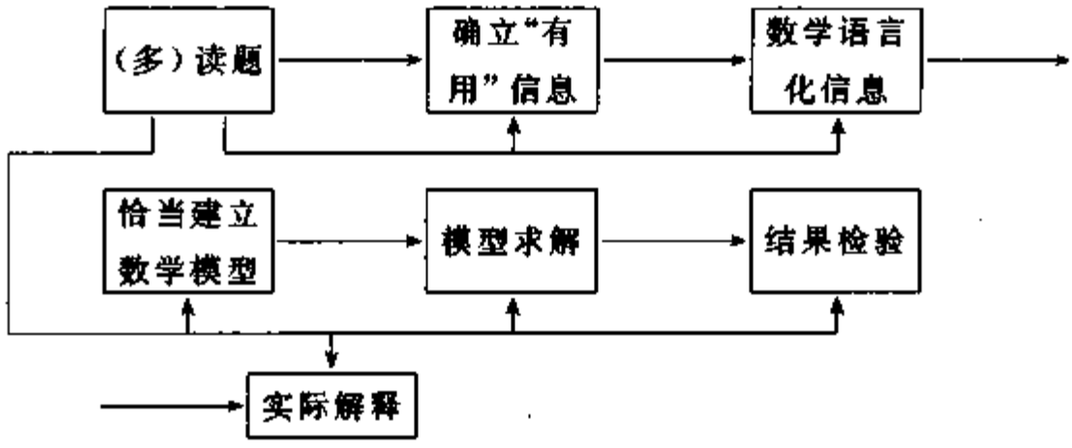


图 25-1　数学建模基本过程

一般而言,我们的学生对数学建模问题微感到比较困难,究其原因,我们认为主要是学生不认真审题,不能明确地用数学语言表述出所欲讨论的问题.因此,我们认为"多读题"是处理好实际应用问题的好的建议.

通过多读题,知其实际应用问题中包含的背景状况,注意是题中背景,不是现实生活中背景状态.

通过多读题，确立题中每句话的数学含意.

通过多读题，把相关文字语言数学化.

通过多读题，整体把握数学化语言(数学式)之间的关系.

通过多读题，校正建立的数学关系式即数学模型的合理性.

通过多读题，确立数学结果的实际有效性.

所以说，多读、多想是数学建模问题的基本要求.

在解决实际应用问题中，我们经常用到的数学模型有方程(组)、一次函数、二次函数、不等式、几何结论等.

数学建模能力的考查，在近年来的数学竞赛中时有出现. 今后，数学建模将成为数学竞赛的重要内容. 了解并学会数学建模是必要的.

二、例题精讲

例 1 某商人进货时，进价已按原价 a 扣去了 25%. 他打算对此货订一新价销售，以便按新价让利 20%销售后，还可获得售价的 25%的利润. 试写出此商人经销这种货物时按新价让利总额与货物售出件数之间的函数关系式.

多读题!

读两遍题，知其“事件”就是货物有进价、售价.

确定相关信息的数学含意. “进价已按原价 a 扣去了 25%”，就是“进价为 $a \times (1 - 25\%)$”. “订一新价销售”，新价不知道“具体值”，实际上是知道的，它是 b(多数学生不敢跨越“不知道”). 于是“按新价让利 20%销售”就是“按 $b \times (1 - 20\%)$ 销售”，“获得售价的 25%的利润”就是“$b \times 25\%$ 的利润”.

寻找 b 与 a 的关系. 商人怎样获得利润呢? 以售价高出进价而赢利，于是就有

$$\text{销售价} - \text{进价} = \text{利润},$$

从而 $$b \times (1 - 20\%) - a(1 - 25\%) = b \times 25\%,$$

得 b.

这样每件让利为 $b \times 20\%$，因而件数 x(看作已知)与让利总额

具有关系 $f(x)=(b\times 20\%)x$.

接下来,再读一遍题,整理一番,完整地写出解答.

解 设每件货物的售价为 b,货物售出件数为 x,那么由题意有

$$b\times(1-20\%)-a\times(1-25\%)=b\times 25\%,$$

解得
$$b=\frac{15}{11}a.$$

所以,让利总额与售出货物件数之间的关系为

$$f(x)=(b\times 20\%)x=\frac{3}{11}ax,$$

这里 $x\geqslant 1$,且 x 是整数.

说明 需注意 x 的取值范围.

例 2 苏康便利店在 1999 年销售两种保健品 A、B,所获得的利润分别是 a 万元和 b 万元.根据一年的销售情况知道,利润 a、b 与投入资金 x 万元的关系满足

$$a=\frac{2}{7}x,\ b=\frac{5}{7}\sqrt{x}.$$

计划 2000 年 1 月投入 5 万元资金经营销售保健品 A、B.为获得最大利润,对保健品 A、B 的资金投入应各是多少万元?获得的最大利润是多少万元?

多读题!

发现题中关系已经用数学语言表述出来,这就相对容易多了.

考虑对 A 投入资金为 x 万元(不知道,就设为 x),那么对 B 投入资金为 $(5-x)$ 万元,就有 A 的利润为 $a=\frac{2}{7}x$,B 的利润为

$$b=\frac{5}{7}\sqrt{5-x},$$

搞清楚 x 的取值范围,是 $1\leqslant x\leqslant 5$.

解 设对保健品 A 投入资金 x 万元,则对保健品 B 投入资金为 $(5-x)$ 万元,这里 $0\leqslant x\leqslant 5$,因而获得的利润为 y 万元.

由题意得

$$y=\frac{2}{7}x+\frac{5}{7}\sqrt{5-x},\quad 0\leqslant x\leqslant 5.$$

解决这个“数学模型”,求上述这个函数的最大值.

令 $\sqrt{5-x}=t,\ t\geqslant 0$,则 $x=5-t^2$,有

$$\begin{aligned}y&=\frac{2}{7}(5-t^2)+\frac{5}{7}t\\&=-\frac{2}{7}\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{105}{56}.\end{aligned}$$

当 $t=\frac{5}{4}$ 时,y 的最大值为 $\frac{105}{56}$,此时有

$$\sqrt{5-x}=\frac{5}{4},\quad 得\quad x=\frac{55}{16}.$$

因为 $0\leqslant x=\frac{55}{16}\leqslant 5$,所以对 A 投入资金 $\frac{55}{16}$ 万元,对 B 投入资金 $5-\frac{55}{16}=\frac{25}{16}$ 万元时,获得利润为 $\frac{105}{56}$ 万元.

例 3 新华高科技股份有限公司董事会决定今年用 13 亿元资金投资发展项目.现有 6 个项目可供选择(每个项目或者全部投资,或者不被投资),各项目所需投资金额和预计年收益如下表所示.

项　　目	A	B	C	D	E	F
投资(亿元)	5	2	6	4	6	8
收益(千万元)	0.55	0.4	0.6	0.5	0.9	1

如果要求所有投资的项目的收益总额不得低于 1.6 千万元.问应选择哪几个项目投资收益最大?

多读题!读每遍题努力都有新的收获,都能得到若干有用的信息乃至数学上的结果.

投资总额 13 亿,确立投资项目数.

读表,发现 $2+4+5=11<13$,但 $2+4+5+6=17>$

13，得到一个令人兴奋结果，投资项目最多是3个.

投资1个项目呢?

再读题，比较投资收益，容易发现，单一项目的投资收益额均低于1.6千万元，则至少投资2个项目.

考虑2个项目投资总额及收益.

再读题，C＋F与E＋F均有6＋8＞13，得不可能同时投资C、F或E、F.除此情形之外的同时投资两个项目的收益均低于1.6千万元.因此，投资项目为3个.

哪3个项目呢?

耐心地再读一遍题，就解决了问题.因此说，读题要有耐心.

以投资收益不得低于1.6千万元，作为“准绳”，“拦”去不合题意的投资状况.

由2＋4＋5＝11＜13，2＋4－6＝12＜13，2＋5＋6＝13知可能的投资项目是A、B、D，B、D、C，B、D、E，A、B、C，A、B、E.进而比较收益得到结果.

至此，问题已获解决.

解 考虑四个项目中投资总额的最小值为

$$2+4+5+6=17>13,$$

所以拟投资项目不超过3个.

显然，由每个投资项目的收益额小于1.6千万元得投资项目至少是2个项目.

又除了投资C与F或E与F外，其余任意两个项目的投资收益小于1.6千万元，而C与F的投资总额为6＋8＝14＞13，E与F的投资总额为6＋8＝14＞13，所以投资项目为3个项目.

在表中首先满足投资总额≤13亿元的是2＋4＋5＝11，2＋4＋6＝12，2＋5＋6＝13，则投资项目可能是A、B、D，B、D、C，B、D、E，B、A、E，B、A、D.

其次，分别比较投资收益额.

投资A、B、D的收益额为

$$0.55+0.4+0.5=1.45<1.6.$$

投资 B、D、C 的收益额为

$$0.4 + 0.5 + 0.6 = 1.5 < 1.6.$$

投资 B、D、E 的收益额为

$$0.4 + 0.5 + 0.9 = 1.8 > 1.6.$$

投资 A、B、D 的收益额为

$$0.55 + 0.4 + 0.5 = 1.45 < 1.6.$$

投资 A、B、E 的收益额为

$$0.55 + 0.4 + 0.9 = 1.85 > 1.6.$$

所以，应选择项目 A、B、E 投资，其收益最大，为 1.85 千万元.

例 4 设有铜、锌混合物 400 克，它的体积为 50 立方厘米. 已知铜的比重小于每立方厘米 9 克，大于每立方厘米 8.8 克；锌的比重小于每立方厘米 7.2 克，大于每立方厘米 7.1 克. 求混合物中，铜和锌的克数各在什么范围内？

多读题！不读题哪来思路.

“铜锌混合物 400 克”，铜多少？锌多少？含铜 x 克，含锌 y 克，且 $x + y = 400$ 克.

“铜的比重小于每立方厘米 9 克，大于每立方厘米 8.8 克”，即铜的比重为 d_1，有 $8.8 < d_1 < 9$.

同理，锌的比重为 d_2，有 $7.1 < d_2 < 7.2$.

“混合物的体积为 50 立方厘米”，则铜、锌体积为 $\frac{x}{d_1}$、$\frac{y}{d_2}$，其和 $\frac{x}{d_1} + \frac{y}{d_2} = 50$.

于是，“数学模型”跃然纸上：

$$\begin{cases} x + y = 400, \\ \dfrac{x}{d_1} + \dfrac{y}{d_2} = 50, \\ 8.8 < d_1 < 9, \\ 7.1 < d_2 < 7.2, \end{cases}$$

求正实数 x 与 y 的范围.

解 设混合物中含铜 x 克，含锌 y 克，铜的比重为 d_1，锌的比重为 d_2，则

$$\begin{cases} x+y=400, \\ \dfrac{x}{d_1}+\dfrac{y}{d_2}=50, \\ 8.8<d_1<9, \\ 7.1<d_2<7.2, \\ x>0,\ y>0. \end{cases}$$

于是得

$$\begin{cases} x=\dfrac{50d_1(8-d_2)}{d_1-d_2}, \\ y=\dfrac{50d_2(d_1-8)}{d_1-d_2}. \end{cases}$$

因为 $d_1>d_2$，且有 $d_1>8>d_2$，所以，

$$x=50d_1\left(1-\frac{d_1-8}{d_1-d_2}\right).$$

对于 d_1 及 $7.1<d_2<7.2$，$d_1-7.2<d_1-d_2<d_1-7.1$，而 $d_1-8>0$，则 $\dfrac{d_1-8}{d_1-7.1}<\dfrac{d_1-8}{d_1-d_2}<\dfrac{d_1-8}{d_1-7.2}$，

即 $$1-\frac{d_1-8}{d_1-7.2}<1-\frac{d_1-8}{d_1-d_2}<1-\frac{d_1-8}{d_1-7.1},$$

得

$$\frac{0.8}{d_1-7.2}<1-\frac{d_1-8}{d_1-d_2}<\frac{0.9}{d_1-7.1}.$$

于是有

$$50d_1\times\frac{0.8}{d_1-7.2}<x=50d_1\left(1-\frac{d_1-8}{d_1-d_2}\right)<50d_1\times\frac{0.9}{d_1-7.1},$$

即

$$40\left(1+\frac{7.2}{d_1-7.2}\right)<x<45\left(1+\frac{7.1}{d_1-7.1}\right).$$

由 $8.8 < d_1 < 9$ 得

$$1.6 < d_1 - 7.2 < 1.8,\ 1.7 < d_1 - 7.1 < 1.9,$$

则有

$$40 \times \left(1 + \frac{7.2}{1.8}\right) < 40 \times \left(1 + \frac{7.2}{d_1 - 7.2}\right) < 40 \times \left(1 + \frac{7.2}{1.6}\right),$$

$$45 \times \left(1 + \frac{7.1}{1.9}\right) < 45 \times \left(1 + \frac{7.1}{d_1 - 7.1}\right) < 45 \times \left(1 + \frac{7.1}{1.7}\right),$$

所以

$$40 \times \left(1 + \frac{7.2}{1.8}\right) < x < 45 \times \left(1 + \frac{7.1}{1.7}\right),$$

即

$$200 < x < 232\frac{16}{17}.$$

同理求得

$$167\frac{1}{17} < y < 200.$$

故混合物中铜的克数在 200 与 $232\frac{16}{17}$之间，锌的克数在 $167\frac{1}{17}$ 与 200 之间.

例 5 某城市为了改善交通状况，需进行路网改造. 已知原有道路为 a 个标段(1 个标段是指一定长度的机动车道)，拟新建 x 个标段的道路和 n 个道路交叉口，n 与 x 满足关系 $n = ax + b$，其中 b 为常数. 设新建 1 个标段道路的平均造价为 k 万元，新建 1 个道路交叉口的平均造价是新建 1 个标段道路的平均造价的 β 倍 ($\beta \geqslant 1$). β 越大，路网越畅通. 记路网的堵塞率为 μ，它与 β 的关系为 $\mu = \frac{1}{2(1+\beta)}$.

(1) 写出新建道路交叉口的总造价 y(万元)与 x 的函数关系式.

(2) 若要求路网的堵塞率介于 5%与 10%之间，且新增道路的标段数为原有道路标段数的 20%，求新建道路的总造价与新建道路

交叉口的总造价之比 p 的取值范围.

(3) 当 $b=5$ 时,在(2)的假设下,要求造价比 $p=\frac{1}{20}$ 可行吗?为什么?

此题文字信息多,需耐心读题,转化语言.

新建 x 个标段新路与 n 个交叉路口有关系式 $n=ax+b$.

新建 x 个标段的造价为 kx.

新建 1 个道路交叉口的平均造价为 βk.

新建 n 个道路交叉口的造价为

$$n\beta k=\beta k(ax+b).$$

堵塞率 μ 与 β 之间关系为 $\mu=\frac{1}{2(1+\beta)}$.

于是题中要求(1)为 $y=n\beta k=\beta k(ax+b)$, $x\geqslant 1$, x 为正整数.

在(2)中 $5\%\leqslant\mu\leqslant 10\%$, $x=20\%\cdot a$, 新建道路总造价为 kx, 新建交叉口总造价为 $\beta k(ax+b)$, 从而 $p=\frac{kx}{k\beta(ax+b)}$. 当 $b=5$, 可得 β 范围,求得(3)的解决.

解 (1) 由题意知新建 1 个道路交叉口的平均造价为 $k\beta$ 万元,所以

$$y=k\beta\cdot n=k\beta(ax+b),$$

即

$$y=k\beta ax+k\beta b,$$

这里 $x\geqslant 1$ 且 x 为整数.

(2) 由 $5\%\leqslant\mu\leqslant 10\%$ 得 $5\leqslant\frac{1}{2\mu}\leqslant 10$, 所以由 $\mu=\frac{1}{2(1+\beta)}$ 得 $\beta=\frac{1}{2\mu}-1$, 从而有 $4\leqslant\beta\leqslant 9$.

于是

$$p=\frac{kx}{k\beta n}=\frac{x}{\beta(ax+b)}.$$

又 $x=20\%\cdot a=\frac{a}{5}$, 则 $p=\frac{a}{\beta(a^2+5b)}$,

且有

$$\frac{\frac{a}{5}}{9\times\left(a\times\frac{a}{5}+b\right)}\leqslant p\leqslant\frac{\frac{a}{5}}{4\left(a\times\frac{a}{5}+b\right)},$$

即

$$\frac{a}{9(a^2+5b)}\leqslant p\leqslant\frac{a}{4(a^2+5b)},$$

这里 $a>0$，b 均为常数.

(3) 当 $b=5$ 时，$x=\frac{a}{5}$，则 $p=\frac{a}{\beta(a^2+5b)}$.

于是由 $r=\frac{1}{20}$ 得

$$\beta=\frac{20a}{a^2+25}\leqslant\frac{20a}{2\times5\times a}=2,$$

而 $4<\beta<9$. 故(3)中要求不可行.

说明 在例题(3)的解答中，我们利用熟知的结论 $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2\geqslant0$，即 $a^2+b^2\geqslant2ab$.

例 6 如图 25-2，两个生物制药厂 A 与 B 座落于运河河岸的同一侧. 工厂 A 和 B 距离河岸 l 分别为 4 千米和 2 千米，两个工厂的距离为 6 千米. 现要在运河的工厂一侧选一点 C，在 C 处拟设立一个货物运输中转站，并建造直线输送带分别到两个工厂和河岸，使直线输送带的总长最小. 如图 25-3 建立直角坐标系.

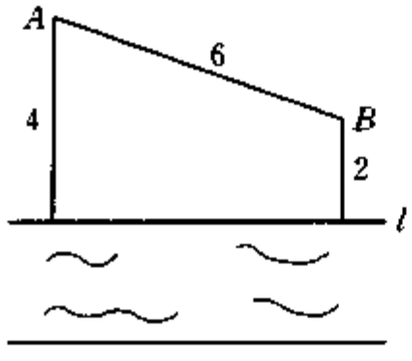


图 25-2

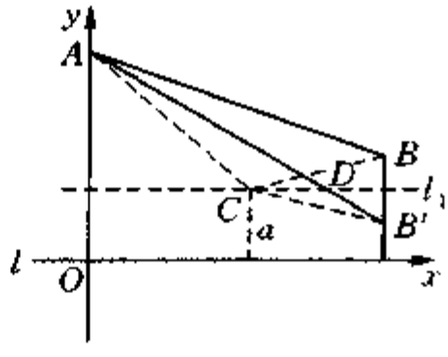


图 25-3

(1) 如果要求货物运输中转站 C 距离河岸 l 为 a 千米(a 为一个

给定的数，$0 \leqslant a \leqslant 2$），求 C 点设在何处时，直线输送带总长 s 最小，并给出 s 关于 a 的表达式.

（2）在 $0 \leqslant a \leqslant 2$ 范围内，a 取何值时直线输送带总长最小，并求其最小值.

本题文字信息很多，先读两遍题，弄清每一句话的含意，了解问题背景.

抓住图 25-3，A 点为 $(0, 4)$，B 点为 $(x_B, 2)$，且 $AB^2 = (4-2)^2 + x_B^2$，即 $36 = 4 + x_B^2$，得 $x_B = 4\sqrt{2}$.

点 C 为 (x, a). 要使得 $AC + BC$ 最小，充分运用几何图形性质，C 点在平行于 l（x 轴）的直线 l_1 上，且距离 l 为 a，则 C 点就在点 B 关于 l_1 的对称点 B' 与 A 点连线上，因此，C 点就是 AB' 与 l_1 的交点.

因为 B' 可知，从而 s 即为 AB'，可求出.

继之，$0 \leqslant a \leqslant 2$ 时求 s 的最小值，是解决数学模型.

解 （1）如图 25-3，作直线 $l_1: y = a$，作 B 点关于直线 l_1 对称的点 B'，连 AB' 交直线 l_1 于 D 点，D 点即为所求.

这是因为，直线输送带总长为

$$s = a + AC + CB = a + AC + CB' \geqslant AB' + a,$$

这里 a 为一个给定的数，$0 \leqslant a \leqslant 2$.

由题意得 $A(0, 4)$，$B(4\sqrt{2}, 2)$，$B'(4\sqrt{2}, 2a-2)$，则直线输送带总长最小为

$$s = a + AB'$$

$$= a + \sqrt{(4\sqrt{2}-0)^2 + (2a-2-4)^2}$$

$$= a + \sqrt{4a^2 - 24a + 68},$$

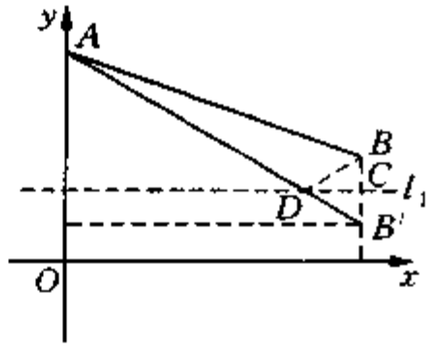


图 25-4

此时 C 点取在 D 处.

因直线 AB' 经过点 $A(0, 4)$ 及点 $B'(4\sqrt{2}, 2a-2)$，于是易求得直线 AB' 的方程为

$$y-4=\frac{a-3}{2\sqrt{2}}x.$$

又直线 l_1 的方程为 $y=a$，从而由

$$\begin{cases}y-4=\dfrac{a-3}{2\sqrt{2}}x,\\ y=a\end{cases}$$

得到 D 点处坐标为 $\left(2\sqrt{2}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3-a},\ a\right)$.

故当 C 点坐标为 $\left(2\sqrt{2}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3-a},\ a\right)$ 时，直线输送带总长最小为

$$s=a+\sqrt{4a^2-24a+88}.$$

(2) 当 a 不是定值时，由 $s=a+\sqrt{4a^2-24a+88}$ 得

$$3a^2+(2s-24)a+68-s^2=0. \qquad ①$$

因 a 是实数，所以上式方程的判别式

$$\Delta=(2s-24)^2-4\times3\times(68-s^2)\geqslant0,$$

即
$$s^2-6s-15\geqslant0,$$

解之得
$$s\leqslant3-2\sqrt{6},\text{ 或 }\quad s\geqslant3+2\sqrt{6}.$$

又 $s\geqslant0$，则 $s\leqslant3-2\sqrt{6}<0$，不合题意，所以 $s\geqslant3+2\sqrt{6}$. 此时由①式得

$$a=\frac{24-2s}{2\times3}=\frac{9-2\sqrt{6}}{3}.$$

而 $0<\dfrac{9-2\sqrt{6}}{3}<2$，于是 $a=\dfrac{9-2\sqrt{6}}{3}$，符合题意，从而可知，直线输送带的总长最小为

$$s=3+2\sqrt{6}.$$

说明 通过以上几例，努力说明如何建立解决实际问题的数学模型，并解决之．其中，有益的建议是多读、多想．

练　习　题

A　组

1. 甲工厂去年上交利税 40 万元，今后五年内计划每年平均增长 10%. 乙工厂去年上交利税比甲工厂少，今后五年内计划每年平均增长 20%. 这样，从今年起第二年乙工厂上交利税就能超过甲工厂，但是要到第 3 年末，才能使从今年开始的 3 年内上交的总利税不少于甲工厂，求乙工厂去年大约上交利税多少万元(只取到整数)?

2. 已知某种商品去年售价为每件 a 元，可售出 b 件. 今年涨价 x 成 (1 成 = 10%)，则售出的数量减少 mx 成(m 是正常数). 试问：

(1) 如果涨价 1.25 成价格，营业额将达到 $\frac{ab(1+m)^2}{4m}$，求 m；

(2) 如果适当的涨价，能使营业额增加，求 m 应在什么范围内?

3. 甲车从 A 出发向 B 径直驶去，乙车从 B 出发向 A 径直驶去，两车都匀速地同时出发，两车出发后 3 小时在中途相遇，乙车到达 A 点比甲车到达 B 点迟 c 小时. 设甲、乙速度分别为每小时 a 公里和 b 公里.

(1) 用 c 表示甲、乙两车在途中的时间；

(2) 若要使得甲、乙两车在途中的总时间最短，求 c.

4. 有一隧道既是交通拥挤地段，又是事故易发地段，为了保证安全，交通部门规定，隧道内的车距 d(m)正比于车速 v(km/h)的平方与自身长(m)的积，且车距不得小于半个车身长. 假定车身长约为 l(m)，当车速为 60(km/h)时，车距为 1.44 个车身长. 在交通繁忙时，应规定怎样的车速，可使隧道的车流量最大?

5. 在距 A 城市 45 千米的 B 地发现金属矿，过 A 有一直线铁路 AX，B 到该铁路的距离为 27 千米. 现欲运物资于 A、B 之间，拟定在铁路线 AX 上的某一点 C 筑一公路到 B. 已知公路运费是铁路的 2 倍. 问 C 点到 A 点的距离为多少时，总运费最低?

6. 如图 25-5，有两条相交成 60°角的直路 XX'、YY'，交点是 O，

甲、乙分别在 OX、OY 上，起初甲离 O 点 3 千米，乙离 O 点 1 千米. 后来两人同时用每小时 4 千米的速度，甲沿 XX' 的方向，乙沿 YY' 的方向步行.

(1) 起初，两人的距离是多少？

(2) 用包含 t 的式子表示 t 小时后两人的距离；

(3) 什么时候两人的距离最短？

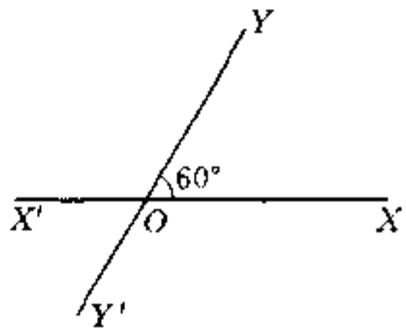


图 25-5

B 组

7. 一艘货船可装货物 100 吨，现有六种货物待运，它们的重量和运价如下表：

货物编号	1	2	3	4	5	6
重量(吨)	40	50	20	10	20	30
运价(千元)	40	60	10	9	4	60

求轮船公司应承接哪些货物，才能使得获利最大.

8. 根据统计资料，我国能源生产自 1985 年以来发展速度很快. 下面是我国能源生产总量(折合亿吨标准煤)的几个统计数据：1985 年 8.6 亿吨，1990 年 10.4 亿吨，1995 年 12.9 亿吨. 有关专家预测，到 2000 年我国能源生产总量将超过 16.1 亿吨. 试给出一个简单的二次函数模型，说明有关专家的预测是否合理.

9. 某房地产公司拥有一块"缺角矩形"荒地 $ABCDE$，边长和方向如图 25-6，欲在这块地上建一座地基为长方形东西走向的公寓，请划出这块地基，并求地基的最大面积(精确到 1 m^2).

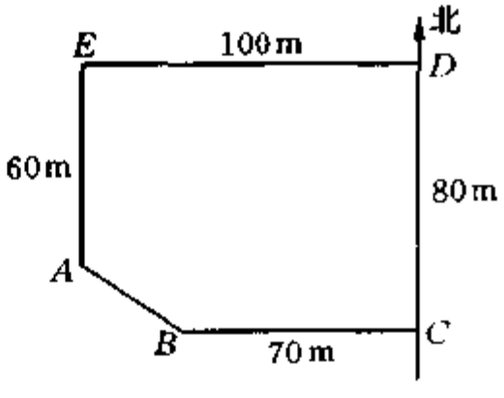


图 25-6

10. 敌舰于某时刻通过坐标原点，且以不变的速度 V_0 沿 y 轴正

向行驶.位于 x 轴上坐标$(A, 0)$处的我导弹部队立即发射导弹拦截.已知导弹发射后将沿发射方向直线飞行,先以等加速 a 加速到速度 V 后,维持速度 V 不变.设上述各量的数值如下:

$V_0 = k$, $A = 1\,000k$, $V = 20k$, $a = 4k$ (其中 k 为常数).

(1) 为使导弹击中敌舰,求导弹发射方向与 x 轴正向的夹角的正切值.(精确到小数点后 3 位)

(2) 如果导弹在与敌舰距离不大于 $50k$ 时即可自动追踪,将敌舰摧毁.求能最早摧毁敌舰的发射角.

11. 某超级市场春节前商品一直以九八折优惠的方法吸引顾客,春节期间该超级市场采用了新的有奖销售的促销手段.具体办法是:

- 有奖销售活动自 1999 年 2 月 8 日起,发奖券 10 000 张,发完为止.
- 顾客每累计购物满 400 元,发奖券一张.
- 春节后持奖券参加抽奖.
- 特等奖 2 名　　奖 3 000 元(奖品)
  一等奖 10 名　　奖 1 000 元(奖品)
  二等奖 20 名　　奖 300 元(奖品)
  三等奖 100 名　　奖 100 元(奖品)
  四等奖 200 名　　奖 50 元(奖品)
  五等奖 1 000 名　　奖 30 元(奖品)

试就超级市场的收益,对该超级市场春节前和春节期间的两个促销办法进行比较分析.

12. 现设计田径场,设计的基本原则主要有三条:每段直线跑道不超过 100 米;弯道为圆弧型;直道与弯道连接处应相切,一个标准 400 米跑道的运动场地如图 25-7.共有八条跑道,从最内侧向外依次记作第一道,…,第八道,每一条道宽为 1.22 米,直道长 100 米,弯道是半圆周.

下面讨论如何确定 400 米赛跑的各道起点问题,跑步沿逆时针方向进行,跑程长度是沿着每一条跑道的左边线 20 厘米计算的,400

米的终线位置是直道的一端 PQ，设第 n 条跑道上 400 米的终点为 D_n，D_n 在 P 线上，$D_nO=(n-1)\times 122+20$ 厘米，请给出计算第 n 道起点位置到 D_n 长度的公式，并确定第三条跑道的起点到终点的长度.（精确到 1 厘米）

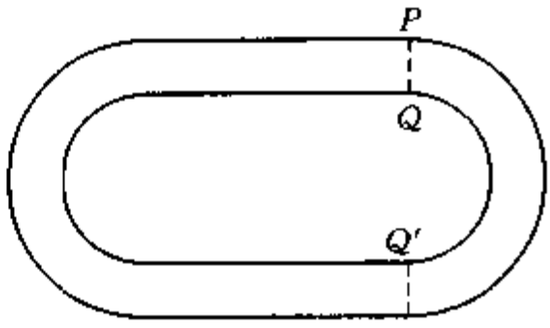


图 25-7

测 试 题

1. 某水库建有 10 个泄洪闸，现有水库的水位已经超过安全线，上游河水还在按一不变的速度增加，为了防洪，需调节泄洪速度. 假设每个闸门泄洪的速度相同. 经测算，若打开一个泄洪闸，30 个小时水位降至安全线；若打开两个泄洪闸，10 个小时水位降至安全线. 现在抗洪指挥部要求 3 个小时使水位降至安全线以下，问至少要同时打开几个闸门？

2. 南方某地市场信息中心为了分析本地区蔬菜的供求情况，通过调查得到家种野菜“芦蒿”的市场需求量和供应量数据（见下表）：

表 1 芦蒿的市场需求量信息表

需求量 y 吨	40	38	37.1	36	32.8	30
价值 x 千元/吨	2	2.4	2.6	2.8	3.4	4

表 2 芦蒿的市场供应量信息表

价值 y 千元/吨	2	2.5	3.2	4	4.6	5
供应量 x 吨	29	32	36.3	40.9	44.6	47

（1）试写出描述芦蒿市场需求量 y 关于价格 x 的近似函数关系式；

（2）试根据这些信息，探求市场对芦蒿的供求平衡量（需求量与供应量相等，就称为供求平衡量），近似到 1 吨.

3. 某钢厂用 A 原料 2 吨和 B 原料 4 吨可产出 1 吨甲种钢管；用 A 原料 5 吨和 B 原料 3 吨可产出 1 吨乙种钢管. 这两种钢管在北京、上海、广州三地销售所得单位利润（单位：万元/吨）如下表所示：

	销售甲种钢管的单位利润（万元/吨）	销售乙种钢管的单位利润（万元/吨）
北京	2	6
上海	3	4
广州	4	2

现根据市场供求信息：A、B 原料的周供应量分别是 10 吨、12 吨；每周甲种钢管生产不能超过 2.5 吨，乙种钢管生产不能超过 1.5 吨，且只能将全部钢管销往同一地方. 问这两种钢管分别生产多少吨，销往何地，才能使一周的总利润最大？最大总利润是多少？

综合测试题一

一、选择题

1. 一个两位数为$\overline{x5}$，一个三位数$\overline{3yz}$，满足$\overline{x5}\cdot\overline{3yz}=7\,850$，则数字$x$、$y$、$z$分别为(　　).

(A) $x=2$，$y=1$，$z=2$　(B) $x=3$，$y=1$，$z=2$

(C) $x=2$，$y=1$，$z=4$　(D) $x=4$，$y=1$，$z=2$

2. 有三个含30°角的直角三角形，它们的大小互不相同，但彼此有一条边相等．这三个三角形，按照从大到小的顺序，其斜边的比为(　　).

(A) $6:\sqrt{3}:1$　(B) $4:2\sqrt{3}:3$

(C) $6:2\sqrt{3}:3$　(D) $3:\sqrt{3}:1$

3. 一个凸n边形，除了一个内角外，其余$n-1$个内角的和是1 999°，则n是(　　).

(A) 12　(B) 13　(C) 14　(D) 以上都不对

4. 设a、b都是正整数，且$a-b$、$3b$、$a+b$ $(a>2b)$构成一直角三角形三边的长，则这个三角形的任一边的长不可能是(　　).

(A) 12　(B) 13　(C) 14　(D) 15

5. 在实数范围内方程

$$\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z)$$

的解为(　　).

(A) $x=1$，$y=1$，$z=3$　(B) $x=1$，$y=2$，$z=3$

(C) $x=2$，$y=1$，$z=2$　(D) $x=2$，$y=2$，$z=3$

6. 在圆内接四边形$ABCD$中，$AB=AD$，且$AC=1$，$\angle ACD=60°$，则$S_{四边形ABCD}$的值为(　　).

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\frac{3}{2}$　(D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

二、填空题

7. 一个三位数等于其各位数字和的三次方，则所有的满足上述条件的三位数是_____.

8. 方程 $\dfrac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x-2a}+\sqrt{x+2a}}=\dfrac{x}{2a}$ 的解为_____.

9. 已知 a 为整数，$|4a^2-12a-27|$ 是质数，那么，a 的所有可能的值的和为_____.

10. 过$\triangle ABC$ 内一点 P，作 $DE\ /\!/\ BC$ 交 AB、AC 于 D、E，作 $GF\ /\!/\ AC$ 交 AB、BC 于 G、F，作 $HK\ /\!/\ AB$ 交 BC、AC 于 H、K，则 $\dfrac{BE}{BC}+\dfrac{FG}{CA}+\dfrac{KH}{AB}=$____.

11. 已知正整数 a、b、c 满足不等式

$$a^2+b^2+c^2+42<ab+9b+8c,$$

则 a、b、c 分别等于_____.

12. 山脚下有一池塘，山泉以固定的流量(即单位时间里流入池中的水量相同)不停地向池塘内流淌. 现池塘中有一定深度的水，若用一台 A 型抽水机则 1 小时后正好能把池塘中的水抽完；若用两台 A 型抽水机则 20 分钟正好把池中的水抽完. 问若用三台 A 型抽水机同时抽，则需要_____分钟恰好把池塘中的水抽完.

三、综合题

13. 某县地处水乡，县政府计划从今年起用处理过的生活垃圾和工业废渣填河造地.

(1) 若该县以每年1%的速度减少年填河面积，并为保持生态平衡，使填河总面积永远不会超过现有水面面积的$\dfrac{1}{4}$，问今年所填面积最多只能占现有水面面积的百分之几?

(2) 水面的减少必然导致蓄水能力的降低. 为了保持其防洪能力不会下降，就要增加排水设备，设其经费 y(元)与当年所填土地面积 x(亩)的平方成正比，比例系数为 a. 又设每亩水面年平均经济收

人为 b 元，所填的每亩土地年平均收入为 c 元，那么，要使收入不少于支出，试求所填面积 x 之最大值(其中 a，b，c 为常数).

14. 已知正整数 a_1、a_2、…、a_{17}，满足

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{17} = a_1 a_2 \cdots a_{17},$$

求所有这样的 a_1、a_2、…、a_{17}的和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{17}$ 的最大值.

15. 已知四边形 $ABCD$ 中，$AB = BC = AD$，且 $\angle ABC = 60°$，点 P 为四边形 $ABCD$ 内一点，求证：

$$PA + PD + PC \geqslant BD.$$

综合测试题二

一、选择题

1. 已知如下数组：

① $\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$；② $\sqrt{10}-3$，$2\sqrt{2}-5$，$32-10\sqrt{10}$；③ 12 402，12 240，1 998；④ 1 998，640，2 098.

其中可作为直角三角形三边长度的数组是(　　).

(A) ①，④　(B) ②，④　(C) ②，③　(D) ③，④

2. 在直角三角形 ABC 中，两条直角边 AB、AC 的长分别为 1 厘米、2 厘米，那么，直角的角平分线的长度等于(　　).

(A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$厘米　(B) $\sqrt{2}$厘米

(C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$厘米　(D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$厘米

3. 已知方程 $(x-a)(x-b)=M$ 的两根为 α、β，那么方程 $(x-a)(x-\beta)=-M$ 的两个根的平方和为(　　).

(A) a^2+b　(B) $a+b^2$

(C) a^2+b+b^2　(D) a^2+b^2

4. 已知等腰直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，点 D 在 CB 的延长线上，且 $BD=AB$，则 $\angle ADB$ 的正切值为(　　).

(A) $\sqrt{2}+1$　(B) $\sqrt{2}-1$

(C) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$　(D) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

5. 已知：在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，若圆 O_1 与圆 O_2 相外切，且圆 O_1 与 AB、AD 分别相切，圆 O_2 与 BC、CD 分别相切，则圆心距 O_1O_2 等于(　　).

(A) $1-\sqrt{2}$　(B) $3-\sqrt{3}$

(C) $5-\sqrt{3}$　(D) $2-\sqrt{2}$

6. 满足方程 $xy-3x^2=12$ 的正整数解为 (x, y)，则所有这样

的解(x, y)的个数为(　　).

(A) 5个　　(B) 3个　　(C) 4个　　(D) 6个

二、填空题

7. 方程 $\sqrt{x+5}+\dfrac{3}{\sqrt{x+5}}=2\sqrt{3}$ 的解为____.

8. 若 a 适合关系式

$$\sqrt{3x+5y-2-a}+\sqrt{2x+3y-a}=\sqrt{x-199+y}\cdot\sqrt{199-x-y},$$

则 a 的值为_____.

9. 方程 $x^2-ax+4a=0$ 仅有整数根的所有正实数 a 为_____.

10. 设 x, y 是实数,且 $x^2+xy+y^2=3$,那么 x^2-xy+y^2 的取值范围是_____.

11. 已知实数 $x_1, x_2, \cdots, x_{1999}$,满足

$$\sqrt{x_1-1}+\sqrt{x_2-1}+\sqrt{x_3-1}+\cdots+\sqrt{x_{1999}-1}$$

$$=\frac{1}{2}(x_1+x_2+\cdots+x_{1999}),$$

则 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots+1\,999x_{1999}$ 的值为_____.

三、综合题

12. 已知$\triangle ABC$的周长为 $2p$,一边 AB 的中点为 M,且 $MC=MA=a$,试说明 p 与 a 之间满足怎样的关系时,三角形 ABC 构成直角三角形.

13. 已知整边(边长全为正整数)三角形的周长等于其面积,求所有这样的整边三角形.

14. 已知圆 O 的直径 AB 的延长线有一点 P,试说明:直径 AB 上是否存在这样的点 D,使得对于过点 P 作任一割线 PMN,交圆 O 于 M、N,都有 $\angle ADM=\angle BDN$.

习 题 解 答

第一讲　一元二次方程

练习题　1. 选 C. 由 $1^2+1\cdot b+c=3$ 及 $3^2+3\cdot b+c=5$ 得 $b=-3$，$c=5$，于是，有 $11^2-3\times 11+5=93$，但 $6^2+6\times(-3)+5\neq 21$　2. 当 $x>0$ 时，方程 $x^2-x-1=0$ 的实根为 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$；当 $x<0$ 时，$x^2+x-1=0$ 的实根为 $x=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$　3. 设题中两个方程的公共根为 x_0，则 $x_0^2+bx_0+1=0$，$x_0^2-x_0-b=0$. 于是有 $(b+1)(x_0+1)=0$，但当 $x_0\neq -1$，从而 $b=-1$，当 $x_0=-1$ 时，$b=2$　4. 因为 $x^2=3x-1$，所以 $x^4+3x^3-16x^2+3x-17=x^2(x^2+3x-16)+3x-17=-18$　5. 由 $x=3\sqrt{5}+6$ 得 $x-6=3\sqrt{5}$，则有 $x^2-12x-9=0$. 所以 $x^4-12x^3-12x^2+36x+38=x^2(x^2-12x-9)-3(x^2-12x-9)+11=11$　6. 把 $x=-1$ 代入原方程得 $3-2a-a^2=0$，即 $a^2+2a-3=0$，解得 $a=-3$ 或 $a=1$　7. 观察知 $(x+1)(573x-584)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=\dfrac{584}{573}$　8. 由题意得 x_0 满足 $x_0^2-3x_0+c=0$，$(-x_0)^2+3\cdot(-x_0)-c=0$，于是上述两式相减得 $c=0$，从而 $x^2-3x+c=0$ 即为 $x^2-3x=0$，得 $x=0$ 或 $x=3$　9. 由题意得 $x^2+1=\dfrac{8}{3}x$，即 $x^2=\dfrac{8}{3}x-1$，于是 $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}=\dfrac{x^2}{x^2(x^2+1)+1}=\dfrac{\frac{8}{3}x-1}{\left(\frac{8}{3}x-1\right)\cdot\frac{8}{3}x+1}=$

$$\frac{\frac{8}{3}x-1}{\left(\frac{8}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{8}{3}x-1\right)-\left(\frac{8}{3}x-1\right)}=\frac{1}{\left(\frac{8}{3}\right)^2-1}=\frac{9}{55}$$

10. 当 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，原方程化为 $x^2-2x-3=0$，得 $x=3$；当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时，原方程化为 $x^2+2x-5=0$，得 $x=-1\pm\sqrt{6}$，故原方程的解为 $x=3$ 或 $x=-1-\sqrt{6}$　11. 原方程

化为$(|x|)^2+2a|x|-3a^2=0$，得$|x|=a$，或$|x|=-3a$. 当$a>0$时，$x=\pm a$；当$a<0$时，$x=\pm 3a$　**12.** 由题意得$m+n=1$，则$m^5=m(m^2)^2=5m+3$，$n^5=5n+3$，所以$m^5+n^5=5(m+n)+6=11$　**13.** 由题意得$2a+6b+3c=0$，$3a+6b+4c=0$，解得$a=-c$，$b=-\frac{1}{6}c$，并且推知$c\neq 0$，于是$a:b:c=(-c):\left(-\frac{1}{6}\right)c:c=6:1:(-6)$　**14.** 设方程$x^2-6x+a=0$有两个正根x_1，x_2，且$x_1\leqslant x_2$，那么$x_1=3-\sqrt{9-a}$，$x_2=3+\sqrt{9-a}$，其中$0<a\leqslant 9$. 当$x_1=x_2$时符合条件的三角形只有一个，得$a=9$；当$2x_1>x_2$，符合条件的三角形只有一个，$a>8$. 故符合题意a为$8<a\leqslant 9$

测试题　**1.** 由题意得$a^2-3a+1=0$，$a^2+1=3a$，且$a\neq 0$，所以原式$=\frac{(a^2-3a+1)(2a^3+a^2+3a)-3a}{a^2+1}=\frac{-3a}{3a}=-1$　**2.** 由题意得$3\times 2^2-(2a-5)\times 2-3a-1=0$，得$a=3$. 所以原方程化为$3x^2-x-10=0$，得另一个根为$x=-\frac{5}{3}$　**3.** $x=-1$或$x=-2$　**4.** 由题意得$ax_0^2+bx_0+c=0$，配方得$a\left(x_0+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$，即$(2ax_0+b)^2=\Delta$，故$M=\Delta$　**5.** 原方程化为$(2a+b)(a-b)x^2-3a^2x-(a+b)(2a-b)=0$. 当$2a+b=0$，即$2a=-b\neq 0$时，$x=\frac{4}{3}$；当$a=b\neq 0$时，$x=-\frac{2}{3}$；当$a=b=0$时，原方程的根$x$为任意数；当$2a\neq -b$，$a\neq b$时，用公式得$x_1=\frac{2a-b}{a-b}$，$x_2=\frac{-a+b}{2a+b}$　**6.** 配方得$(x+2)^2+(x+2a)^2+2(a+2b)^2=0$，则有$x=-2$，$x=-2a$，$a=-2b$，故$a=1$，$b=-\frac{1}{2}$时方程有实根

第二讲　可化为一元二次方程的方程

练习题　**1.** 由方程左边的系数之和为0，得有因式$x-1$，则有$(x-1)(x^2+x-2)=0$，解之得$x_1=x_2=1$，$x_3=-2$　**2.** 令$y=\frac{(x+1)+(x+3)}{2}=x+2$，得$(y+1)^4+(y-1)^4=272$，即$y^4+6y^2-135=0$，解之得$y^2=9$. 即$y=\pm 3$. 于是$x=1$或$x=-5$　**3.** 因$x\neq 0$，原方程化为$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$. 令$y=x+\frac{1}{x}$，则有$2y^2+3y-5=0$，即$y=-\frac{5}{2}$或$y=1$. 于是求得$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=-2$　**4.** 令$y=x+\frac{1}{x}$，则原方程转化为方

程 $2y^2-3y-5=0$. 解之得 $y=\frac{5}{2}$，或 $y=-1$. 于是求得 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=2$

5. 令 $y=(4+\sqrt{15})^x$，则 $\frac{1}{y}=(4-\sqrt{15})^x$. 于是有 $y+\frac{1}{y}=62$，解之得 $y=31+8\sqrt{15}$，或 $y=31-8\sqrt{15}$. 从而有 $x_1=2$，$x_2=-2$　**6**. 原方程变形为 $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=120$. 令 $y=\frac{(x^2+5x+4)+(x^2+5x+6)}{2}=x^2+5x+5$，则 $y^2=121$，即 $y=11$ 或 -11. 于是 $x_1=-6$，$x_2=1$　**7**. 原方程化为 $\frac{4}{x^2+2x+1}+\frac{5}{x^2+2x-5}+\frac{3}{2}=0$. 令 $y=x^2+2x-2$，得 $\frac{4}{y+3}+\frac{5}{y-3}=-\frac{3}{2}$，即 $y^2+6y-7=0$，解得 $y_1=1$，$y_2=-7$. 于是 $x_1=1$，$x_2=-3$　**8**. 原方程变形为 $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x^2+x+1}=\frac{13}{6}$. 令 $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=y$，则 $y+\frac{1}{y}=\frac{13}{6}$，得 $y=\frac{3}{2}$，或 $y=\frac{2}{3}$. 于是 $x_1=x_2=1$，$x_3=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$，$x_4=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$　**9**. 原方程变形为 $(x+\sqrt{3x^2+x})^2=9$，即 $x+\sqrt{3x^2+x}=3$ 或 $x+\sqrt{3x^2+x}=-3$. 于是有原方程的解为 $x=-\frac{9}{2}$ 或 $x=1$　**10**. 原方程变形为 $\sqrt{(x-1)(x+1)}+\sqrt{(x+1)(x+3)}=\sqrt{(x+1)(3x+1)}$. 所以 $\sqrt{x+1}=0$ 或 $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=\sqrt{3x+1}$，于是有 $x_1=-1$，$x_2=1$　**11**. 因为 $x\neq 0$，原方程变形为 $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-25\left(x-\frac{1}{x}\right)+12=0$. 令 $x-\frac{1}{x}=y$，则有 $6y^2-25y+24=0$，得 $y=\frac{3}{2}$ 或 $y=\frac{8}{3}$. 于是求得 $x_1=2$，$x_2=-\frac{1}{2}$，$x_3=3$，$x_4=-\frac{1}{3}$　**12**. 因为 $3x+4=\frac{1}{2}[(6x+7)+1]$，$x+1=\frac{1}{6}[(6x+7)-1]$，所以，令 $y=6x+7$，则有 $y^4-y^2-72=0$，得 $y=3$ 或 $y=-3$. 于是原方程的解为 $x_1=-\frac{2}{3}$，$x_2=-\frac{5}{3}$　**13**. 令 $u=\frac{x-2}{3}$，$v=\frac{x-3}{2}$，则有 $u+v=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}$，得 $u+v=0$ 或 $uv=1$. 于是有 $x_1=\frac{13}{5}$，$x_2=0$，$x_3=5$　**14**. 因为 $(3x^2-4x+34)-(3x^2-4x-11)=45$，所以 $\sqrt{3x^2-4x+34}-\sqrt{3x^2-4x-11}=5$. 于是有 $\sqrt{3x^2-4x-11}=2$，解得 $x=3$ 或 $x=-\frac{5}{3}$　**15**. 令 $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=A$，则原方程化为 $A^2+A-42=0$，所以 $A=6$，即 $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=6$，又 $(x+$

7) $-x=7$，那么 $\sqrt{x+7}-\sqrt{x}=\frac{7}{6}$，故 $\sqrt{x}-\sqrt{x+7}=-\frac{7}{6}$　**16.** 直接利用例 8 的结果得 $x=\frac{-1+\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$

测试题　**1.** 令 $y=\sqrt{x^2+18x+45}$，则原方程化为 $y^2-2y-15=0$. 解之得 $y=-3$(舍去)或 $y=5$. 于是得到原方程的解为 $x=-9-\sqrt{61}$ 或 $x=-9+\sqrt{61}$　**2.** 令 $y=x^2+2x-8$，原方程化为 $\frac{1}{y+9x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y-15x}=0$，解之得 $y=9x$ 或 $y=-5x$. 于是得到原方程的解为 $x_1=8$，$x_2=-1$，$x_3=-8$，$x_4=1$　**3.** 令 $y=\frac{a+x}{b+x}$，则有 $y+\frac{1}{y}=2+\frac{1}{2}$. 解得 $y=2$ 或 $y=\frac{1}{2}$. 于是有当 $a\neq b$ 时方程的解为 $x_1=a-2b$，$x_2=b-2a$；当 $a=b$ 时方程无解　**4.** 原方程变形为 $(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{y-1}-1)^2+(\sqrt{z-2}-1)^2=0$. 于是有 $x=1$，$y=2$，$z=3$　**5.** 因为 $2+\frac{x}{1+\sqrt{1+x}}=1+\sqrt{1+x}$，所以，原方程化为 $\sqrt{1+x}-1=1$. 解得 $x=3$

第三讲　一元二次方程的判别式

练习题　**1.** 由题意知 $a^2-1=0$，得 $a=1$ 或 $a=-1$，但 $a=-1$ 时，原方程无实根. 故 $a=1$ 使得方程恰有一个实根　**2.** 方程变形为 $(2k-1)x^2-8x+6=0$. 当 $k=\frac{1}{2}$ 时，方程有实根 $x=\frac{3}{4}$. 当 $k\neq\frac{1}{2}$ 时，由 $\Delta=64-4\times6(2k-1)<0$，得 $k>\frac{11}{6}$　**3.** 因方程有实根，则 $\Delta=(2\sqrt{-a})^2-4\times\frac{(a-1)^2}{4}=-a^2-2a-1\geqslant0$，即 $(a+1)^2\leqslant0$，又因为 $(a+1)^2\geqslant0$ 得 $a=-1$. 故 $x=1$，且 $a^{1999}+x^{1999}=(-1)^{1999}+1^{1999}=0$　**4.** 因为 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，所以有 $yx^2+(y-2)x+y=0$ 看作关于 x 的一元二次方程，且 x 为实数，于是 $\Delta=(y-2)^2-4y^2\leqslant0$，得 $-2\leqslant y\leqslant\frac{2}{3}$. 当 $y=-2$ 时，有 $x=-1$；当 $y=\frac{2}{3}$ 时，有 $x=1$，所以 y 的最大值为 $\frac{2}{3}$，最小值为 -2　**5.** 由题意得 $2(m+1)\neq0$　①，$\Delta=(4m)^2-4\cdot2(m+1)\cdot(3m-2)>0$，即 $m^2+m-2<0$　②，由①，②式可得 $-2<m<-1$，或 $-1<m<1$　**6.** 原方程化为 $5x^2-(3y+2)x+\frac{2y^2+2y+1}{4}=0$，由 $\Delta\geqslant0$ 得 $(y-1)^2\leqslant$

0，又因为$(y-1)^2 \geqslant 0$则$y=1$. 于是$x=\frac{1}{2}$. 故方程的实数解为$x=\frac{1}{2}$，$y=1$　**7.** 由题意得$b \neq c$，方程的根为1，于是就有$\frac{b-a}{2(b-c)}=1$，从而得$a-b=-2(b-c)$，$b-c=c-a$，有$a+b=2c$　**8.** $\Delta=(2b)^2-4ac$，因$2b=pc+ra$，则$\Delta=(pc+ra)^2-4ac=(pc)^2+(ra)^2+4ac(pr-1)$. 又$pr>1$，所以当$ac \geqslant 0$时$\Delta \geqslant 0$；当$ac<0$时，$-4ac>0$，$\Delta=(pc+ra)^2-4ac>0$. 因此，一元二次方程$ax^2+2bx+c=0$必有实数根　**9.** 由题意知$\Delta=(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2=(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a-b-c)<0$. 又$a>0$，$b>0$，$c>0$，不妨设$a \geqslant b$，$a \geqslant c$，则$a+b+c>0$，$a+b-c>0$，$a-b+c>0$，所以必有$a-b-c<0$，即$b+c>a$. 因此可知以$a$，$b$，$c$为长的三条线段可以构成面积不为零的三角形　**10.** 由题意知$\Delta=(2b(a+c))^2-4(a^2+b^2)(b^2+c^2)=-4(b^2-ac)^2 \geqslant 0$，故$b^2-ac=0$，即$b^2=ac$. 于是，方程有两个相等的实数根，且由求根公式得$x=-\frac{-2b(a+c)}{2(a^2+b^2)}=\frac{b(a+c)}{a(a+c)}=\frac{b}{a}$，故$x=\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$　**11.** 由题意知$a>0$，又$2ab=a^2+c^2>0$得$b>0$. 由$bc>a^2>0$得$c>0$. 因a是实数，且$a^2-2b \cdot a+c^2=0$，所以$\Delta=(2b)^2-4c^2 \geqslant 0$，即$b \geqslant c$，从而由$bc>a^2$推得$b^2 \geqslant bc>a^2$，即$b>a$. 又$a^2+c^2=2ab>2a^2$，得$c^2>a^2$，即$c>a$. 当$b=c$时，$a^2-2ab+c^2=(a-c)^2=0$，得$a=c$，这是不可能的. 故$b \neq c$，因而有$b>c>a$　**12.** 方程$x^2+ax+b=0$的判别式$\Delta_1=a^2-4b$，方程$x^2+cx+d=0$的判别式$\Delta_2=c^2-4d$. 考虑$\Delta_1+\Delta_2=a^2+c^2-4(b+d)=a^2+c^2-2ac=(a-c)^2 \geqslant 0$，则$\Delta_1$与$\Delta_2$中至少有一个大于等于0. 于是这两个方程至少有一个实数解　**13.** 设$\frac{2x-3}{x^2-x+1}=y$，则有$yx^2-(y+2)x+(3+y)=0$. 由x为实数得$\Delta=(y+2)^2-4y(3+y) \geqslant 0$，即$3y^2+8y-4 \leqslant 0$，得$\frac{-4-2\sqrt{7}}{3} \leqslant y \leqslant \frac{-4+2\sqrt{7}}{3}$. 于是求得分式的最大值为$\frac{-4+2\sqrt{7}}{3}$，最小值为$-\frac{4+2\sqrt{7}}{3}$　**14.** 因为$x+y=5-z$，$xy=3-z(x+y)=z^2-5z+3$，于是有关于x的一元二次方程$x^2-(5-z)x+(z^2-5z+3)=0$，由于x是实数，因此，$\Delta=(5-z)^2-4(z^2-5z+3) \geqslant 0$，得$-1 \leqslant z \leqslant \frac{13}{3}$. 故$z$的最大值为$\frac{13}{3}$　**15.** 将$z=a-y-z$代入$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$得$4y^2-4(x-a)y+(4x^2-4ax+a^2)=0$. 由于$y$是实数，所以，$\Delta=(4(x-a))^2-4 \times 4(4x^2-4ax+a^2)=-16x(3x-2a) \geqslant 0$，得$x \leqslant \frac{2}{3}a$. 同理得$y \leqslant \frac{2}{3}a$，$z \leqslant \frac{2}{3}a$　**16.** 当$a=0$时，满足要求. 当$a \neq 0$时，不妨设$a>$

0，则要使方程有实根，必有 $\Delta = b^2 - 4a(c + p) \geqslant 0$，但因 p 是任意的，当 p 取值为 $\frac{b^2 - 4ac}{4a} + 1$ 时，$\Delta < 0$. 这说明 $a \neq 0$ 时，不能保证对于任何实数 p 方程至少有一个实根，所以 $a = 0$

测试题 1. 可以直接化为关于 x 的一元二次方程，运用判别式. 或者观察方程特点，将方程变形为 $(x - a)^2 - b(x - a) - 1 = 0$. 这个方程的判别式 $b^2 + 4 > 0$，所以，这个方程有两个不同的实根，从而推知原方程也有两个不同的实根 2. 方程 $ax^2 + 2bx + c = 0$ 的判别式 $\Delta_1 = 4(b^2 - ac)$，方程 $bx^2 + 2cx + a = 0$ 的判别式 $\Delta_2 = 4(c^2 - ab)$，方程 $cx^2 + 2ax + b = 0$ 的判别式 $\Delta_3 = 4(a^2 - bc)$. 假设 $\Delta_1 = 0$，$\Delta_2 = 0$，$\Delta_3 = 0$，则 $a = b = c$，这与 a，b，c 为互不相等的实数矛盾. 所以，Δ_1，Δ_2，Δ_3 不可能同时等于 0，也就是这三个方程不可能同时都有等根 3. 令 $y = kx$，则有 $(1 + k^2)x^2 - (6 + 6k)x + 12 = 0$. 因 x 是实数，所以 $\Delta = (6 + 6k)^2 - 4 \times 12 \times (1 + k^2) = -k^2 - 1 + 6k \geqslant 0$，得 $3 - 2\sqrt{2} \leqslant k \leqslant 3 + 2\sqrt{2}$. 当 $k = 3 + 2\sqrt{2}$ 时，$x = 2 - \sqrt{2}$. 所以，$\frac{y}{x}$ 的最大值为 $3 + 2\sqrt{2}$ 4. 把 $b = 6 - a$ 代入 $c^2 = ab - 9$ 得 $a^2 - 6a + (c^2 + 9) = 0$. 因为 a 是实数，则必有 $\Delta = 6^2 - 4(c^2 + 9) = -4c^2 \geqslant 0$，得 $c = 0$. 于是有 $a^2 - 6a + 9 = 0$，$ab = 9$，从而有 $a = b = 3$. 故 $a^{1999} - b^{1999} = 0$

第四讲　根与系数的关系及其应用

练习题 1. $x = 1$ 是两个方程的公共根，由根与系数关系知 $m = 1$，$n = -1999$，则 $m - n = 2000$ 2. a，b 是方程 $x^2 - 4x - 3 = 0$ 的两根，则 $a + b = 4$，$ab = -3$. 于是 $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 + b^3}{ab} = -\frac{1}{3}(a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = -\frac{1}{3} \times 4 \times 25 = -\frac{100}{3}$ 3. m，n 是方程 $x^2 + 71x - 1999 = 0$ 的两个根，则 $m + n = -71$，$m \cdot n = -1999$，于是 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m + n}{mn} = \frac{-71}{-1999} = \frac{71}{1999}$ 4. 由题意知 $a \neq 0$，则有 $\left(\frac{1}{a}\right)^2 + 99\left(\frac{1}{a}\right) + 19 = 0$. 所以 $\frac{1}{a}$，b 是方程 $x^2 + 99x + 19 = 0$ 的两个根，从而由根与系数关系得 $\frac{1}{a} + b = -99$，$\frac{b}{a} = 19$，即 $1 + ab = -99a$. 于是 $\frac{ab + 4a + 1}{b} = \frac{-99a + 4a}{b} = \frac{-95a}{19a} = -5$ 5. 设方程的两根为 α，β，且 $\alpha = 2\beta$，则由根与系数关系得 $\alpha + \beta = \frac{3}{2}$，$\alpha \cdot \beta = \frac{m}{2}$. 于是 $\beta = \frac{1}{2}$，$\alpha = 1$，从而 $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{m}{2}$，得 $m = 1$ 6. 设方程的两根为 α，β，且

$\alpha>\beta$，则由根与系数关系得 $\alpha+\beta=\frac{a-1}{2}$，$\alpha\beta=\frac{a+3}{2}$. 又 $\alpha-\beta=1$，于是 $\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=1+4\times\frac{a+3}{2}=2a+7$，即 $a^2-10a=27$. 解之得 $a=5\pm2\sqrt{13}$. 因 $\Delta=(a-1)^2-8(a+3)=a^2-10a-23=4>0$，所以符合题意，得 $a=5\pm2\sqrt{13}$　7. 设方程的两根为 α、β，则 $\Delta=(-4a)^2-4\times(5a^2-6a)=4(6a-a^2)>0$，得 $0<a<b$. 又 $\alpha+\beta=4a$，$\alpha\cdot\beta=5a^2-6a$，$|\alpha-\beta|=6$，于是 $16a^2=36+4\times(5a^2-6a)$，得 $a=3$. 故符合要求的 $a=3$　8. 设方程的两根为 α、β，则 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$，$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{3}$，于是 $\frac{2}{3}\times\left[\frac{-3}{5}\times\frac{b}{a}\right]^2=\frac{c}{a}$，即 $6b^2=25ac$　9. 由根与系数关系得 $a+c=-\frac{b}{a}$，$ac=\frac{c}{a}$，则 $a=\pm1$. 因方程 $9cx^2+3bx+a=0(ac\neq0)$ 无零根，所以 $c+\frac{b}{3x}+\frac{a}{9x^2}=0$，从而有 $a=1$ 时，一根为 $x=\frac{1}{3}$；$a=-1$ 时，一根为 $-\frac{1}{3}$. 故选 D　10. 甲将 a 看错为 a^1，则由根与系数关系得 $-\frac{b}{a^1}=6$，$\frac{c}{a^1}=8$. 于是有 $\frac{b}{c}=-\frac{3}{4}$. 因为改变一次项系数符号不改变判别式的值，所以乙是看错了 a 或 c. 从而有 $\frac{c}{a}=4$. 由此推得 $\frac{b}{a}=-3$，故 $\frac{2b+3c}{a}=6$　11. 设矩形 A 及 B 的长和宽分别是 a，b 及 x，y. 问题归结为方程组 $\begin{cases}x+y=k(a+b)\\xy=kab\end{cases}$（$k$，$a$，$b$ 为已知数）有正数解. 考虑方程 $t^2-k(a+b)t+kab=0$，因 $k\geqslant1$，于是有 $\Delta=k^2(a+b)^2-4kab\geqslant k(a+b)^2\geqslant0$，由此可知 x，y 是此方程的两个根，且有 $x+y=k(a+b)>0$，$x\cdot y=kab>0$. 故结论成立　12. 方程化为 $3x^2+2(a+a^2)x+a^3=0$，$\Delta=4a^2(1+a)^2-4\times3\times a^3=4a^2(1+a^2-a)=4a^2((1-a)^2+a)\geqslant0$，则方程有两个实根，设为 x_1，x_2. 于是有 $x_1x_2=\frac{a^3}{3}<0$. 故 x_1 与 x_2 异号. 由于 $3x^2+2(a+a^2)x+a^3=3(x-x_1)(x-x_2)$，且 $x_1>x_2$，则 $x_1>0$，$x_2<0$，并有 $3\times\left(-\frac{2}{3}a\right)^2+2(a+a^2)\times\left(-\frac{2}{3}a\right)+a^3=3\left(-\frac{2}{3}a-x_1\right)\left(-\frac{2}{3}a-x_2\right)$，即 $\left(-\frac{2}{3}a-x_1\right)\left(-\frac{2}{3}a-x_2\right)=-\frac{a^3}{9}>0$. 又 $a<0$，$x_2<0$，则 $-\frac{2}{3}a-x_2>0$，因此必有 $-\frac{2}{3}a-x_1>0$，即 $x_1<-\frac{2}{3}a$. 同样地有 $3\times\left(-\frac{2}{3}a^2\right)+2(a+a^2)\times\left(-\frac{2}{3}a^2\right)+a^3=3\times\left(-\frac{2}{3}a^2-x_1\right)\left(-\frac{2}{3}a^2-x_2\right)$，可以推得 $-\frac{2}{3}a^2<x_2$

13. 由根与系数关系得 $a+c=2+\sqrt{3}$，$ac=2\sqrt{3}$，又 $c>a$，则 $c=2$，

$a=\sqrt{3}$，从而 $b=1$　**14.** (1)由 $\Delta\geqslant 0$ 及 $a^2-4>0$，$a>0$ 得 $2<a\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$；(2) 由 $a^2-4<0$ 或 $a^2-4=0$ 及 $a>0$ 或 $\Delta=0$ 及 $-a<0$，得 $-2<a<2$，或 $a=2$ 或 $a=\frac{4\sqrt{3}}{3}$(此时为重根). (3)$a^2-4<0$ 得 $-2<m<2$　**15.** 由根与系数的关系得 $x_1+x_2=k-2$，$x_1x_2=k^2+3k+5$，则 $x_1^2+x_2^2=-(k+5)^2+19$，且有 $\Delta=-(3k+4)(k+4)\geqslant 0$，即 $-4\leqslant k\leqslant-\frac{4}{3}$. 故 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值为 18，当 $k=-4$ 时取得

测试题　**1.** 设方程两根为 α，β，则 $\alpha+\beta=-2a$，$\alpha\beta=-3$，$\alpha^2+\beta^2=10$. 于是 $4a^2=10+2\times(-3)=4$，得 $a^2=1$. 又 $4a^2+3\times 4>0$. 故 $|a|=1$　**2.** 由题意得 $a-2\neq 0$，$\Delta=4a^2-4(a-2)(a-1)\geqslant 0$，$\frac{2a}{a-2}<0$，$\frac{a-1}{a-2}>0$，于是 $\frac{2}{3}\leqslant a<1$　**3.** $\Delta=(a-5)^2-4(a+1)(a+6)>0$，即 $3a^2+38a-1<0$. 令方程根为 x_1，x_2，则 $x_1=2x_2-1$，且 $x_1+x_2=-\frac{a-5}{a+1}$，$x_1x_2=\frac{a+6}{a+1}$. 故有 $a=0$ 或 $a=-9$　**4.** 由题意知 $\Delta=4a^2-4(a+6)=4(a^2-a-6)\geqslant 0$，得 $a\leqslant-2$ 或 $a\geqslant 3$. 则 $\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=a+6$，$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=\alpha^2+\beta^2-2(\alpha+\beta)+2=4a^2-2(a+6)-4a+2=4a^2-6a-10=\left(2a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$. 当 $a=3$ 时，$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=8$；当 $a=-2$ 时，$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=18$. 故 $(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ 的最小值为 8

第五讲　二元二次方程组

练习题　**1.** x，y 是方程 $t^2-5t+4=0$ 的两个根，则有 $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=4\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=4,\\y_2=1\end{cases}$　**2.** 原方程组转化为 $\begin{cases}x=0,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0,\\y+2x-10=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y=0,\\x+2y-10=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+2y-10=0,\\y+2x-10=0.\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}x_1=0,\\y_1=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=0,\\y_2=10,\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=10,\\y_3=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=\frac{10}{3},\\y_4=\frac{10}{3}\end{cases}$　**3.** 设 $x+y=u$，$xy=v$，则有 $\begin{cases}(u^2-2v)^2-v^2=91,\\u^2-3v=7.\end{cases}$ 所以解得原方程组的四组解为 $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3,\\y_2=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=-1,\\y_3=-3,\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=-3,\\y_4=-1\end{cases}$　**4.**

考虑 $\Delta=(4-a)^2-4\times[5-a(4-a)]\geqslant 0$，得 $\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant 2$. 选 D　**5.** 由 $(x^2+y^2+1)^2+(|x|-y)^2=0$ 得 $\begin{cases}x^2+y^2-1=0,\\ |x|-y=0.\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$　**6.** 令 $u=x+y$，$v=xy$，则由 $\begin{cases}u^3-3uv=40,\\ uv=8\end{cases}$ 得 $u=4$，$v=2$. 所以，有 x，y 是方程 $t^2-4t+2=0$ 的两根，从而解得 $\begin{cases}x_1=2+\sqrt{2},\\ y_1=2-\sqrt{2},\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=2-\sqrt{2}\\ y_2=2+\sqrt{2}\end{cases}$　**7.** 方程组化为 $\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ 2x+y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ x-2y=0.\end{cases}$ 解这两个方程组，得原方程组的解为 $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=-2,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-1,\\ y_2=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=2,\\ y_3=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=-2,\\ y_4=-1\end{cases}$　**8.** 令 $\sqrt{x+1}=u$，$\sqrt{y+1}=v$，则由方程组 $\begin{cases}u+v=3,\\ (u^2-1)(v^2-1)-(u^2-1)-(v^2-1)+15=0\end{cases}$ 得 $uv=0$ 或 $uv=-4$（舍去），从而求得原方程组的解为 $\begin{cases}x_1=8,\\ y_1=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-1,\\ y_2=8\end{cases}$　**9.** 易得 $(x-1)^2+z^2=0$，则有 $x=1$，$z=0$，于是方程组的解为 $x=1$，$y=1$，$z=0$　**10.** 设水流速度为 a，划船者在静水中速度为 b，则 $\begin{cases}\dfrac{15}{a+b}=\dfrac{15}{b-a}-5,\\ \dfrac{15}{2b+a}=\dfrac{15}{2b-a}-1,\end{cases}$ 解得 $a=2$　**11.** 由题意得 $3y^2-6y+z^2+3=0$，因 y 为实数，则关于 y 的方程的判别式 $\Delta_y=36-3\times 4(z^2+3)=-12z^2\geqslant 0$，故 $z=0$，从而 $y=1$，$x=3$. 于是 $x^{2y+z}=9$　**12.** 设 $x-y=a$，$y-z=b$，$z-x=c$，则有 $\begin{cases}a+b+c=0,\\ 1\,999a+2\,000b+2\,001c=0,\\ 1\,999^2a+2\,000^2b+2\,001^2c=0.\end{cases}$ 于是就有 $\begin{cases}b+2c=0,\\ 2\,000b+2\times 2\,001c=2\,000.\end{cases}$ 从而 $b=-2\,000$，即 $z-y=2\,000$　**13.** 由原方程组得 $x+y=4+z$，$xy=2+4z$，$x^3+y^3-z^3=34$. 解得 $x=2$，$y=3$，$z=1$，或 $x=3$，$y=2$，$z=1$　**14.** 设甲、乙、丙的工作效率是 a，b，c 则 $\begin{cases}ma=b+c,\\ mb=c+a,\\ mc=a+b.\end{cases}$ 于是 $\frac{m}{m+1}+\frac{n}{n+1}+$

$\frac{k}{k+1}=2$　**15.** 令 $x_1x_2x_3x_4x_5x_6=S$，则 $S=x_1^2=2x_2^2=3x_3^3=4x_4^4=6x_5^5=9x_6^6$，于是 $S^6=2\times3\times4\times6\times9x_1^2x_2^3x_3^4x_4^5x_5^6x_6^6$，即 $S^4=2^4\times3^4$，得 $S=6$. 故 $x_1=\sqrt{6}$，$x_2=\sqrt{3}$，$x_3=\sqrt{2}$，$x_4=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$x_5=1$，$x_6=\frac{\sqrt{6}}{3}$，从而有 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\frac{11}{6}\sqrt{6}$

测试题　**1.** 由原方程组得 $(4x+y)(x+y)=0$，即 $y=-4x$，或 $y=-x$. 于是就有 $\begin{cases}x_1=\frac{13}{4}+\frac{\sqrt{193}}{4},\\ y_1=-13-\sqrt{193};\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\frac{13}{4}-\frac{\sqrt{193}}{4},\\ y_2=-13+\sqrt{193};\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=-1,\\ y_3=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=-3,\\ y_4=3\end{cases}$　**2.** 由原方程组得 $\begin{cases}x+y=6,\\ xy=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=5,\\ xy=6.\end{cases}$ 于是解得 $\begin{cases}x_1=2,\\ y_1=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3,\\ y_2=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=1,\\ y_3=5,\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=5,\\ y_4=1\end{cases}$　**3.** 设队伍前进的速度为 v_1 米/时，通讯员的速度是 v_2 米/时，则通讯员从排尾追到排头所用时间为 $\frac{40}{v_2-v_1}$，通讯员从排头返回到排尾所用时间为 $\frac{40}{v_2+v_1}$，而队伍在此间前进了 30 米，所用时间为 $\frac{30}{v_1}$，从而有 $\frac{40}{v_2-v_1}+\frac{40}{v_2+v_1}=\frac{30}{v_1}$，得 $v_2=-\frac{1}{3}v_1$（舍去），$v_2=3v_1$. 故通讯员多行 90 米　**4.** 设甲、乙、丙三种货物单价分别为 x 元，y 元，z 元，则 $\begin{cases}3x+7y+z=3.15,\\ 4x+10y+z=4.20.\end{cases}$ 令 $x+y+z=a(3x+7y+z)+b(4x+10y+z)$，就有 $a=3$，$b=-2$. 故 $x+y-z=1.05$　**5.** 令 $x-2y=t$，则有 $\begin{cases}x^2-2x-4y=5,\\ x-2y=t,\end{cases}$ 有实数解. 那么由 $x^2-4x+2t-5=0$ 可知 $\Delta=4\times(9-2t)\geqslant0$，得 $t\leqslant\frac{9}{2}$，即 $x-2y\leqslant\frac{9}{2}$.

第六讲　函数的基本概念与性质

练习题　**1.** (1)$y=x^2+1$；(2)$y=|x|-1$　**2.** 由 $1=a\times(-1)+b$，$5=2a+b$ 得 $a=1\frac{1}{3}$，$b=2\frac{1}{3}$　**3.** (1) $-3\leqslant x<3$，且 $x\neq1$；(2) $-3\leqslant x\leqslant3$，且 $x\neq\frac{1}{2}$ 和 $x\neq1$　**4.** (1)$y=x^2$；(2)$y=ax$；(3)$y=\frac{s}{x}$　**5.** 汽车速度恒定后，离 A 的距离 s' 与离 A 所经过的时间 t' 之间有 $s'=40t'$，则 $s=s'+$

28，$t=t'+\frac{3}{4}$，即有 $t'=t-\frac{3}{4}\geqslant 0$，所以，$s=40t-2$，这里 $t\geqslant\frac{3}{4}$　**6.** 因为 $f(x+1)=(x+1)^2-5(x+1)+6$，所以 $f(x)=x^2-5x+6$　**7.** $y=(b-a)+(c-b)=c-a$，此时 $x=b$　**8.** 因为 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$，所以 $f(3)=3^2-2=7$　**9.** 因为 $f(x+3)=ax^2+(6a+b)x+9a+3b+c$，$f(x+2)=ax^2+(4a+b)x+4a+2b+c$，$f(x+1)=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$，于是有 $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)=0$　**10.** 由 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$ 得 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}}$，所以 $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$（或令 $t=\frac{1}{x}$，即 $x=\frac{1}{t}$ 代入 $f(x)$ 得）　**11.** 由 $f(1)=0$ 及 $a^2f(n+2)=b^2f(n)$ 得 $f(3)=0$，$f(5)=0$，…，即有 $n=2k+1$ 时 $f(n)=0$. 由 $f(2)=1$ 及 $a^2f(n+2)=b^2f(n)$ 得 $f(4)=\frac{b^2}{a^2}$，$f(6)=\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2$，$f(8)=\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^3$，…，即有 $n=2k$ 时，$f(n)=\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{k-1}$. 故有 $f(n)=\begin{cases}0 & n=2k+1,\\ \frac{b^{2k-2}}{a^{2k-2}} & n=2k\end{cases}$　**12.** 因为 $y=x\left(\frac{l}{2}-x\right)=-\left(x-\frac{l}{2}\right)^2+\frac{l^2}{4}$，所以当 $x=\frac{l}{2}$ 时，$y_{最大值}=\frac{l^2}{4}$.

测试题　**1.** (1)$x>0$；(2)$x>2$ 或 $x\leqslant 1$，但 $x\neq -4$　**2.** (1) $s\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{2\left(\frac{1}{t}\right)}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{2t}{1+t^2}=s(t)$；(2)$s^2(t)+c^2(t)=\frac{1}{(1+t^2)^2}[4t^2+(1-t^2)^2]=1$　**3.** 令 $t=\frac{2x+1}{x}$，则 $x=\frac{1}{t-2}$，所以，由 $f\left(\frac{2x+1}{x}\right)=x^2-3x+7$ 得 $f(t)=\left(\frac{1}{t-2}\right)^2-3\times\frac{1}{t-2}+7=\frac{1}{(t-2)^2}-\frac{3}{t-2}+7$. 即 $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{3}{x-2}+7$　**4.** 由题意得 $y=\frac{a^2-1}{a}x+\frac{2}{a}$，其中 $a>0$. 当 $a=1$ 时 $y=2$；当 $a>1$ 时，由 $0\leqslant x\leqslant 1$ 得 $y\geqslant\frac{a^2-1}{a}\cdot 0+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$，即 $x=0$ 时 y 取最小值为 $\frac{2}{a}$；当 $0<a<1$ 时，由 $0\leqslant x\leqslant 1$ 得 $y\geqslant\frac{a^2-1}{a}\cdot 1+\frac{2}{a}$，即

$x=1$ 时 y 取最小值为 $a+\frac{1}{a}$　**5.** 由题意知 $0=a\sqrt{2}+b(a\neq 0)$，则 a 与 b 中至少有一个数是无理数. 假设有两组有理数的对应值 x_1，y_1 和 x_2，y_2，则 $y_1=ax_1+b$. ①　$y_2=ax_2+b$. ② 由 ① − ② 得　$y_1-y_2=a(x_1-x_2)$，可知 a 为有理数. 由 ① $\times x_2$ − ② $\times x_1$ 得 $x_2y_1-x_1y_2=b(x_2-x_1)$，可知 b 也为有理数，这与 a、b 中至少有一个数是无理数矛盾

第七讲　一次函数与反比例函数

练习题　**1.** (1) 设 $y=kx$，则由 $-6=-2k$ 得 $k=3$，所以有 $a=-18$，$b=-12$，$c=0$，$d=15$　(2) 设 $y=\frac{k}{x^2}$，则由 $\frac{1}{18}=\frac{k}{(-3)^2}$ 得 $k=\frac{1}{2}$，所以有 $a=\frac{1}{8}$，$b=\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{8}$，$d=\frac{1}{18}$　**2.** 设 $y=k(x-2)$，则由 $9=k(5-2)$ 得 $k=3$，所以 $y=3\times(-3-2)=-15$　**3.** 由题意令 $y=kx^2$，则由 $19.6=k\times 2^2$ 得 $k=4.9$. 所以 $y=4.9\times 4^2=78.4$ m　**4.** 设 $y=kx$，则由 $3=k\times 1$ 得 $k=3$，故有 $b=3a$. 所以 $b=3\times(-2)=-6$　**5.** 设 $y=\frac{k}{x}$，则由 $18=\frac{k}{\frac{1}{3}}$ 得 $k=6$. 所以 $y=\frac{6}{x}$. 由 $xy=6$ 得 $x=1$，$y=6$；$x=6$，$y=1$；$x=2$，$y=3$；$x=3$，$y=2$. 所以正整数点(x,y)有 4 个　**6.** 如图 7-A(1)、(2)

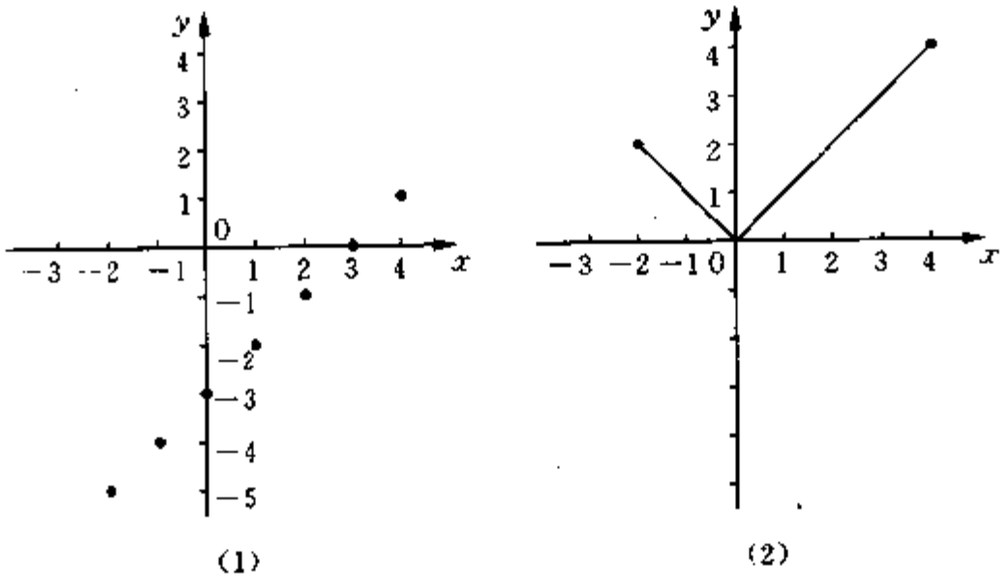


图 7-A

7. 对照例 1，可以求得 $y=-x+(a+b)$，$a\neq b$，$a\neq 0$，$b\neq 0$. 当 $a+b=0$ 时，函数 $y=-x$ 的图象经过第二、四象限；当 $a+b>0$ 时，函数 $y=-x+(a+b)$ 的图象经过第一、二、四象限；当 $a+b<0$ 时，函数 $y=-x-(a+b)$ 的图象经过第二、三、四象限　**8.** (1) $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times 10\times x=5x$，即 $y=5x$.

(2) 当 P 点在 CD 上，则 $10 \leqslant x \leqslant 20$. (3) $y = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50$，这里 $10 \leqslant x \leqslant 20$ **9.** 由题意知 $\begin{cases} 98a + b = 19, \\ p = -\frac{b}{a}, \\ q = b. \end{cases}$ 则 b 是正整数，a 为负整数. 所以有 $p = 98 - \frac{19}{a}$，当 $a = -1$ 时，$p = 117$ 不是质数；当 $a = -19$ 时，$p = 99$ 也不是质数. 故满足条件的一次函数不存在. 选 A **10.** 设 $y = kx + b$，则由 $-2 = k \times 0 + b$ 得 $b = -2$. 所以 $y = kx - 2$. 它的图象与 x 轴交点坐标为 $\left(\frac{2}{k}, 0\right)$，函数图象经过点 $(0, -2)$，于是有 $\frac{1}{2} \times \left|\frac{2}{k}\right| \times |-2| = \frac{1}{2}$，得 $k = \pm 4$. 从而推知函数解析式为 $y = 4x - 2$ 或 $y = -4x - 2$ **11.** 由题意得 $y = k_1 x$，$z = \frac{k_2}{y}$，这里 $k_1 \neq 0$，$k_2 \neq 0$. 于是 $z = \frac{\frac{k_2}{k_1}}{x}$，且 $\frac{k_2}{k_1} \neq 0$. 故选 (B) **12.** 设 $y + m = k(x + m)$，则有 $\begin{cases} 2 + m = k(1 + m), \\ 1 + m = k(-1 + m), \end{cases}$ 解之得 $k = \frac{1}{2}$，$m = -3$. 于是 $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ **13.** 对照例 8，可求得函数图象所围成区域的面积为 8 **14.** 如图 7-B.

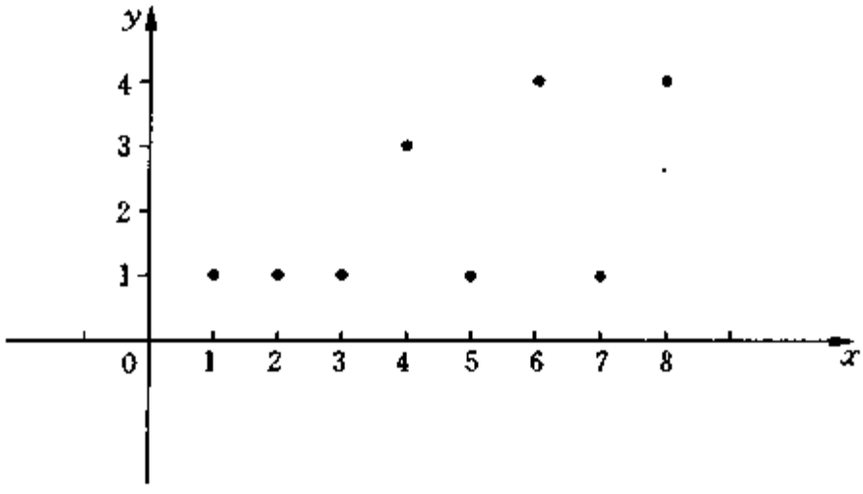


图 7-B

15. 作 $AD \perp x$ 轴于 D，$BE \perp x$ 轴于 E，$AF \perp BE$ 于 F. 则易知 $\triangle AFB \cong \triangle ADO$. 所以 $FB = OD$，$FA = ED = DA$. 又 $OA = 1$，$\angle DOA = 30°$，所以 $FA = ED = \frac{1}{2}$，$OD = \sqrt{OA^2 - DA^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$EB = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$，$OE = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$. 故点 B 的坐标为 $\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)$ **16.** 由题意知

$x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$，$z \geqslant 0$，且有 $z = 2x - 1 \geqslant 0$，$y = \frac{5}{3}(1 - x) \geqslant 0$. 故 $y \geqslant 0$，$z \geqslant 0$，$\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$. 于是 $u = \frac{1}{3} \times [43x - 22]$，当 $x = \frac{1}{2}$ 时，u 取得最小值 $-\frac{1}{6}$；当 $x = 1$ 时，u 取得最大值 7

测试题 1. 设 $y = k(x - 3)$，则由 $\frac{1}{2} = k \times (4 - 3)$ 得 $k = \frac{1}{2}$. 所以 $y = \frac{1}{2}(-2 - 3) = -\frac{5}{2}$ 2. 当 $a + b + c = 0$ 时，$p = -1$，则 $y = -x - 1$，此函数图象即直线经过第二、三、四象限；当 $a + b + c \neq 0$ 时，由合分比定理得 $p = 2$，则 $y = 2x + 2$，此直线经过第一、二、三象限. 所以直线 $y = px + p$ 一定经过第二、三象限. 故选 B 3. 一次函数 $y = 2x + a$ 与 x 轴交点为 $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$，与 y 轴交点为 $(0, a)$. 于是有 $\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + (-a)^2} = 5$，得 $a = \pm 2\sqrt{5}$ 4. 只有当 R 点取在线段 PQ 上，$PR + RQ$ 之值最小. 设 $y = kx + b$，则 $-2 = k \times (-1) + b$，且 $2 = 4k + b$. 得 $k = \frac{4}{5}$，$b = -\frac{6}{5}$. 于是有 $m = \frac{4}{5} \times 1 - \frac{6}{5}$，得 $m = -\frac{2}{5}$. 故当 $m = -\frac{2}{5}$ 时 $PR + RQ$ 取最小值 5. (1) 由题意知 $y = PF = EF - EP = AD - EP = 16 - x$，$0 \leqslant x \leqslant 16$ (2) $S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} \times DC \cdot PE = \frac{1}{2} \times 10 \times x = S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times AB \times PF = \frac{1}{2} \times 22 \times y$. 则 $22y = 10x$，即 $11 \times (16 - x) = 5x$. 得 $x = 11$，从而 $y = 5$. 于是 $\frac{PC}{BP} = \frac{PC}{BC - PC} = \frac{PE}{PF} = \frac{x}{y} = \frac{11}{5}$，即 $PC = \frac{11}{16}BC$. 又 $BC = \sqrt{AD^2 + (AB - CD)^2} = 20$，故 $PC = \frac{55}{4}$. 因此，在边 BC 上取点 P 距 C 点 $\frac{55}{4}$ 处

第八讲　二 次 函 数

练习题 1. 因为 $0 = -0^2 + 2m \cdot 0 + 1 - m^2$，则 $m^2 - 1 = 0$，即 $m = \pm 1$. 所以，当 $m = 1$ 时，二次函数为 $y = -x^2 + 2x = -(x - 1)^2 + 1$，此函数图象的顶点坐标为 $(1, 1)$；当 $m = -1$ 时，二次函数为 $y = -x^2 - 2x = -(x + 1)^2 + 1$，此函数图象的顶点坐标为 $(-1, 1)$ 2. 因为 $a < 0$，$-\frac{b}{2a} > 0$，$0 \cdot a + b \cdot 0 + c < 0$，$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c > 0$，$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c < 0$，$-\frac{b}{2a} <$

1，所以有 $a<0$，$b>0$，$c<0$，$a+b+c>0$，$a-b+c<0$，$2a-b<0$，从而推得 $ab<0$，$ac>0$，$2a-b<0$. 故选(A)　**3.** 由图象知 $0=a-b+c$，$-1=0\cdot a+b\cdot 0+c$，$a>0$，$-\frac{b}{2a}>0$，$\frac{4ac-b^2}{4a}<0$，则 $c=-1$，$b=a-1$. 又 $a\cdot 1^2+b\cdot 1+c<0$，即 $a+b+c<0$，而 $a+b+c=2(a-1)>-2$. 所以 $-2<a+b+c<0$　**4.** 由图象知 $a>0$，$-\frac{b}{2a}<0$，$a\cdot 0^2+b\cdot 0+c<0$，则有 $b>0$，$c<0$. 因而 $ac<0$，$a+b>0$. 故点 $(a+b, ac)$ 在第四象限，选(D)　**5.** 因 $x^2-100x+196=(x-2)(x-98)$，则当 $2\leqslant x\leqslant 98$ 时，$|x^2-100x+196|=-(x^2-100x+196)$. 所以当自变量 x 取 2，3，…，98 时函数值为 0，而当 x 取 1，99，100 时，$|x^2-100x+196|=x^2-100x+196$. 因此，所求的和为 $(1-2)(1-98)+(99-2)(99-98)+(100-2)(100-98)=97+97+196=390$. 故选(B)　**6.** 由题意知 $-\frac{b}{2a}=1$，得 $b=-2a$，于是有 $\begin{cases}a>0,\\ b=-2a,\\ a+b+c=5,\\ 9a+3b+c=1.\end{cases}$ 解之得 $a=-1$，$b=2$，$c=4$. 从而有 $y=-x^2+2x+4$　**7.** 当 $x-x^2\geqslant 0$，即 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y=1-x+x^2$；当 $x-x^2<0$ 即 $x>1$ 或 $x<0$ 时 $y=1+x-x^2$. 故选(C)　**8.** 由图象知 $a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c<0$，且 $-\frac{b}{2a}=1$，于是有 $3b>2c$. 选(D)　**9.** 因为二次函数图象的顶点为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，所以当 $a<0$ 时，若 $b>0$，则 $-\frac{b}{2a}>0$，且图象开口向下，但(B)中二次函数图象开口向上；若 $b<0$，则 $x=-\frac{b}{2a}<0$，但(D)中二次函数图象的对称轴 $x=-\frac{b}{2a}>0$. 故(B)、(D)不符合. 当 $a>0$ 时，若 $b>0$，则 $x=-\frac{b}{2a}<0$，但(A)中二次函数图象的对称轴 $x=-\frac{b}{2a}>0$. 故(A)不符合. 若 $b<0$，则 $x=-\frac{b}{2a}>0$. 因此可以选(C)　**10.** 由题意得 $\begin{cases}b^2-4ac=0,\\ a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=-9,\\ a\cdot 1^2-b\cdot 1+c=-1.\end{cases}$ 即有 $\begin{cases}b=4,\\ a+c=-5,\\ ac=4,\end{cases}$ 于是解得 $a=-1$，$b=4$，$c=-4$ 或 $a=-4$，$b=4$，$c=-1$. 从而有二次函数解析式为 $y=-x^2+4x-4$ 或 $y=-4x^2+4x-1$　**11.** 由题意得 $a-b+c=18$，①　$b^2-4ac=9a^2$，②　又 $b^2-4ac=9$，③　且 $-\frac{b}{2a}>0$，$\frac{4ac-b^2}{4a}<0$. ④　于是综合①、②、③、④得 $b=-7$，$c=10$　**12.** (1) 问题等价于方程 $(m-8)x^2-$

$2(m-4)x+m+2=0$ 有两个不同的实根. 于是有 $\begin{cases}m-8\neq 0,\\(-2(m-4))^2-4(m-8)(m+2)>0,\end{cases}$ 得 $m\neq 8$ 且 $m<16$. (2) 问题等价于方程 $x^2-3x+1-kx=0$ 无实数根. 于是有 $(3+k)^2-4<0$, 得 $-5<k<-1$ **13.** 考虑二次函数 $y=ax^2-(b-c)x+(a+b+c)$, 则 $x=0$ 时 $y_1=a+b+c$, $x=1$ 时 $y_2=2(a+c)$, 于是 $y_1y_2<0$. 从而推知此函数在 $x=0$ 和 $x=1$ 时函数值异号, 也就是其图象与 x 轴有两个交点. 因此, 必须有 $\Delta=(b-c)^2-4a(a+b+c)>0$, 即 $(b-c)^2>4a(a+b+c)$. **14.** (1) 由题意知 $\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{3}{2},\\9a+3b+c=-3,\\-\dfrac{b}{a}=2\cdot\dfrac{c}{a}.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b=-3a,\\9a+3b+c=-3,\\b=-2c.\end{cases}$ 解之得 $c=-3$, $a=-2$, $b=-6$. 于是有 $y=-2x^2+6x-3$ (2) 由 $-2x^2+6x-3>1$ 得 $1<x<2$, 由 $-2x^2+6x-3<-3$ 得 $x<-3$ 或 $x>0$. 于是有当 $1<x<2$ 时 $y>1$; 当 $x<3$ 或 $x>0$ 时 $y<-3$ (3) 因为 $y=-2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{3}{2}\right)\leqslant-\dfrac{3}{2}$, 所以当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时 y 有最大值, 且为 $-\dfrac{3}{2}$ (4) 图象略

测试题 **1.** 由图象可知 $a>0$, $-1<-\dfrac{b}{2a}<0$, $\dfrac{4ac-b^2}{4a}<0$, $a\cdot 0^2+b\cdot 0+c<0$, $a-b+c=0$, $a+b+c>0$. 于是 $a>0$, $b>0$, $c<0$, $a+b+c>0$, $a-b+c=0$, $b^2-4ac>0$ **2.** (1) 由图象 $a<0$, $-\dfrac{b}{2a}>0$, $\dfrac{c}{a}<0$, $b^2-4ac>0$, 则 $a<0$, $b>0$, $c>0$, $b^2-4ac>0$. (2) 因为 $x=0$ 时, $y=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=c$; $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$; $ax^2+bx+c=0$ 的两根为 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. 所以, A、B、D、M 的坐标分别为 $\left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$、$\left(\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$、$(0,c)$、$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$. (3) $|AB|=\left|\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$. (4) $OA\cdot OB=\dfrac{c}{a}$. (5) 由 $|OA|=|OD|$ 得 $\left|\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|=c$, 即 $ac-b+1=0$ **3.** 由题意知 $4+2p+q=-1$,

即 $2p+q=-5$. 又 $|ab|=\sqrt{(a+b)^2-4ab}=\sqrt{(-p)^2-4q}=\sqrt{p^2-4q}$，点 $M\left(-\frac{p}{2},\frac{4q-p^2}{4}\right)$，则 $S_{\triangle AMB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot\left|\frac{4q-p^2}{4}\right|=\frac{1}{8}|a-b|(p^2-4q)=\frac{1}{8}(p^2-4q)^{\frac{3}{2}}$. 要使 $S_{\triangle AMB}$ 为最小，只须使 p^2-4q 为最小. 而 $p^2-4q=p^2+8p+20=(p+4)^2+4$，其最小值为 4. 此时 $p=-4$. 于是当 $p=-4$，$q=3$ 时，$S_{\triangle AMB}$ 最小，且为 $\frac{1}{8}\cdot(4)^{\frac{3}{2}}=1$. 故满足要求的二次函数为 $y=x^2-4x+3$ **4.** 二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象与 x 轴交点的横坐标. 于是由 $y=x^2-2mx+m^2-1=(x-m)^2-1$，$y=x^2-2mx+k=(x-m)^2+k-m^2$，可知原问题等价于 m 与 k 满足　当 $x=m$ 时，$k-m^2<-1$，即 $k<m^2-1$.

第九讲　函数的最大值与最小值

练习题　**1.** 因为 $y=(x-2)^2-1$，$0<2<5$，则函数的最小值为 -1. 又当 $x=0$ 时，$y=3$；当 $x=5$ 时，$y=8$. 所以，$x=5$ 时 y 有最大值 8　**2.** 因为 $y=3x^2+(2a+2b+2c)x+(a^2+b^2+c^2)$，所以函数的最小值为 $\frac{4\times3\times(a^2+b^2+c^2)-(2a+2b+2c)^2}{4\times3}=\frac{2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}{3}$　**3.** 因为 $-x^2+6x-5=-(x-3)^2+4\leqslant4$，等号成立当且仅当 $x=3$，所以 $-\sqrt{-x^2+6x-5}$ 的最大值为 -2，从而知函数的最小值为 1　**4.** 由题意知 $(x-5)^2+(x-4)^2+\cdots+x^2+\cdots+(x+4)^2+(x+5)^2=11(x^2+10)=y^2$，则当 $x^2=1$ 时，y 取得最小值 -11.　**5.** (1) $S_{\triangle PEF}=-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{4}$；　(2)当 $x=1$ 时，$S_{\triangle PEF}$ 有最大值为 $\frac{1}{4}$　**6.** 因为 $S=2x+5y^2=-\frac{5}{2}x^2+2x+\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}\left(x-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{29}{10}$，又 $-1\leqslant x\leqslant1$，所以，$S\leqslant\frac{29}{10}$，且当 $x=-1$ 时 $S=-2$；当 $x=1$ 时 $S=2$. 从而推知 $2x+5y^2$ 的最大值为 $\frac{29}{10}$，此时 $x=\frac{5}{2}$；最小值为 -2，此时 $x=-1$　**7.** 由 $\triangle EDB\backsim\triangle ACB$ 得 $\frac{m_1}{m}=\frac{BD}{BC}$，由 $\triangle ACD\backsim\triangle BCA$ 得 $\frac{m_2}{m}=\frac{DC}{AC}=\frac{AC}{BC}$，所以 $\left(\frac{m_2}{m}\right)^2=\frac{DC}{BC}=1-\frac{BD}{BC}=1-\frac{m_1}{m}$，从而 $\frac{m_1+m_2}{m}=1-\left(\frac{m_2}{m}\right)^2+\frac{m_2}{m}=-\left(\frac{m_2}{m}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\leqslant\frac{5}{4}$　**8.** 当 $m<-1$，$x=1$ 时，函数 y 有最大值 $-2m-1$；当 $m>-1$，$x=1$ 时，函数 y 有最小值 $-2m-1$　**9.** 因为 $y=f(x)=\begin{cases}x^2-3x & x\geqslant0,\\ -x^2-x & x\leqslant0.\end{cases}$ 所以，当 $-1\leqslant a\leqslant$

0 时，$f(x)$ 的最小值是 $f(-1)=f(0)=0$；当 $0<a<\frac{3}{2}$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f(a)=a^2-3a$；当 $a\geqslant\frac{3}{2}$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}$　**10.** 设 $NP=x$，则 $PM=2+2\times(4-x)=10-2x$，所以 $S_{PNDM}=x\cdot(10-2x)=2\left[-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\right]=-2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$. 当 $x=\frac{5}{2}$ 时，S_{PNDM} 取最大值 $\frac{25}{2}$　**11.** $a=0$ 时，$y=\frac{7}{3}$；$a\neq0$ 时，必须有 $a^2-4a\times3<0$，即 $0<a<12$. 故 $0\leqslant a<12$　**12.** 令 $y=mx^2+(m+2)x-9m$，则 $m\neq0$，且 $x_1+x_2=-1-\frac{2}{m}$，$x_1\cdot x_2=-9$，$\Delta>0$. 又 $x_1<1<x_2$，所以当 $m<0$ 时，$m\cdot1^2+(m+2)\cdot1-9m>0$，得 $m<\frac{2}{7}$；当 $m>0$ 时，$m\cdot1^2+(m+2)-9m<0$，得 $m>\frac{2}{7}$. 故 $m<0$ 或 $m>\frac{2}{7}$　**13.** $y=(x-2a)^2+a^2-3a$，其最小值为 $m=a^2-3a$，此时 $x=2a$.　又 $m=a^2-3a=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$，且 $0\leqslant a^2-4a-2\leqslant10$，于是 $2-\sqrt{6}\geqslant a\geqslant-2$，或 $2+\sqrt{6}\leqslant a\leqslant6$，从而有当 $a=-2$ 时，$m=10$；当 $a=6$ 时，$m=36-18=18$. 因此，m 的最大值为 18　**14.** 因为 $\triangle PQR$ 为直角三角形，$\triangle APR$ 和 $\triangle PBQ$ 都是等腰直角三角形. 于是 $y=\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}[x^2-(a-x)^2]=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}$. 当 $x=\frac{a}{2}$ 时，y 取最大值 $\frac{a^2}{4}$. 此时 P 为 AB 中点

测试题　**1.** $y=(x-a)^2-a^2$，当 $a\geqslant1$ 时，y 最大值为 0，最小值为 $1-2a$；当 $0\leqslant a<\frac{1}{2}$ 时，y 最大值为 $1-2a$，最小值 $-a^2$；当 $\frac{1}{2}<a<1$ 时，y 最大值为 0，最小值 $-a^2$；当 $a<0$ 时，y 最小值为 0，最大值为 $1-2a$　**2.** 由题意知 $|a-1|+|a-6|+|b+3|+|b-2|=10$. 又 $|a-1|+|a-6|\geqslant5$，$|b+3|+|b-2|\geqslant5$，所以，只有当 $1\leqslant a\leqslant6$ 及 $-3\leqslant b\leqslant2$ 时上等式成立. 因而，a^2+b^2 的最大值为 $6^2+(-3)^2=45$，此时 $a=6$，$b=-3$　**3.** 由题意知 $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+3 & x<1,\\ x-1 & 1\leqslant x\leqslant4,\\ x^2-4x+3 & x>4.\end{cases}$ 于是有 $f(x)-x=\begin{cases}x^2-5x+3 & x<1,\\ -1 & 1\leqslant x\leqslant4,\\ x^2-5x+3 & x>4.\end{cases}$ 当 $0\leqslant x<1$ 时，$-1<f(x)\leqslant3$；当 $-1\leqslant x\leqslant4$ 时，$f(x)-x=-1$；当 $4<x\leqslant5$ 时，$-1<f(x)\leqslant3$. 故 $0\leqslant x\leqslant5$ 时

$-1 \leqslant f(x) \leqslant 3$. **4.** 由题意知 $a+\frac{150}{b}=40$，则有 $y=x\left(a+\frac{x}{b}\right)-\left(\frac{1}{10}x^2+5x+1\,000\right)=\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{10}\right)x^2+(a-5)x-1\,000=\left(\frac{40-a}{150}-\frac{1}{10}\right)x^2+(a-5)x-1\,000=-\frac{a-25}{150}\left(x-\frac{75(a-5)}{a-25}\right)^2+\frac{75(a-5)^2}{2(a-25)}-1\,000$. 于是有 $\begin{cases}-\frac{a-25}{150}<0,\\ \frac{75(a-5)}{a-25}=150,\end{cases}$ 得 $a=45$，从而 $b=-30$ **5.** 由 $a>b>c$ 及 $a+b+c=0$ 得 $c<0$，$a>0$，且 $a>-(a+c)>c$，即 $2a>-c$，及 $-a>2c$，于是 $-2<\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$. (1) 要使函数图象与 x 轴有两个不同的交点，则必须使方程 $ax^2+2bx+c=0$ 有两个不同的实根. 因此，考虑根的判别式 $\Delta=4b^2-4ac=4(-(a+c))^2-4ac=4[a^2+ac+c^2]=4[(a+c)^2-ac]$，由 $a>0$，$c<0$ 知 $(a+c)\geqslant 0$，$-ac>0$，故 $\Delta>0$. 所以此函数图象与 x 轴交于不同的两点 $(x_1,0)$ 与 $(x_2,0)$. (2) 由于 $x_1+x_2=-\frac{2b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$，且 $d=|x_1-x_2|$. 所以 $d=2\sqrt{\frac{b^2-ac}{a^2}}=2\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2+\frac{c}{a}+1}=2\sqrt{\left(\frac{c}{a}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$. 又因为 $-2<\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$，于是 $2\cdot\sqrt{0^2+\frac{3}{4}}<d<2\sqrt{\left(-2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$，即 $\sqrt{3}<d<2\sqrt{3}$

第十讲　一元二次不等式

练习题　**1.** 化为 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2<0$，得原不等式无解

2. 由 $x^2-2x-3>2$ 得 $x<1-\sqrt{6}$ 或 $x>1+\sqrt{6}$；由 $x^2-2x-3<-2$ 得 $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$. 所以原不等式的解为 $x<1-\sqrt{6}$，或 $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$，或 $x>1+\sqrt{6}$　**3.** 原不等式的解为 $x<-1$ 或 $x>5$　**4.** 当 $a\leqslant 0$ 时，不等式的解为 $x<\frac{a}{8}$ 或 $x>-\frac{a}{7}$；当 $a>0$ 时，不等式的解为 $x<-\frac{a}{7}$ 或 $x>\frac{a}{8}$　**5.** 由 $x^2+ax+1\leqslant 0$ 得唯一解，则必须有 $a^2-4=0$，即 $a=\pm 2$. 而 $x^2\pm 2x+5>0$，所以，当 $a=2$ 时，唯一解为 $x=-1$；当 $a=-2$ 时，唯一解为 $x=1$　**6.** 原不等式的解为 $1<x<2$　**7.** 由 $2x^2<x+6$ 得 $-\frac{3}{2}<x<2$；又 $x^2-2x>ax-2a$ 得 $(x-2)(x-a)>0$. 当 $a\geqslant 2$ 时，

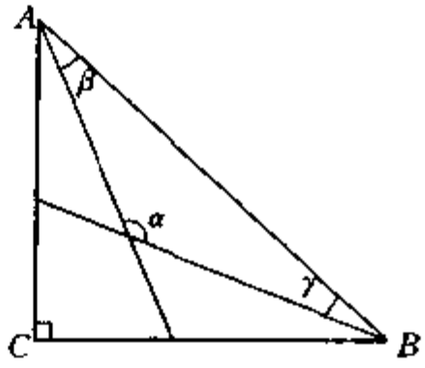
不等式组的解为 $-\frac{3}{2}<x<2$；当 $-\frac{3}{2}<a<2$ 时，不等式组的解为 $-\frac{3}{2}<x<a$；当 $a<-\frac{3}{2}$ 时，不等式组无解　**8.** 由题意得 $2x^2+(2a+2)x+a^2-1\leqslant 0$，且有唯一解．所以有 $(2a+2)^2-4\times 2\times(a^2-1)=0$，得 $a=-1$ 或 $a=3$．从而有 $a=-1$ 时，唯一解为 $x=0$，$y=-1$；$a=3$ 时，唯一解为 $x=-2$，$y=1$　**9.** 不等式的解为 $x<\alpha$，$\beta<x<\gamma$　**10.** 由题意得 $(k+3)^2-4(2k+3)>0$，且 $-(k+3)<0$，$2k+3<0$，于是有 $-3<k<-\frac{3}{2}$　**11.** 因为 $f(x)=x^2-2ax+6=(x-a)^2+6-a^2$，所以当 $a<-2$ 时，必有 $f(-2)\geqslant a$，解得 $-\frac{10}{3}\leqslant a<-2$；当 $-2\leqslant a\leqslant 2$ 时，必有 $6-a^2\geqslant a$，解得 $-2\leqslant a\leqslant 2$；当 $a>2$ 时，不能使得 $f(x)\geqslant a$ $(-2\leqslant x\leqslant 2)$．所以满足要求的 a 为 $-\frac{10}{3}\leqslant a\leqslant 2$　**12.** 因为 $1<x<2$ 可为 $x^2-3x+2<0$，所以，$a<0$ 且有 $x^2+bx+\frac{b}{a}<0$，从而得 $b=-3$，$\frac{b}{a}=2$，即 $a=-\frac{3}{2}$　**13.** 由题意知 $-3<x<-1$，即 $x^2+4x+3<0$，于是有 $(2x+5)(x+k)<0$．当 $k<\frac{5}{2}$ 时，有 $-\frac{5}{2}<x<-k$，但要使 $x=-2$，则 $-k>-2$，得 $k<2$．所以，当 $k<2$ 时，可使得只有一个整数 -2　**14.** 令 $\frac{x+y}{2}=\frac{y+z}{3}=\frac{z+x}{7}=k$，则 $x=3k$，$y=-k$，$z=4k$．从而有 $26k^2+6ak+1>0$．所以 $\Delta=(6a)^2-4\times 26<0$，得 $-\frac{\sqrt{26}}{3}<a<\frac{\sqrt{26}}{3}$　**15.** 由题意知 $b+c=\frac{1}{2}(a^2-a)>a$，得 $a>3$．又 $a+2(b-c)+3=0$ 知 $c-b=\frac{1}{2}(a+3)>0$，得 $c>b$．而 $4c=a^2+3$，于是 $4c-4a=a^2-4a+3=(a-3)(a-1)>0$，得 $c>a$．故 c 边最大

测试题　**1.** 因为 $2x^2+3x+5m=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+5m-\frac{9}{8}$，所以 $5m-\frac{9}{8}\leqslant 0$，且 $2+3+5m>0$ 得 $-1<m\leqslant\frac{9}{40}$　**2.** 分式方程化为 $x^2+(k-5)x+(2k-2)=0$，且 $x\neq\pm 2$．于是有 $\Delta=(k-5)^2-4(2k-2)=k^2-18k+33>0$，$2^2+2(k-5)+2k-2\neq 0$，$(-2)^2-2(k-5)+2k-2\neq 0$，即 $k^2-18k+33>0$，且 $k\neq 2$．故选(B)　**3.** (1) 由 $a^3+b^3-x^3>(a+b-x)^3$ 得 $-3(a+b)(x-a)(x-b)>0$．因为 $0<a<b$，所以 $a<x<b$　(2) 设 $f(x)=a^3+b^3-x^3-(a+b-x)^3-m=-3(a+b)\left(x-\frac{a-b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(a+$

$b)(a-b)^2-m$. 由于 $-3(a+b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$ 的最小值为 0，所以有 $\frac{3}{4}(a+b)(a-b)^2-m\leqslant 0$，即 $m\geqslant\frac{3}{4}(a+b)(a-b)^2$，得 m 的最小值为 $\frac{3}{4}(a+b)(a-b)^2$ **4.** 当 $a=0$ 时，方程根为 $x_0=-\frac{c}{b}=\frac{m}{m+1}$，即 $0<x_0<1$. 若 $b=0$，则 $c=0$，所以也有 $0<x_0<1$. 当 $a>0$ 时，令 $f(x)=ax^2+bx+c$，则有 $f\left(\frac{m}{m+1}\right)=-\frac{ma}{(m+1)(m+2)}<0$. 若 $c>0$，则 $f(0)=c>0$，必有一根 x_0 满足 $0<x_0<\frac{m}{m+1}<1$；若 $c\leqslant 0$，则 $f(1)=a+b+c=\frac{a}{m+2}-\frac{c}{m}>0$，故必有一根满足 $0<\frac{m}{m+1}<x_0<1$

第十一讲　锐角三角函数

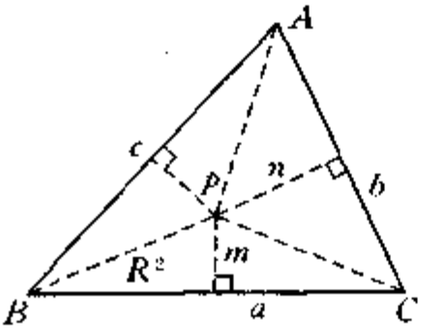
练习题　**1.** 由 $\sin\alpha>\sin\beta$ 得 $\cos\alpha<\cos\beta$，于是有 $\tan\alpha>\tan\beta$，选 (B)　**2.** 选 (A)　**3.** 因为等式左边等于 $\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=$ 右边，故等式成立　**4.** 原式 $=\frac{2+\cot\alpha}{2-\cot\alpha}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$　**5.** 如图，$2\beta=\angle A$，$2\gamma=\angle B$，则 $\alpha=180^\circ-(\beta+\gamma)$，于是 $2\alpha=360^\circ-(2\beta+2\gamma)=360^\circ-A-B=360^\circ-90^\circ=270^\circ$，从而有 $\frac{2}{9}\alpha=\frac{2}{9}\times 270^\circ=60^\circ$，故 $\sin\frac{2}{9}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$



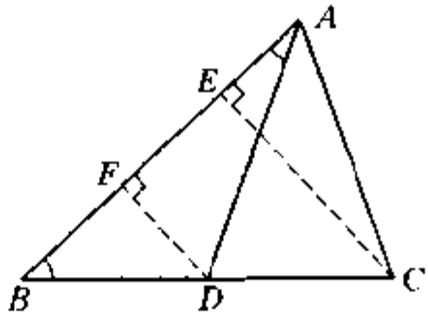
6. $\sin A=1$，得 $A=90^\circ$；$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $B=30^\circ$，所以 $C=180^\circ-A-B=60^\circ$，$\tan C=\sqrt{3}$　**7.** 由题意得 $(2+\sqrt{3})^2-8(2+\sqrt{3})\cos\alpha+1=0$，则 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，得 $\alpha=60^\circ$，于是 $\tan\frac{3}{4}\alpha=1$　**8.** 由 $45^\circ<\alpha<90^\circ$ 得 $\cos\alpha>\sin\alpha$，即 $\cos\alpha-\sin\alpha>0$，则 $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=1-2a$，于是就有 $\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{1-2a}$ $\left(\text{这里 } a\leqslant\frac{1}{2}\right)$　**9.** 由题意 $\cos\alpha\leqslant 1$，于是由 $\frac{1}{\sin\alpha}>1$ 得 $x=\frac{1}{\sin\alpha}-\cos\alpha>0$，$y=\sin\alpha-\frac{\sin\alpha}{|\cos\alpha|}<0$. 故点 (x,y) 在第四象限　**10.**

因为$\frac{1}{x}-\frac{1}{a}=\frac{(a-b)\cos^2\alpha}{ax}=\frac{a-b}{a^2\tan^2\alpha+ab}=\frac{a-b}{b^2\tan^2\beta+ab}=\frac{(a-b)\cos^2\beta}{by}=\frac{1}{b}-\frac{1}{y}$，所以$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$　**11.** 假设$\frac{a-b}{a+b}<\frac{a\sin\alpha+b}{a\sin\alpha-b}<\frac{a+b}{a-b}$，即有$\frac{a\sin\alpha+b}{a\sin\alpha-b}<\frac{a+b}{a-b}$，$\frac{a\sin\alpha+b}{a\sin\alpha-b}>\frac{a-b}{a+b}$. 当$a\sin\alpha-b>0$，即$\frac{b}{a}<\sin\alpha\leqslant 1$时$ab-ab\sin\alpha<-ab+ab\sin\alpha$，得$\sin\alpha>1$矛盾. 当$a\sin\alpha-b<0$即$0\leqslant\sin\alpha<\frac{b}{a}$时，得$\sin\alpha<1$且$\sin\alpha<-1$，矛盾. 故结论成立　**12.** 由$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$知$1\geqslant\sin x\geqslant 0$，$1\geqslant\cos x\geqslant 0$，于是$4\cos x\cdot\sin x+2\cos x-2\sin x-1=(2\sin x+1)\cdot(2\cos x-1)\geqslant 0$，因$2\sin x+1>0$，故$\cos x\geqslant\frac{1}{2}$. 从而知$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$

测试题　**1.** 因$45°<\alpha<90°$，则$\cos\alpha-\sin\alpha=a>0$. 于是$1-2\cos\alpha\sin\alpha=a^2$，即$\cos\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}(1-a^2)$. 从而有$\left|\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha}\right|=\frac{a}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{2a}{1-a^2}$　**2.** 由题意得$\tan^2\beta=\tan\alpha\cdot\tan\gamma$，$\tan^2\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta$，$\tan^2\alpha=\tan\beta\cdot\tan\gamma$，于是有$\tan\alpha=\tan\beta=\tan\gamma$，从而得$\alpha=\beta=\gamma$　**3.** 如图，设$\triangle ABC$的外接圆半径为R，则$m=\sqrt{R^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-a^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2A}-a^2}=\frac{a}{2}\cdot\frac{\cos A}{\sin A}=R\cos A$，同理得$n=R\cos B$，$p=R\cos C$，于是$m:n:p=\cos A:\cos B:\cos C$，选(C)　**4.** 过点$C$作$CE\perp AB$于$E$，过点$D$作$DF\perp AB$于$F$. 因$D$为$BC$中点，所以$CE=2DF$，$BF=EF$. 从而有$\cot\angle BAD=\frac{AF}{DF}$，$\cot B=\frac{BF}{DF}$. 得$\cot\angle BAD-\cot B=\frac{AF-BF}{DF}=\frac{AE}{DF}$，即$\cot\angle BAD-\cot B=\frac{AE}{CE}\cdot 2=2\cot\angle BAC$



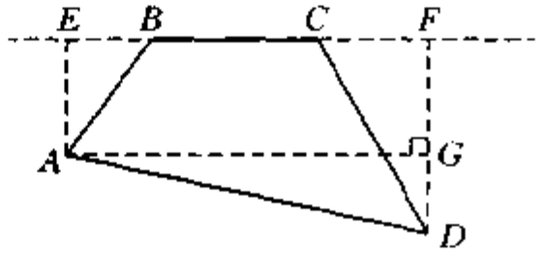
第3题



第4题

第十二讲　解直角三角形

练习题　**1.** 由题意得 $x^2-2ax+b^2+ac-bc=0$，因它只有一个解，则必有 $b^2+ac-bc=a^2$. 于是由 $c<a+b$ 得 $a=b$，即 $\triangle ABC$ 为等腰三角形　**2.** 令 $AB=a$，则 $AD=\frac{a}{2}$，$BD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$AE=\frac{1}{2}AD=\frac{a}{4}$，则 $AE:BD=\frac{a}{4}:\frac{\sqrt{3}}{2}a=1:2\sqrt{3}$　**3.** 在直角三角形 ABC 中，因 $\angle B=90°$，则 $AB^2+BC^2=AC^2$. 由 $AB:BC:CD:DA=2:2:3:1$，得 $AB=BC=2a$，$CD=3a$，$DA=a$. 于是 $AC^2=8a^2$. 又 $8a^2+a^2=9a^2$，即有 $AC^2+AD=CD^2$. 故 $\angle DAC=90°$. 又 $\angle BAC=45°$，从而 $\angle BAD=135°$　**4.** 在边 AC 上取一点 D，使得 $BD=AD$，则有 $\angle CDB=30°$. 令 $AD=a$，有 $BD=a$，于是 $BC=\frac{1}{2}a$，$CD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. 从而有 $\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a+a\right)^2=10^2$，即 $a^2=\frac{100}{2+\sqrt{3}}$. 故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot CA=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a+a\right)=\frac{1}{8}(2+\sqrt{3})a^2=\frac{25}{2}$　**5.** 作 $CD\perp AB$ 交 AB 于 D，则有直角三角形 ADC 和 $\triangle BCD$. 于是 $DC=DB=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$AD=CD\cdot\cot A=\frac{\sqrt{6}}{2}a$，从而 $AB=AD+DB=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a$　**6.** 过点 A 作 $AE\perp BC$ 交直线 BC 于 E，过 D 作 $DF\perp BC$ 交直线 BC 于 F，过 A 作 $AG\perp DF$ 于 G，则 $AE=BE=\sqrt{\frac{AB^2}{2}}=\sqrt{3}$，又 $\angle FCD=60°$，$\angle FDC=30°$，则 $CF=\frac{1}{2}CD=3$，$DF=3\sqrt{3}$，所以 $AG=8$，$DG=2\sqrt{3}$，从而 $AD=2\sqrt{19}$



7. 同例 7 求法，得 $S_{\triangle ECF}=\frac{\sqrt{3}}{14}a^2$　**8.** 由 $\frac{b}{c+a}+\frac{a}{c+b}=\frac{17}{20}$，$\frac{c-a}{b}+\frac{c-b}{a}=\frac{17}{20}$，$a^2+b^2=c^2$ 得 $a+b=\frac{23}{17}c$，于是就有 $ab=\frac{120}{17^2}c^2$，从而得 $\frac{a}{c}=\frac{8}{17}$，$\frac{b}{c}=\frac{15}{17}$ 或 $\frac{a}{c}=\frac{15}{17}$，$\frac{b}{c}=\frac{8}{17}$. 故 $a:b:c=8:15:17$，或 $a:b:c=15:8:17$　**9.** 由题意 $\left(\frac{2}{3}\times\frac{c}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}\times\frac{2}{3}\right)^2=a^2$，得 $3a^2=c^2$，$3b^2=2c^2$，于是有 $a:b:c=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$　故选(D)　**10.** 设

$AC=x$，$BC=y$，则有$\frac{y}{\sin D}=\frac{1}{\sin 30°}$，即$y=2\sin D$. 又$\frac{1}{\sin D}=\frac{x+1}{\sin(90°+30°)}$得$\sin D=\frac{\sqrt{3}}{x+1}$. 于是利用$x^2-y^2=1$得$x^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{x+1}\right)^2=1$，则$x=\sqrt[3]{2}$　**11.** 若x为最大边，则由余弦定理得$5<x<7$；若x为最小边，则由余弦定理得$1<x<\sqrt{7}$　**12.** 由题意得$a^2+b^2=c^2$，可以构成直角三角形　**13.** 由题意得$a:b=\sqrt{2}:1$，即$a=\sqrt{2}b$. 又$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，有$b^2=c^2-2bc\cos A$，而$b^2=c^2-\sqrt{2}bc$，故$\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得$A=45°$，于是$\sin B=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin A=\frac{1}{2}$，从而$B=30°$，$C=105°$　**14.** 令$AE=b$，则$DE=a-b=CF$，$DF=b$，于是由余弦定理得$EF^2=DF^2+DE^2-2DE\cdot DF\cos 120°$，$BF^2=BC^2+CF^2-2BC\cdot CF\cos 60°$，$BE^2=AB^2+AE^2-2AB\cdot AE\cdot\cos 60°$，从而推知$\triangle BEF$为正三角形. 易知$S_{\triangle BEF}=S_{ABCD}-S_{\triangle DEF}-S_{\triangle BCF}-S_{\triangle AEB}$. 求得面积的最小值为$\frac{3\sqrt{3}}{16}a^2$　**15.** 由$ac\cos A+bc\cos B<4S$，余弦定理$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$及$S=\frac{1}{2}ab\sin C\leqslant 2ab$推得$c^2<a^2+b^2$，故知$\triangle ABC$为锐角三角形. 反之亦然

测试题　**1.** 由$a+c=6$，$\frac{a}{c}=\sin A$，$\angle A=60°$得$\angle B=30°$，且$a=12\sqrt{3}-8$，$c=24-12\sqrt{3}$，则$b=c\sin B=12-6\sqrt{3}$　**2.** 过B作$BD\perp AC$交于D，(1) 点D在边AC上，令$AD=a$，则$CD=\sqrt{6^2-a^2}$，$AD=a\cdot\cot 30°=6\sqrt{3}-CD$，于是有$a=3$. 从而$AB=6$. (2) 点$D$在$AC$延长线上，$AD=\sqrt{3}a=6\sqrt{3}+CD$，得$a=6$，从而$AB=12$. 故$AB$的长为6或12　**3.** 延长$AD$、$BC$交于$E$，则$\angle AEB=30°$，且有$AE=2AB=8$，$ED=3$，所以$CD=DE\cdot\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 3=\sqrt{3}$，$EC=2\sqrt{3}$，$EB=4\sqrt{3}$，从而$BC=2\sqrt{3}$. 故$\frac{BC}{CD}=2$　**4.** $\angle ACB=90°$，则$AC+BC=14$，$AC^2+BC^2=10^2$，于是$2AC\cdot BC=4\times 24$，从而$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=24$　**5.** 显然$c>a$，且有$b^2+a^2+ab=c^2$，故$c>b$. 又由余弦定理知$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$，得$C=120°$　**6.** 设$\triangle ABC$的两腰$AB=AC=x$，中线$BD=l$，于是有

$x^2 = l^2 \times \dfrac{1}{\dfrac{5}{4} - \cos\alpha}$，从而 $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}x^2\sin\alpha = \dfrac{2\sin\alpha}{5 - 4\cos\alpha}l^2$. 令 $\dfrac{\sin\alpha}{5 - 4\cos\alpha} = y$，则 $y^2(5 - 4\cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha$，即 $(16y^2 + 1)\cos^2\alpha - 40y^2\cos\alpha + 25y^2 - 1 = 0$. 因 $\cos\alpha$ 为实数，则 $\Delta \geqslant 0$，即 $y \leqslant \dfrac{1}{3}$，从而 $S_{\triangle ABC} \leqslant \dfrac{2}{3}l^2$. 当 $y = \dfrac{1}{3}$ 时，$\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$，故 $S_{\triangle ABC}$ 的最大值为 $\dfrac{2}{3}l^2$

第十三讲　圆的基本性质

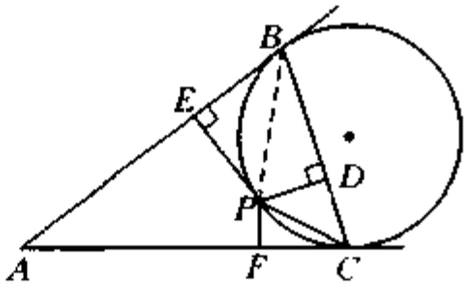
练习题　1. 过 O 作 $OH \perp CD$ 交于 H，则 OH 为弦心距且有 $OH = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$. 由 $OH \parallel AE \parallel BF$ 得 $\dfrac{AE}{OH} = \dfrac{10 + OG}{OG}$，$\dfrac{BF}{OH} = \dfrac{10 - OG}{OG}$，于是　$AE - BF = 2OH = 12$　2. 取 $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CD}$，且 E 在劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上，于是 $BE = CD = 6$. 由 $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DA}$ = 半圆得 $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BE}$ = 半圆，AE 为 $\odot O$ 直径，此时 $AE^2 = AB^2 + BE^2 = 136$. 因而两个弓形面积的和为 $\dfrac{1}{8}\pi \cdot AE^2 - \dfrac{1}{2}AB \cdot BE = \dfrac{1}{8}\pi \times 136 - \dfrac{1}{2} \times 60 = 17\pi - 15$. 故 $[x] = 38$　3. 由题意知 $\triangle CDE \backsim \triangle ABE$，得 $S_{\triangle CDE} : S_{\triangle ABE} = DE^2 : AE^2$. 又 $\angle ADE = 90°$，则 $\dfrac{DE}{AE} = \cos\alpha$，于是 $\dfrac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABE}} = \cos^2\alpha$　4. 过 A 作直径 AE，连结 CE，则 $\triangle ACE$ 为直角三角形. 因 $AC = b$，$AE = d$，则 $\sin B = \sin E = \dfrac{b}{d}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，$CD = BC \cdot \sin B = \dfrac{ab}{d}$　5. 过 D 作关于 AB 对称的点 D'，D' 在圆 O 上，延长 CO 交 $\odot O$ 于 E，则 $\angle D'OE = 60°$，于是 $\angle ECD' = 30°$，$\angle CD'E = 90°$. 从而有 $CD' = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. 因此 $PC + PD$ 的最小值为 $\sqrt{3}$　6. 易知(C). 因为 $\angle DEA = 90° = \angle AD'B = \angle AFD = \angle AD'C$. 于是由 $\triangle AED \backsim \triangle AD'B$ 和 $\triangle AFD \backsim \triangle AD'C$ 得 $AE \cdot AB = AF \cdot AC$　7. 依据规律得长方形的长为 8 cm，宽为 6 cm　8. 在 $\triangle OMN$ 中，$MN = \dfrac{ON\sin\angle MON}{\sin\angle OMN}$. 在 $\triangle OPN$ 中，$ON = OP\sin\angle OPN = r\sin\angle OMN$，则 $MN = r\sin\angle MON$(定值)，这里 r 为 $\odot O$ 的半径　9. 因为 $\overset{\frown}{ADC}$、$\overset{\frown}{ABC} = \pi$，则 $\angle CDA + \angle ABC = 180°$，于是由余弦定理得　$(2R)^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 8\cos\angle CDA$，$(2R)^2 = 9^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 9\cos\angle ABC$，则 $R = \dfrac{\sqrt{7\,315}}{19}$　10. 同第 9 题做法，用余弦定理而得结论　11. 连 AC、CE，则由余弦

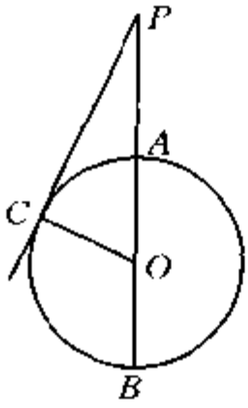
定理得 $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle ABC$，$CE^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\angle CDE$. 又 $\angle ABC > 90°$，$\angle CDE > 90°$，则 $-1 \leqslant \cos\angle ABC < 0$，$-1 \leqslant \cos\angle CDE < 0$，于是就有 $AE^2 = AC^2 + CE^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab\cos\angle ABC - 2cd\cos\angle CDE$. 因 $\angle ABC + \angle AEC = 180°$，$\angle CDE + \angle CAE = 180°$，所以 $\cos\angle ABC = -\cos\angle CEA = -\dfrac{CE}{AE} = -\dfrac{CE}{2}$，$\cos\angle CDE = -\dfrac{AC}{2}$. 从而 $4 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab \cdot CE + cd \cdot AC$. 而 $AC > b$，$CE > c$，故有 $4 > a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd$

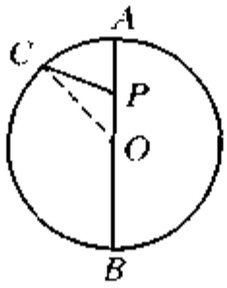
测试题 1. 设圆O的半径为R，则$R^2 = (R-2)^2 + 4^2$，得$R = 5$，于是$2R = 10$ 2. 令 $AC = BC = a$，则 $AB = \sqrt{2}a$. 由 $S_{\triangle ABC} = S_{\text{扇形}ADF}$ 得 $\dfrac{\pi}{8}AD^2 = \dfrac{1}{2}a^2$，即 $AD = \dfrac{2a}{\sqrt{\pi}}$. 又 $AD : DB = AD : (AB - DA)$，则 $AD : DB = (\sqrt{2\pi} + 2) : (\pi - 2)$ 3. 作 $BE \perp BP$ 交 PA 于 E，$CF \perp PC$ 交 PD 于 F，则 $\tan\angle APB \cdot \tan\angle CPD = \dfrac{BE}{BP} \cdot \dfrac{CF}{CP} = \dfrac{BE}{CP} \cdot \dfrac{CF}{BP} = \dfrac{1}{4}$ 4. n 个点两两之间的距离都大于2 000，那么这 n 个点中任何点都不能是圆心 O. 由 O 引 n 条射线分别通过这 n 个点，按逆时针将这 n 个点编号为 A_1，A_2，…，A_n，于是有 $OA_1 < 2\,000$，$OA_2 < 2\,000$，$A_1A_2 > 2\,000$，则 $\angle A_1OA_2 > 60°$. 同理得 $\angle A_2OA_3$，…，$\angle A_{n-1}OA_n$、$\angle A_nOA_1$ 都大于 60°，但这 n 个角为 360°. 因而 $n \cdot 60° < 360°$，得 $n \leqslant 5$. 事实上，取每一个角都等于 72°，得到 $n = 5$ 的符合条件的图形. 故 n 最大值为 5

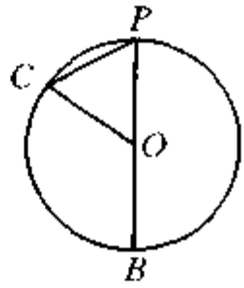
第十四讲　直线与圆

练习题 1. 如图，易知 $\triangle BEP \backsim \triangle CDP$，$\triangle PDB \backsim \triangle PFC$，于是有 $\dfrac{PD}{6} = \dfrac{4}{PD}$，即 $PD = 2\sqrt{6}$ cm 2. 当 PCD 变为 PO 时，有 $\angle AEP = \angle AOP = 90° - \dfrac{1}{2}\angle APB = 70°$. 选(D) 3. 令 AB 与圆 O 的切点为 D，BC 与 $\odot O$ 的切点为 E，则有 A、O、E 三点共线，$\triangle ADO$ 和 $\triangle AEB$ 都是直角三角形. 设 $AD = x$，则 $OA = \sqrt{x^2 + 1}$. 又 $\triangle ADO \backsim \triangle AEB$，于是有 $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2+x}$，得 $x = \dfrac{4}{3}$. 故 $AB = 3\dfrac{1}{3}$ 4. $\angle CED = 50°$，$\overset{\frown}{CD} = 50°$，则优弧 $\overset{\frown}{AD}$ 的度数为 $360° - 150° = 210°$，得 $\angle ACD = 105°$. 故选(D) 5. 延长 BC 到

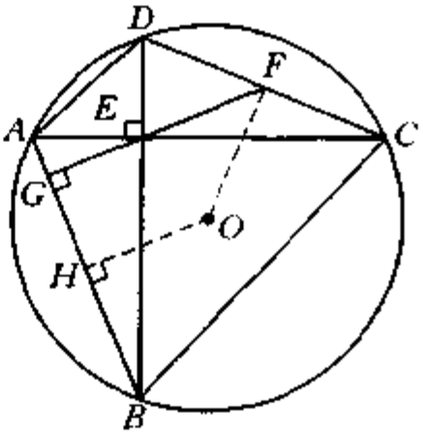


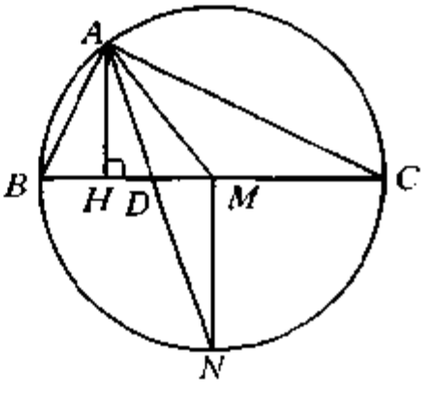






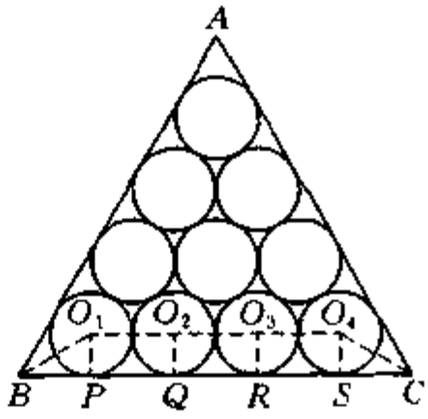
G 与 $\odot O$ 交于 G，过 C、O 作 $\odot O$ 直径 EF 与 $\odot O$ 交于 E、F，设 CA 交 $\odot O$ 于 M，连 MG 与 EF 相交于 P，由已知可得 $EF \parallel AB$，$\angle ECM = \angle ECG = 60°$. 因 EF 是直径，由轴对称可得 $EG = EM$，$GM \perp CE$，于是 $\angle CGM = 30°$. 故选(D)　**6.** 选(B)　**7.** 选(B)　**8.** 连 OT，AT，作 $AM \perp DC$，则 $OT \parallel AM \parallel BC$. 又 A 是 OB 中点，则 M 是 TC 的中点，所以 $\triangle ATM \cong \triangle ACM$，$\angle ACB = \angle CAM = \angle TAM = \angle OTA = \angle TAO$，得 $\angle ACB = \frac{1}{3}\angle CAD$　**9.**　(1) P 点在圆外，在 $\triangle POC$ 中，$PO < PC + OC$，$OA = OC$，则 $PA < PC$. 又 $PC < PO + OC$，$OC = OB$，则 $PC < PO + OB$，即 $PC < PB$　(2) P 点在圆内，可得 $PC > OC - OP = OA - OP = PA$，则 $PC < OC + OP = OB + OP = PB$　(3) P 点在圆上，P 与 A 重合，$PA < PC$，则 $PC < OP + OC = OB + OP = PB$　**10.** 如图，四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，对角线 AC 与 BD 相交于 E，$AC \perp BD$，$CF = DF$，连 EF 交 AB 于 G，作 $OH \perp AB$. 连 OF.　(1) 由 $AC \perp BD$，$CF = DF$ 得 $EF = CF$，则 $\angle CEF = \angle FCE$. 又 $\angle ABE = \angle FCE$，$\angle AEG = \angle FEC$，则 $\angle ABE = \angle AEG$. 又 $\angle BAE + \angle ABE = \angle GAE + \angle AEG = 90°$，得 $FG \perp AB$　(2) 由(1)知，F 为 DC 的中点，$FG \perp AB$. 同理可得若 H 是 AB 的中点，连 HE 交 DC 于 I，则 $HI \perp DC$　因 $OH \perp AB$，$OF \perp DC$，所以 $OHEF$ 是平行四边形. 故 $OH = EF = CF = \frac{1}{2}CD$　**11.** 如图，AH 为高，AD 为角平分线，中线为 AM，且有 $\angle BAH = \angle HAD = \angle DAM = \angle MAC$. 延长 AD 交圆于 N. 则易得 N 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，且有 $MN \perp BC$. 于是有 $AH \parallel MN$，从而 $MA =$





MN. 又 MN 与 MA 不重合，而 MN 所在直线必过圆心，故 M 必为圆心，得 BC 为直径，即 $\angle BAC=90°$ **12.** DC 中点为 M，连 EM 交 BD 于 G. 则有 $MC=MD=ME$，$\angle DCB=\angle A$，则 $\angle DCE=\angle ACB=\angle CEG$. 所以 $EM\ //\ BC$，即 MG 是 $\triangle DCB$ 的中位线，得 $CE=BG=\frac{1}{2}BD$ **13.** 由题意得 O、I 在 $\triangle ABC$ 的内部. 由 $\angle BOC=2\angle A$，$\angle IBC=\frac{\angle B}{2}$，$\angle ICB=\frac{\angle C}{2}$，$\angle A>\angle B>\angle C$，则 $\angle OBC=\frac{\angle C+(\angle B-\angle A)}{2}<\frac{\angle C}{2}=\angle ICB<\frac{\angle B}{2}=\angle IBC$，于是有 $\angle OBC<\angle IBC$，$\angle OCB<\angle ICB$. 由此可知 O 在 $\triangle BCI$ 内部，故 IO 与线段 BC 相交 **14.** (1) 若 AX 与 BY 的交点 P 在圆外，则 $\angle XAY=90°$，得 $\angle XPY+\angle AYB=90°$，但 $\angle AYB$ 为定角，所以 $\angle XPY$ 也为定角. 于是点 P 的轨迹是对边 AB 张成定角的一个圆 (2) 若交点 P' 在圆内，则 $\angle XAY=90°$，于是 $\angle AP'B=90°+\angle AYB$ 为定角，故 P' 点的轨迹是对边 AB 张成定角的一个圆. 由 AB 为共同的边，得 $\angle XPY$ 与 $\angle XP'Y$ 互补，故 P 和 P' 在同一圆上. 因此，AX 与 BY 的交点的轨迹是过 A、B 两点，以半径为 $R=\frac{AB}{2\sin\angle P}$ 的圆

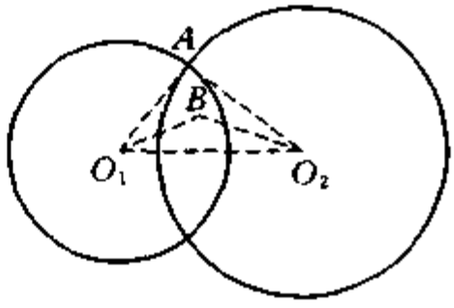
测试题 **1.** 选(D) **2.** 连 CD，BE，且设 $CD=a$，$BE=b$，则 $CD\perp AB$，$BE\perp AC$，又 $\angle A=30°$，那么 $AC=2a$，$AD=\sqrt{3}a$，$AB=2b$，$AE=\sqrt{3}b$. 于是 $S_1=S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AE\cdot\sin\angle A=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}a\cdot\sqrt{3}b\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}ab$，$S_2=S_{BCED}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AC\cdot BE-S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot b-\frac{3}{4}ab=\frac{1}{4}ab$. 故 $S_1:S_2=\frac{3}{4}ab:\frac{1}{4}ab=3:1$ **3.** 设 10 个等圆的半径都是 r，等边 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的四个等圆：O_1、O_2、O_3、O_4 与 BC 边分别切于 P、Q、R、S 四点，则 BO_1、CO_4 分别是 $\angle B$ 与 $\angle C$ 的平分线，连结 O_1O_4 及 O_1P、O_2Q、O_3R、O_4S，于是 $O_1O_4=RS=6r$. 易知 $\angle PBO_1=\angle SCO_4=\frac{1}{2}\angle B=\frac{\pi}{6}$，$BP=CS=\frac{O_1P}{\tan\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}r$. 于是 $BC=2(\sqrt{3}+3)r=l$ 得 $r=\frac{1}{2(\sqrt{3}+3)}$. 从而知 $\odot O_1$ 的面积为 $S_1=\pi r^2=\frac{(2-\sqrt{3})\pi l^2}{24}$. 故所求面积之和为 $10S_1=$



$\frac{5(2-\sqrt{3})}{12}\pi l^2$ **4.** O 为 AB 中点，$\angle AOP=60°$. 作 $PF\perp AB$ 于 F，$QG\perp DC$ 于 G，则 $\triangle PFQ\backsim\triangle QGE$. 又 $PF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$FO=\frac{1}{2}$，$QF=\frac{1}{6}$，$OQ=\frac{1}{3}$. 又 $QG:GE=\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{6}$，得 $QG=3\sqrt{3}\,GE$. 因 $AQ=\frac{2}{3}$，所以 $S_{AQGD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$. 又 $S_{\text{阴}AOP}=\frac{1}{3}S_{\text{半圆}}$，因而 $S_{DAPE}=S_{AQGD}+S_{\text{阴}AOP}$，于是 $S_{\triangle QGE}=S_{\triangle OFQ}$，得 $GE=\frac{\sqrt{2}}{6}$，$AD=QG=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$DE=\frac{1}{6}(4+\sqrt{2})$

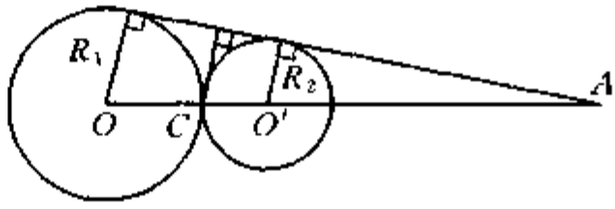
第十五讲　两圆的位置关系

练习题　**1.** 选(D)　**2.** 令大半圆半径为 R，小半圆半径为 r，则 $2R=n\cdot 2r$，$R=nr$，$l_1=\pi R$，$l_2=n\cdot\pi r=\pi R$. 选(A)　**3.** 选(C)　**4.** 选(A)　**5.** 作弦心距 $O_1C\perp MA$，$O_2D\perp AN$，C、D 为垂足. 由 $O_1C\parallel PA\parallel O_2D$ 得 $CA=AD$，于是有 $AM=AN$　**6.** 连 QP，则 $\angle APQ=\angle CDQ$，$\angle BPQ=\angle DCQ$，于是 $\angle CQD+\angle APB=\angle CQD+\angle BPQ+\angle CPQ=180°$　**7.** 令 $AM=k_1AB$，$CN=k_2AC$，$CL=k_3BC$，则需证明 $k_1=k_2=k_3$. 因 $\triangle ABD\backsim\triangle CAD\backsim\triangle CBA$，所以 AM、CN 和 CL 是一组对应线段，从而有 $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{CN}=\frac{BC}{CL}$，即 $k_1=k_2=k_3$　**8.** 取 $\triangle ABC$ 的高 $CD=h$，则有 $S=ah-\frac{\pi}{4}h^2=-\frac{\pi}{4}\left(h-\frac{2a}{\pi}\right)^2+\frac{a^2}{\pi}$. 由 $0\leqslant h\leqslant a$，$0<\frac{2a}{\pi}<a$ 得 $h=\frac{2a}{\pi}$ 时 S 取得最大值，且为 $\frac{a^2}{\pi}$　**9.** 假设 A、B 不在连心线 O_1O_2 的两侧，有四种可能情形：(1) A、B 同在 O_1O_2 的上侧，易得 $\triangle O_1AO_2\cong\triangle O_1BO_2$，则 $\angle AO_1O_2=\angle BO_1O_2$. 又 A、B 位于 O_1O_2 的同侧，故 A 与 B 必重合，即两圆只有一个交点，矛盾　(2) A 在 O_1O_2 上侧，B 在 O_1O_2 上，则 $O_1O_2=O_1B+BO_2=O_1A+O_2A$，于是推知 A 必在 O_1O_2 上，得 A 与 B 重合，矛盾　(3) A、B 同在 O_1O_2 下侧，与(1)讨论同　(4) A 在 O_1O_2 下侧，B 在 O_1O_2 上，与(2)讨论同



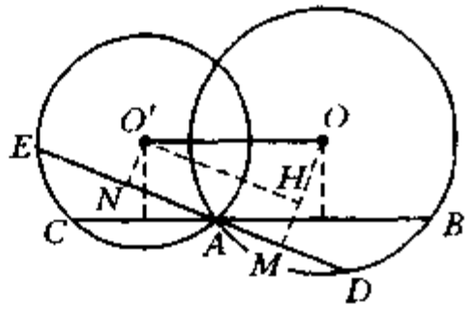
10. 连结 OA、OC、OD、OP、PC，设 OP 交 AB 于 E，交 CD 于 E'.　由 $OA\perp PA$，$OP\perp AB$ 交 AB 于 E 得 $OA^2=OE\cdot OP$. 又 $\angle OPC=\angle ODC=\angle OCE'$，则 $\triangle OCE'\backsim\triangle OPC$，得 $OC^2=OE'\cdot OP$，于是有 $OE=OE'$，即 E 与 E' 重合. 故结论成立　**11.** 因为 $\angle ABC=180°-\angle ADC=75°$，$\angle DAB=60°$，设圆心为 O，连 OD、OC，得 $\angle DOA=60°$，

$\angle COB=30°$，$\angle DOC=90°$，于是$OC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，从而$S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}AO^2\cdot 2\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{8}$，$S_{\triangle DOC}=\frac{1}{2}OC^2=\frac{1}{4}$，$S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}\cdot OB^2\cdot\sin 30°=\frac{1}{8}$，故$S=\frac{3+\sqrt{3}}{8}\approx 0.59$ **12.** 如右图，若$r_1=r_2$，则显然成立. 若$r_1\neq r_2$，不妨设$r_1>r_2$，延长外公切线交连心线于A，则$\frac{r_1}{r_2}=\frac{AO'+r_1+r_2}{AO'}$，$\frac{r_2}{d}=\frac{AO'}{AO'+r_2}$. 于是就有$\frac{r_2+r_1}{r_1r_2}=\frac{2}{d}$



13. 设三等圆公共点为O，公共弦OP_1、OP_2、OP_3分别互相垂直平分连心线O_2O_3于M_1、O_1O_3于M_2、O_1O_2于M_3，这样M_2M_3同时是$\triangle O_1O_2O_3$及$\triangle P_1P_2P_3$的中位线，于是$O_2O_3=2M_2M_3=P_2P_3$. 同理可得$O_1O_3=2M_1M_3=P_1P_3$，$O_1O_2=2M_1M_2=P_1P_2$. 故$\triangle P_1P_2P_3\cong\triangle O_1O_2O_3$. 易知$OO_1=OO_2=OO_3=r$，所以$\triangle P_1P_2P_3$的外接圆半径也是$r$ **14.** 先证明$\angle ABQ_1+\angle ABQ_2=180°$，得$Q_1$、$B$、$Q_2$三点共线；再证四边形$NQ_1Q_2M$是直角梯形，其中位线$PC$是腰$Q_1Q_2$的垂直平分线，故$PQ_1=PQ_2$

测试题 **1.** 因为$(x-1)(x^2-5x+6)=0$，得$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3$，故r_1、r_2、(r_1-r_2)为3、2、1或3、1、2. 故选(D) **2.** 连OA、OB，延长AB交$\odot O$于D点，延长CB交$\odot O$于F，过O作$OE\perp AD$交于E，则令$BD=x$，有$AD=6+x$，$AE=ED=\frac{1}{2}(6+x)$，$BE=ED-BD=\frac{1}{2}(6-x)$. 利用$AB\cdot BD=FB\cdot BC$(由$\triangle ABF\backsim\triangle DBC$)得$FB=3x$. 又$OE=\frac{1}{2}FC-2=\frac{1}{2}(3x-2)$，且$OA^2=OE^2+AE^2$，则$50=\left(\frac{3x-2}{2}\right)^2+\left(\frac{6+x}{2}\right)^2$，解得$x=4$. 于是$OB^2=OE^2+BE^2=26$，即$OB=\sqrt{26}$ **3.** 如图，与连心线OO'平行的割线为CBA，与OO'不平行的割线为EAD，由O与O'作DE的垂线，垂足是M与N；再由O'作OM的垂线交OM于H，则有$O'NMH$是矩形. 因M为AD中点，N为AE中点，于是$OH=MN=\frac{1}{2}DE$. 在直角



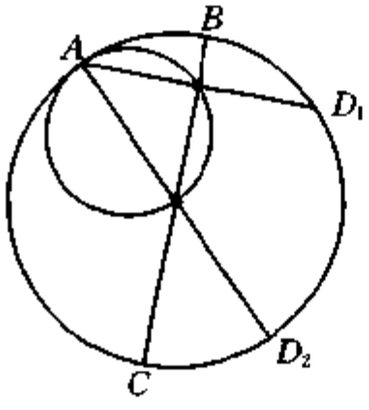
$\triangle O'HO$ 中，$O'H < O'O$，又 $O'O = \frac{1}{2}BC$，故 $DE < BC$

第十六讲　圆中的比例线段

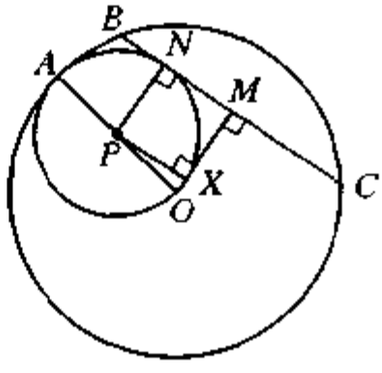
练习题　1. 延长 PO 交 $\odot O$ 于 F. 设 $\odot O$ 半径为 r，由切割线定理得 $PA^2 = PC \cdot PF$，即有 $r = 7.5$. 又 $CE \parallel OA$，则 $\frac{CE}{OA} = \frac{PC}{PO}$，得 $CE = 3\,\text{cm}$　2. 由 CM 是 $\angle C$ 的平分线得 $\frac{BC}{BM} = \frac{AC}{AM}$，由切割线定理得 $BM \cdot BA = BN \cdot BC$，于是有 $\frac{AB}{BN} = \frac{AC}{AM}$，而 $AC = \frac{1}{2}AB$. 故 $BN = 2AM$　3. 由切割线定理得 $BM^2 = BE \cdot BF$，$CN^2 = CF \cdot CE$. 又 $BE = EF = CF$，则 $BM = CN$. 因 $AM = AN$，所以 $AB = AC$，即 $\angle B = \angle C$　4. 由切割线定理得 $AM^2 = BM^2 = MC \cdot MD$，即 $\frac{AM}{MD} = \frac{MC}{AM}$，且 $\angle AMC = \angle DMA$，则 $\triangle AMC \backsim \triangle DMA$. 所以 $\angle CAM = \angle D$. 又 $\angle D = \angle CEF$，故 $EF \parallel AB$　5. 连结 OC，则 $\angle AOC = \angle EDC$，$\angle AOC + \angle COP = 180°$，$\angle EDC + \angle FDP = 180°$，所以 $\angle COP = \angle FDP$，且 $\angle P$ 为公共角，得 $\triangle OCP \backsim \triangle DFP$. 于是 $\frac{PC}{PF} = \frac{PO}{PD}$，即 $PO \cdot PF = PC \cdot PD$. 又由割线定理得 $PC \cdot PD = PA \cdot PB$，因而有 $PO \cdot PF = PA \cdot PB$　6. 由割线定理得 $AH \cdot AJ = AG \cdot AF$，有 $AH = 3$. $BJ \cdot BH = BD \cdot BE$，$CF \cdot CG = CE \cdot CD$，从而有 $BD - EC = 4$. 于是有 $DE = 2\sqrt{22}$　7. 由相交弦定理得 $OH = \frac{1}{2}\sqrt{(AB + CD)(AB - CD)}$. 令 $AB = 10a + b$. 则利用 OH 为有理数知 $AB = 65$　8. 因为 $MA^2 = O_1M^2 - O_1A^2 = MH^2 + O_1H^2 - O_1A^2 = MH^2 + (O_1D + DH)^2 - O_1A^2 = MH^2 + \frac{1}{4}O_1O_2^2 + O_1O_2 \cdot DH + DH^2 - O_1A^2$，$MB^2 = MO_2^2 - O_2B^2 = MH^2 + (O_2D - DH)^2 - O_2B^2$，又 $2DH \cdot O_1O_2 = r_1^2 - r_2^2$，所以就有 $MA^2 = MB^2$，即 $MA = MB$. 说明　如果有点 M，满足 $MA^2 = MB^2$（叫做等幂），则点 M 的集合就是题中过 H 的直线　9. 由 $\triangle PAB \backsim \triangle AQB$ 得 $\angle PAB = \angle ABQ$，即 Q 点在 PB 上，且 $\frac{AP}{AB} = \frac{AB}{QB}$. 同理 R 点在 AQ 上，且 $\frac{AQ}{AB} = \frac{AB}{AR}$. 于是 $PB \cdot QB = AB^2 = AQ \cdot AR$. 设 $\triangle PQR$ 的外接圆圆心为 O，则 A、B 关于 $\odot O$ 等幂的. 作切线 AT、BS，连结 OA、OB、OT、OS. 因 $AT^2 = BS^2 = AB^2$，$OT = OS$，所以 $\triangle OAT \cong \triangle OBS$，得 $OA = OB$，即 $\odot O$ 关于 AB 的垂直平分线对称. 故 P'、Q'、R' 都在圆 O 上　10. 设 AB 和 CD 的交点为 K，AC 与 BD 的交点为 E，则 $AB \perp O_1E$，$CD \perp O_2E$. 因 O_1E 平分 $\angle AEB$，O_2E 平分 $\angle CED$，所以 $O_1E \perp O_2E$，得 $AB \perp CD$，即 K 分别以 AC 和 BD 为直径的两圆 S_1 和 S_2 的交点.

故 K 在圆 S_1 和圆 S_2 的等幂线(根轴)上. 又 $O_1A \perp AC$,则 O_1A 是圆 S_1 的切线,所以 O_1 关于圆 S_1 的幂是 O_1A^2. 同理 O_1 关于圆 S_2 的幂是 O_1B^2. 由于 $O_1A^2 = O_1B^2$,故 O_1 是关于圆 S_1 和圆 S_2 的等幂点. 同理可知 O_2 也是关于圆 S_1 和圆 S_2 的等幂点,所以 O_1O_2 是圆 S_1 与圆 S_2 的根轴,从而知 K 在连心线 O_1O_2 上

测试题 1. 易知 $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{DC} = \frac{1}{9}$, $\frac{PB}{PA} = \frac{BC}{AD} = \frac{9}{8}$. 令 $PB = 9x$,则 $PC = 9.9x$, $PA = 8x$. 所以 $PD = \frac{PA \cdot PC}{PB} = \frac{8x \cdot 9.9x}{9x} = 8.8x$. 于是 $S_{\triangle PAB} : S_{\triangle PBC} : S_{\triangle PCD} : S_{\triangle PDA} = 8 : 81 : 648 : 64$ 2. 连 AB, AC,则有直角 $\triangle ACD \backsim \triangle BAE$,得 $\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{AB}$. 同理得 $\frac{CF}{AD} = \frac{AC}{AB}$. 所以 $\frac{AD}{BE} = \frac{CF}{AD}$,从而有 $AD^2 = BE \cdot CF$ 3. 考察从 A 出发的所有的弦,这些弦的终点的集合是以半径为 5 的圆. 于是它们中点的集合(在 A 点)是与这个圆内切的半径为 $\frac{5}{2}$ 的圆. 因此 BC 必须与这个小圆相切,才能保证只有一条从 A 出发的弦被 BC 平分,如图(1). 如图(2),其中 O、P 是两个圆的圆心,BC 与小圆相切于 N 点. 连 OA、OB、OC,作 $MO \perp BC$ 于 M,$NP \perp BC$ 于 N,$PX \parallel BC$. 于是就有 $MC = 3$, $MO = 4$, $NP = \frac{1}{2}AO = \frac{5}{2}$,且 $MNPX$ 是矩形,从而推知 $MX = \frac{5}{2}$, $OX = \frac{3}{2}$, $OP = \frac{5}{2}$, $OX = \frac{3}{2}$,得 $PX = 2$, $MN = 2$, $BN = 1$,故 $BP^2 = 1 + \frac{25}{4} = \frac{29}{4}$. 因而在 $\triangle BOP$ 中,令 $\theta = \angle BOP$,则有 $\frac{29}{4} = 25 + \frac{25}{4} - 2 \times 5 \times \frac{5}{2}\cos\theta$,即 $\cos\theta = \frac{24}{25}$,得 $\sin\theta = \frac{7}{25}$. 故 $mn = 175$



(1)

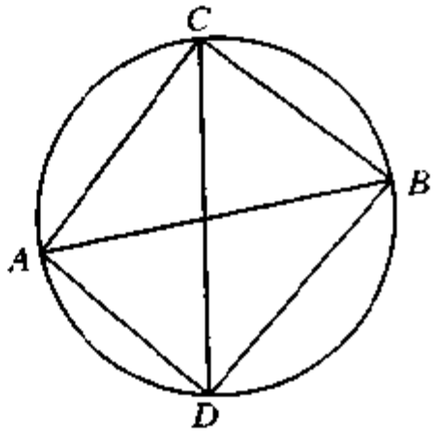


(2)

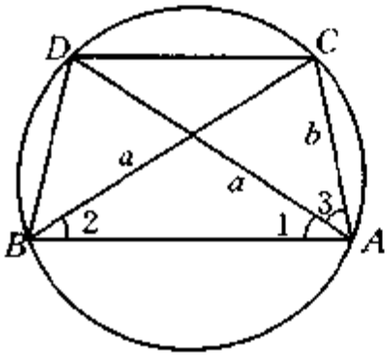
第十七讲　四点共圆

练习题 1. 由于四边形 $ABPC$ 内接于一个圆,所以由托勒密定理及 $AB =$

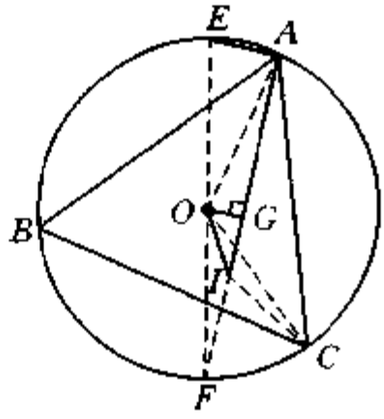
$AC = BC$ 得 $PA \cdot BC = PB \cdot AC + PC \cdot AB$，即 $PA = PB + PC$　2. 连 OB、OC. 因为 $OF \perp AB$，$OA = OB$，所以 $\angle AOF = \angle BOF$，从而 $\angle BOF = \angle ACB$. 又 $\angle BOF + \angle POB = \angle ACB + \angle PCQ = 180°$，则 $\angle POB = \angle PCQ$，于是 O、B、Q、C 四点共圆，得 $\angle OBC = \angle Q$，由此推得 $\angle OCP = \angle Q$，故 $\triangle POC \backsim \triangle COQ$，得 $\frac{OP}{OC} = \frac{OC}{OQ}$. 即 $OC^2 = OP \cdot OQ$. 因此，$OA^2 = OP \cdot OQ$　3. 由托勒密定理得 $AB \cdot PC = PA \cdot BC + PB \cdot AC$. 则有 $PC = PA + PB$. 又 $\angle APC = \angle BPC = 60°$，所以有 $\triangle PAD \backsim \triangle PCB$，得 $PA \cdot PB = PD \cdot PC$，而 $PD \cdot PC = PD \cdot (PA + PB)$，由此推知 $\frac{1}{PD} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB}$　4. 连结 EF、DF，由 B、A、C、F 共圆得 $\angle FAC = \angle FBC$，$\angle ACF = \angle ABF$. 又 E、B、D、F 共圆得 $\angle FBC = \angle DEF$，$\angle FDE = \angle ABF$，所以 $\angle FAC = \angle DEF$，$\angle ACF = \angle FDE$，从而知 $\triangle FAC \backsim \triangle FED$，就有 $\frac{AF}{EF} = \frac{AC}{ED} = \frac{CF}{FD} = k$，于是由 B、E、F、D 共圆得 $BF \cdot ED = DF \cdot BE + EF \cdot BD$，即 $BF \cdot AC = CF \cdot BE + AF \cdot BD$，故 $BF = CF + AF$　5. (1) 因 $BE \perp AC$，$CF \perp AB$，得 B、C、E、F 共圆，有 $\angle AEF = \angle ABC$，所以 $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$，得 $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \cos A$，故 $\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{EF}{BC}\right)^2 = \cos^2 A$.　(2) 由 $AD \perp BC$，$CF \perp AB$ 得 B、D、H、F 四点共圆，则 $\angle HDF = \angle ABH = 90° - \angle A$，同理得 $\angle HDE = \angle ACF = 90° - \angle A$. 因而 $\angle EDF = 180° - 2\angle A$. 由正弦定理得 $EF = 2R' \sin \angle EDF = 2R' \sin 2A$，又 $EF = BC \cdot \cos A = R \sin 2A$，于是 $R = 2R'$　6. 令 $\triangle ABC$ 边长为 $3a$，连 DE，则在 $\triangle DEC$ 中，有 $DE^2 = 3a^2$，所以 $DE^2 + CE^2 = DC^2$，由此得 $\angle DEC = 90°$. 又 $\triangle ABD \cong \triangle BCE$，则 $\angle BDA = \angle CEB$. 于是 D、C、E、P 四点共圆，得 $\angle DPC = \angle CED = 90°$，即 $CP \perp AD$　7. 作直径 $AB = 1$ 的圆，在 AB 两侧任作直角 $\triangle ACB$、直角 $\triangle ADB$，使 $AC = a$，$BC = b$，$BD = x$，$AD = y$，它们是满足题中要求的.　由托勒密定理有 $AC \cdot BD + BC \cdot AD = AB \cdot CD$，而 $CD \leqslant AB = 1$，故 $ax + by \leqslant 1$　8. 作 $\triangle ABC$ 的外接圆，以 A 为圆心、BC 为半径画弧交圆于 D，连结 BD、DA、DC，则有 $\angle ABD = \angle BAC$，从而 $\angle 1 = \angle 2$，得 $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC}$，所以 $BD = AC = b$. 由托勒密定理得 $BC \cdot AD = AB \cdot CD + BD \cdot AC$，而 $a^2 = b(b + c)$，故有 $CD = b = BD$，即 $\angle 3 = \angle 1 = \angle 2$，从而 $\angle A = 2\angle B$



9. 延长 AI 交 $\odot O$ 于 F，连 EF. 则 $\angle EAF = 90°$，有 EF 为 $\odot O$ 直径. 连结 OA、OC、IC，有 $\angle AOC = 120°$，则



第 8 题

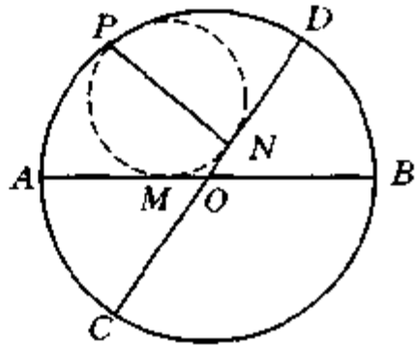


第 9 题

$\angle IAC+\angle ICA=60°$，$\angle AIC=120°$. 从而有 O、I、C、A 四点共圆，得 $\angle OIA=\angle OCA$，所以 $\angle OIA=30°$. 过 O 作 $OG\perp AI$ 于 G，则 $OG=\frac{1}{2}OI$，且 $OG\parallel AE$，故 $OI=AE$　**10.** 作 $\angle ECF=\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC$，$CF$ 交 BD 于 F. 又 CF 在 $\angle DCE$ 内部，F 在线段 DB 内部，则 B、C、F、E 四点共圆. 因 $\angle ACB>\angle ABC$，所以 $\angle EBC<\angle FCB$，从而有 $CE<BF<BD$　**11.** 由题意知 A、B、C'、C 四点共圆，且圆的直径为 BC. 过 C、C' 分别作 AB 的垂线 CD、$C'D'$，延长交圆于 E、E'，则 CE 为圆的直径. 所以 $CE>C'E'$，即 $CD>C'D'$，而 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，$S_{\triangle ABC'}=\frac{1}{2}AB\cdot C'D'$，故 $S_{\triangle ABC}>S_{\triangle ABC'}$　**12.** 取 BD 中点 M，连 FM、AM，则有 $\angle C=\angle ADE=\angle B$，所以 $\triangle ABD\backsim\triangle ADE$，得 $\frac{AD}{AE}=\frac{BD}{DE}$. 又 $DF=FE$，$BM=MD$，则 $\frac{AD}{AE}=\frac{MD}{EF}$，$\triangle AMD\backsim\triangle AFE$. 故 $\angle AFE=\angle AMD$，A、M、D、F 四点共圆，从而有 $\angle MFA=90°$. 于是 $MF\parallel BE$，即 $AF\perp BE$　**13.** 易知 O、C_i、P_i、D_i 四点共圆，直径 OP_i 过垂直弦 C_iD_i 的中点 M_i，则 $OM_i\cdot M_iP_i=C_iM_i\cdot D_iM_i=AM_i\cdot BM_i$. 又 O、A、P_i、B 四点共圆，圆心为 G，则 P_iG 为定值，故所求定点为 G 点　**14.** (1) B、C、E、F，E、F、G、H，A、G、K、H 分别四点共圆，连 AK、AO、GH、EF，则 $\angle GAK=\angle GHK=\angle GFE=90°-\angle GFE=90°-\angle BCE$. 又 $\angle AOB=2\angle BCE$，则 $\angle BAO=90°-\angle BCE$. 所以 $\angle GAK=\angle BAO$，得 AK 与 AO 重合　(2) $AK=\frac{1}{2}R$，$AK=\frac{AG}{\sin\angle BCE}$，$AG=AE\cos\angle BAC=AB\cdot\cos^2\angle BAC$，则 $AK=2R\cos^2\angle BAC$，即 $\cos^2A=\frac{1}{4}$. 又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则 $\cos A=\frac{1}{2}$，得 $\angle A=60°$　**15.** 连结 CR，R 为旁心，得 $\angle RCB=\angle RCA$，则 P、Q、R、C 四点共圆，有 $\angle PRQ=$

$\angle PCQ = 180° - \angle C$，又 $\angle PRQ = 180° - \frac{\angle B + \angle A}{2}$，则有 $2\angle C = \angle B + \angle A$. 所以 $\angle C = 60°$，$\angle RCA = \angle RCQ = 30°$，$\angle PCQ = \angle PRQ = 120°$，$\angle RCQ = \angle RPQ = 30°$，$\triangle RQP$ 为等腰三角形，$RQ = RP$，令 $PR = RQ = x$，则由余弦定理得 $PR = RQ = x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

测试题 1. $\triangle ABE \backsim \triangle AHF$，$\triangle AGE \backsim \triangle ADF$，设正方形边长为 a，则 $\frac{a}{AH} = \frac{AG}{a}$，即 $a^2 = AH \cdot AG$. 于是知过 H、G、B 的圆的圆心在 BC 上 2. 易知 $PMON$ 四点共圆，且不论 P 为哪一点，圆的直径等于 $\odot O$ 的半径，为定值.（当 P 点与 A、B、C、D 之一重合时，为直角三角形的外接圆），又因 $\angle MPN = \angle AOC =$ 定角，故 MN 为定值 3. A、O、B、P 四点共圆，有 $AM \cdot MB = OM \cdot MP$，又 $AM \cdot MB = CM \cdot MD$，则 $CM \cdot MD = OM \cdot MP$，故 O、C、P、D 四点共圆. 连 OC、OD，则 $OC = OD$，$\angle CPO = \angle DPO$，又 $\angle APO = \angle BPO$，于是 $\angle APC = \angle BPC$ 4. 连 OA、OB、OC、OP、OQ，则有 $\triangle AOB \cong \triangle AOC$，得 $\angle OBA = \angle OCA$. 所以 $\angle OBA = \angle OAC$. 又 $\angle OBA + \angle OBQ = \angle OAC + \angle OAP = 180°$，则 $\angle OBQ = \angle OAP$. 故 $\triangle OBQ \cong \triangle OAP$，得 $\angle P = \angle Q$，从而有 O、A、P、Q 四点共圆 5. 在直角 $\triangle AMB$ 中，$AM^2 = AC' \cdot AB$. 同理 $AP^2 = AB' \cdot AC$. 因 $\angle BC'C = \angle BB'C = 90°$，所以 B、C'、B'、C 四点共圆，从而 $AC' \cdot AB = AB' \cdot AC$. 于是有 $AM^2 = AP^2$，即 $AM = AP$. 由于 N 与 M 关于直径 AB 对称，所以 $AN = AM$. 同理 $AQ = AP$. 故 N、M、P、Q 均在以 A 为圆心、AM 为半径的圆上.



第十八讲　一元二次方程的整数根

练习题 1. 由题意知 $|ab| = 0$，且 $|a+b| = 1$ 或者 $|ab| = 1$ 且 $|a+b| = 0$. 于是有 $a = 0$，$b = 1$；$a = 1$，$b = 0$；$a = 0$，$b = -1$；$a = -1$，$b = 0$；$a = 1$，$b = -1$；$a = -1$，$b = 1$. 共有 6 对 (a, b)，故选(C) 2. 由 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{100}$ 得 $x < y$ 且 $(100 + y)(100 - x) = 100^2$. 要使 y 最大，则 $100 - x = 1$，而 $100 + y = 100^2$. 故 $y = 9\,900$ 3. 由题意得 $\frac{ab}{a+b} = \frac{2}{3}$，则 $(3b - 2)(3a - 2) = 4$. 又 $a \neq b$，因而可以不妨设 $3b - 2 = 1$，$3a - 2 = 4$；或 $3b - 2 = -1$，$3a - 2 = -4$. 故 $a + b = 3$ 4. 因为原方程可以转化为 $(x + 2)m + x^2 + x + 1 =$

0，所以 $m=-x+1-\frac{1}{x+2}$. 因 x、m 都是整数，所以 $x+2=1$ 或 -1，即 $x=-1$ 或 $x=-3$. **5.** 设方程的两个整数根为 x_1，x_2，则 $(x-a)(x-8)-1=(x-x_1)(x-x_2)$. 令 $x=8$，则 $(8-x_1)(8-x_2)=-1$. 故 $8-x_1=-1$，$8-x_2=1$ 或 $8-x_1=1$，$8-x_2=-1$. 得 $x_1=7$，$x_2=9$ 或 $x_1=9$，$x_2=7$. 所以有 $a=8$ **6.** 由题意得 $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，则 $\frac{EF}{BC}=\frac{AD-EF}{AD}$，即 $\frac{c}{10a+b}=\frac{d-c}{d}$. 又 $b=a+1$，$c=a+2$，$d=a+3$，所以有 $a^2-6a+5=0$，得 $a_1=1$，$a_2=5$，即 $BC=12$ 或 56，$d=4$ 或 8. 故 $S_{\triangle ABC}=24$ 或 224 **7.** 由题意知 $(-4)^2-4\times m\times 4\geqslant 0$，且 $(-4m)^2-4\times(4m^2-5m-5)\geqslant 0$，解得 $-\frac{5}{4}\leqslant m\leqslant 1$. 又题中两方程的根都是整数，所以 $4m$ 也是整数. 在范围 $-\frac{5}{4}\leqslant m\leqslant 1$ 内使 $4m$ 是整数的 m 值只可能取 $m=\pm 1$，$\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{1}{4}$，$\pm\frac{3}{4}$，0. 易知 $m=1$ 符合题意 **8.** 令 $x=5n+r$，n 是整数，$r=0$，1，2，3，4，则 $y=5n^2+(2r-1)n+\frac{1}{5}(r^2-r+1)$. 易知 $\frac{1}{5}(r^2-r+1)$ 不是整数. 故结论成立 **9.** 由求根公式 $x_{1,2}=-5m\pm\sqrt{25m^2+5n-3}$. 因 $25m^2+5n-3$ 的末位数字只能是2或7，所以 $25m^2+5n-3$ 不可能是完全平方数. 故原方程没有整数解 **10.** 假设此方程有整数根 a，则 $a^2a+ab+c=0$，但 $aa^2+ba+c=$ 奇数 $\neq 0$. 故此方程无整数根 **11.** 设此方程两根为 x_1，x_2（均为质数），则 $x_1+x_2=4n-5$ 是奇数，于是必有一根为 2. 从而有 $n_1=3$，$n_2=16$. 易验证知 $n=3$ 符合要求 **12.** 设此方程的正整数根为 a，则存在整数 m，使得 $a^2+a+10=(a+m)(a+m+1)$，于是有 $a=\frac{10-m^2-m}{2m}\geqslant 1$. 当 $m>0$ 时，有 $0<m\leqslant 2$，则 $m=1$ 或 2，所以 $a=4$ 或 1，从而可知 $k=6$ 或 4. 当 $m<0$ 时，$a+m\geqslant 1$，就有 $m^2-3m+10\leqslant 0$，此不等式无解. 故满足方程的正整数根为 4 或 1，k 的值为 6 或 4

测试题 **1.** $5-\sqrt{2}=a+b$，则 $a=3$，$b=2-\sqrt{2}$，所以 $a+b=5-\sqrt{2}$，$a-b=\sqrt{2}+1$，从而有 $\frac{a+b}{a-b}=(5-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)=6\sqrt{2}-7$ **2.** 设 $9m^2+5m+26=k(k+1)$，则 $\Delta_1=36k^2-36k-911=p^2$，由此有 $\Delta_2=12^2(920+p^2)=l^2$，于是有 $(l+p)(l-p)=920$. 故有 $m=-13$，6，-2，-1 **3.** 当 $a+1=0$ 时，$x=-4$. 当 $a+1\neq 0$ 时，设方程的整数根为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=a-1+\frac{2}{a+1}$. 于是有 $a=0$，1，2，-2，

-3. 又 $a=0$ 时，$x_1=-2$，$x_2=3$；$a=1$ 时，$x_1=2$，$x_2=-1$；$a=-2$ 时，原方程无实根；$a=-3$ 时，原方程也无实根. 故 $a=-1$，0，1 时原方程有整数根　4. (1)由题意得 $[(m+1)x-6][(m-1)x-3]=0$. 则有 $\begin{cases} m+1=1,2,3,6 \\ m-1=1,3 \end{cases}$，得 $m=2$.　(2)由 $m=2$ 得 $a^2-4a+2=0$，$b^2-4b+2=0$. 当 $a=b$ 时，$a=b=2\pm\sqrt{2}$. 当 $a\neq b$ 时，a，b 是方程 $x^2-4x+2=0$ 的两根，则有 $a+b>0$，$ab>0$. 故 $a>0$，$b>0$.　(i) $a=b=2+\sqrt{2}$，$c=2\sqrt{3}$ 时，由 $2(2+\sqrt{2})>2\sqrt{3}$ 得可以构成三角形，则 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{9+12\sqrt{2}}$.　(ii) $a=b=2-\sqrt{2}$，$c=2\sqrt{3}$ 时，不能构成三角形.　(iii) $a\neq b$，$c=2\sqrt{3}$ 时，由 $a^2+b^2=c^2$ 知 $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 $\angle C=90°$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab=1$. 综合之，$S_{\triangle ABC}=1$ 或 $\sqrt{9+12\sqrt{2}}$

第十九讲　不定方程

练习题　1. 由 $x(x+y)=5$ 得 $x=-1$，-5，1，5，从而有方程的整数解为 $x_1=5$，$y_1=-4$；$x_2=1$，$y_2=4$；$x_3=-5$，$y_3=4$；$x_4=-1$，$y_4=-4$　2. 由于 $z^2-y^2=68$，即 $(z+y)(z-y)=2^2\times17$，则 $z+y$ 与 $z-y$ 必为偶数，且有 $z-y<z+y$，所以 $z-y=2$，$z+y=2\times17$，得 $y=16$，$z=18$，从而 $x=156$　3. x，y 可以看作是方程 $t^2-2t+z^2+1=0$ 的两个根，于是 $\Delta=-4z^2\geqslant0$，得 $z=0$，从而有 $x+y=2$，且 $xy=1$. 故 $x=y=1$，$z=0$　4. 方程可化为 $x=2+\frac{4}{y-2}$，则由 $y>2$ 得 $y-2=1$，2，4，即 $y=3$，4，6. 于是求得方程的正整数解为 $x_1=6$，$y_1=3$；$x_2=4$，$y_2=4$；$x_3=3$，$y_3=6$　5. 把原方程看作关于 x 的一元二次方程，则有 $x=6\pm\sqrt{34-y^2}$. 所以可以求得 $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=11, \\ y_2=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=3, \\ y_3=5; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=9, \\ y_4=5 \end{cases}$　6. $x=0$，$y=0$；$x=-1$，$y=0$. 这是因为当 $x\neq0$，或 $x\neq-1$ 时，x 与 $x+1$ 互质，于是有 $x\mid y$，$(x+1)\mid y$，这是不可能的　7. 因为有 $(y^2-1)^2+2(x^2-y)^2=0$，所以 $y^2-1=0$，$x^2-y=0$. 从而有 $x=1$，$y=1$；$x=-1$，$y=1$　8. 由 $\frac{1}{x}>\frac{1}{x+1}>\frac{1}{x+2}$ 知 $\frac{1}{x}>\frac{13}{12\times3}$，$\frac{1}{x+2}<\frac{13}{12\times3}$，故有 $\frac{10}{13}<x<2\frac{10}{13}$，得 $x=1$，2. 易知 $x=2$ 是原方程的整数根　9. 由方程知 $x\leqslant1$，而 $x\geqslant1$，则 $x=1$，于是有 $\frac{z}{yz+1}=\frac{3}{7}$，从而有 $y=2$，$z=3$　10. 因为 $(m-n)^2+13n^2=217$，得

$n^2 \leqslant \frac{217}{13}$，所以$n^2 \leqslant 16$，即$n=1,2,3,4$. 从而知$n=3, m=13$；$n=4, m=1$；$n=4, m=7$　**11.** 因为$x^3-y^3-z^3-3xyz=(x-y-z)\times\frac{1}{2}[(x+y)^2+(x+z)^2+(y-z)^2]=0$. 所以，$x=y+z$或$x=-y=-z$. 当$x=y+z$时，$x^2=2x$，而$x\geqslant 1$，就有$x=2$，从而$y=z=1$. 当$x=-y=-z$时，$x^2=-4x$，因$x\geqslant 1$，故无正整数解. 所以方程组的正整数解为$x=2, y=z=1$　**12.** 考虑x被11除的各种余数，即$x=11k+r$，k为整数，$r=0,1,2,3,\cdots,10$. 分别讨论得$x=11k-9$，$y=k(11k-4)$；$x=11m+2$，$y=m(11m+4)$，其中k、m是整数　**13.** 因为有$\left(\frac{1}{2}x-y\right)^2+\frac{3}{4}(x-2)^2=0$，得$x=2$，$y=1$，所以$z=2$或$z=3$. 于是$x=2$，$y=1$，$z=2$或$x=2$，$y=1$，$z=3$　**14.** 配方得$(3x-2y)^2+5y^2=105$，则有$5y^2\leqslant 105$，即$y=\pm 4,\pm 3,\pm 2,\pm 1,0$. 因而求得原方程的整数解为$\begin{cases}x=4,\\y=1;\end{cases}\begin{cases}x=1,\\y=4;\end{cases}\begin{cases}x=-4,\\y=-1;\end{cases}\begin{cases}x=-1,\\y=-4\end{cases}$　**15.** 由题意得$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n}=m^2$，则有$\frac{(n+1)(2n+1)}{6}=m^2$，于是可令$n=6p\pm 1$，$6p+3$分别讨论得$n=337$

16. $y^2\leqslant\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)^2$，$y^2>\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$，则有$x^2+\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}<|y|\leqslant x^2+\frac{x}{2}+1$. 因而有$|y|=x^2+\frac{x}{2}+\varepsilon$. 当$x$为偶数时，$\varepsilon=1$，得$x=0$，$y=\pm 1$；$x$为奇数时，$\varepsilon=\frac{1}{2}$，得$x=3$或$x=-1$. 所以，原方程的整数解为：$x=0$，$y=\pm 1$；$x=3$，$y=\pm 11$；$x=-1$，$y=\pm 1$

测试题　**1.** 由$(x-10)(y-10)=101$得$x-10=\pm 1$，或$x-10=\pm 101$. 于是有整数解为$x=111$，$y=11$；$x=11$，$y=111$；$x=-91$，$y=9$；$x=9$，$y=-91$　**2.** 由题意得$3y=z+1$. 令$z=3k-2$，就有$y=k+1$. 当k为大于1的奇数时，y为大于2的偶数，这与y为质数不符. 当k为非零的偶数，z必为大于2的偶数，这与z为质数不符. 所以，$k=1$，得$x=10$，$y=2$，$z=5$. 从而$1\,998x+5y+3z=20\,005$　**3.** 由$z\geqslant 3$得$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}+\frac{1}{z}>\frac{1}{2}$，不妨设$x\leqslant y$，则$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leqslant\frac{2}{x}$. 于是由$\frac{1}{2}\leqslant\frac{2}{x}$得$x\leqslant 4$. 而$3\leqslant x$，从而有$x=3,4$. 当$x=3$时，$\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$. 当$x=4$时，$\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$.

因而满足原方程的整数解为 $x=3, y=3, z=6$; $x=3, y=4, z=12$; $x=3, y=5, z=30$; $x=4, y=3, z=12$; $x=5, y=3, z=30$　**4.** 由方程知 $x>y$, 令 $x=y+d$, $d\geqslant 1$, 且 d 为整数, 于是有 $(3d-1)y^2+(3d^2-d)y+d^3=61$. 故 $d=1, 2, 3$, 从而求得 $x=6, y=5$

第二十讲　$[x]$ 与 $\{x\}$

练习题　**1.** $a=[3+2\sqrt{2}]=5$, $b=3+2\sqrt{2}-5=2\sqrt{2}-2$　**2.** $n^3<n^3+n^2+n+1<(n+1)^3$, 则 $[\sqrt[3]{n^3+n^2+n+1}]=n$　**3.** $\sqrt{2\,000^2+1}+1-\sqrt{2}>2000+1-\sqrt{2}>1999$, 又 $\sqrt{2\,000^2+1}+1-\sqrt{2}-2000=\dfrac{1}{\sqrt{2\,000^2+1}+2\,000}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}<0$, 则 $[\sqrt{2\,000^2+1}+1-\sqrt{2}]=1999$　**4.** $\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$, 而 $2<\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}<3$, 则 $a=2$, $b=\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$, 所以 $a^2+(1+\sqrt{7})ab=10$　**5.** $[x+y-z]=2+[\{x\}+\{y\}-\{z\}]=1$ 或 2 或 3　**6.** 代值计算知(D)是正确的　**7.** 由 $\left[\dfrac{100}{2}\right]+\left[\dfrac{100}{2^2}\right]+\cdots+\left[\dfrac{100}{2^6}\right]=97$ 知积式中含有 97 个 2. 又 $\left[\dfrac{100}{3}\right]+\left[\dfrac{100}{3^2}\right]+\left[\dfrac{100}{3^3}\right]+\left[\dfrac{100}{3^4}\right]=48$, 所以含有 48 个 3, 从而有 $1\times2\times3\times\cdots\times99\times100=2^{97}\times3^{48}\times p=12^{48}\cdot(2p)$, 其中 $M=2p$, 但不能被 3 整除. 故选(A)　**8.** $x=[x]+\{x\}$, 则有 $3\{x\}=2[x]$, $0<\{x\}=\dfrac{2}{3}[x]<1$, 得 $[x]=1$, $\{x\}=\dfrac{2}{3}$. 故 $x=\dfrac{5}{3}$　**9.** 令 $2x-\dfrac{1}{2}=t$, t 是整数, 则 $3x+1=\dfrac{3}{2}t+\dfrac{7}{4}$, 所以 $t\leqslant\dfrac{3}{2}t+\dfrac{7}{4}<t+1$, 得 $-\dfrac{7}{2}\leqslant t<-\dfrac{3}{2}$, 从而有 $t=-2$ 时, $x=-\dfrac{3}{4}$; $t=-3$ 时 $x=-\dfrac{5}{4}$. 故其所有根的和为 -2　**10.** $[-1.77x]=-2x$, 即 $-2x\leqslant-1.77x<-2x+1$, 得 $x<\dfrac{100}{23}$. 因此满足要求的数 x 有 4 个, 即 $x=1, 2, 3, 4$　**11.** 易知 $y-[y]=\dfrac{1}{2}$, 且 $[x]=2$, $x-[x]=0$, $[y]=4$; $x-[x]=\dfrac{1}{3}$, $[y]=5$; $x-[x]=\dfrac{2}{3}$, $[y]=6$. 所以有 $x=2$, $y=4\dfrac{1}{2}$; $x=2\dfrac{1}{3}$, $y=5\dfrac{1}{2}$; $x=2\dfrac{2}{3}$, $y=6\dfrac{1}{2}$　**12.** 由 $m\leqslant a-\sqrt{a}<1+m$ 知至多有两个符合条件的整数 a　**13.** 令 $\{x\}=t$, $0\leqslant t<1$, $[x]=n$,

$n \geqslant 0$，则 $n^2 = (n+t)t < n+1$，得 $0 \leqslant n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 故 $n = 0, 1$. $n = 0$ 时，$t = 0$，这与 $x > 0$ 矛盾. 于是 $n = 1$，有 $t^2 + t = 1$，得 $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$，从而 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **14.** $[x]\{x\} - [x] - \{x\} + 1 < 0$，即 $([x]-1)(\{x\}-1) < 0$，故 $[x] > 1$，于是不等式的解为 $x \geqslant 2$ **15.** (1) $([x]-2)([x]+1) = 0$，得 $2 \leqslant x < 3$ 或 $-1 \leqslant x < 0$ (2) 令 $[x] = n$，则 $x^2 + 7 = 8n$. $n^2 + 7 \leqslant 8n < n^2 + 2n + 8$，得 $n = 1, 5, 6, 7$. 所以原方程的解是 $x = 1, \sqrt{33}, \sqrt{41}, 7$ **16.** 配对：$\left[\frac{23\times 1}{101}\right] + \left[\frac{23\times 100}{101}\right] = 22$. 同理可知 $\left[\frac{23\times 2}{101}\right] + \left[\frac{23\times 99}{101}\right] = 22, \cdots, \left[\frac{23\times 50}{101}\right] + \left[\frac{23\times 51}{101}\right] = 22$. 故原式 $= 22 \times 50 = 1\,100$ **17.** 原式 $= 1\times(2\times 1+1) + 2\times(2\times 2+1) + \cdots + (n-1)\times(2(n-1)+1) = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$，这里 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} \times n(2n+1)(n+1)$ **18.** $2\,000 \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$ 中含 11 的最高幂次数为 $k_1 = \left[\frac{2\,000}{11}\right] + \left[\frac{2\,000}{11^2}\right] + \left[\frac{2\,000}{11^3}\right]$，$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 1\,000$ 中含 11 的最高幂次数为 $k_2 = \left[\frac{1\,000}{11}\right] + \left[\frac{1\,000}{11^2}\right]$，则有 $k_1 - k_2 = 198 - 98 = 100$ **19.** 令 $[x] = k$，则有 $k^2 - 2k(x-[x]) - [k^2 + 2k(x-[x]) + (x-[x])^2] = 0$，所以 $2k(x-[x]) = [2k(x-[x]) + (x-[x])^2] = 0$，就有 $x = k, \frac{1}{2k} + k, \cdots$，共 $2k$ 个，$k = 1, 2, \cdots, n$. 故 $1 \leqslant x \leqslant n$ 时共有 $n^2 - n + 1$ 个根 **20.** 由 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1\,990} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1\,990}$ 是整数，可知 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1\,990}$ 的小数部分为 $1 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1\,990}$. 又 $0 < (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1\,990} < 0.2^{995} < (0.008)^{300}$，所以 $0.9 < 1 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1\,990} < 1$，从而知 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1\,990}$ 的小数点在第一位数字为 9 **21.** 设 r 为正整数 $(1 \leqslant r \leqslant b-1)$，则有 $\left[\frac{(b-r)a}{b}\right] = a - \left[\frac{ra}{b}\right] - 1$. 这样 $\left[\frac{(b-1)}{b}a\right] + \left[\frac{(b-2)a}{b}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{b}a\right] = (b-1)(a-1) - \left(\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{2a}{b}\right] + \cdots + \left[\frac{(b-1)a}{b}\right]\right)$，所以 $\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{2a}{b}\right] + \cdots + \left[\frac{(b-1)a}{b}\right] = \frac{(b-1)(a-1)}{2}$

测试题 1. $8[x]+3\{x\}=49$，则 $\{x\}=\frac{1}{3}$，$[x]=6$，故 $x=6\frac{1}{3}$ 2. $1\,999^2<1\,999^2+1<2\,000^2$，但 $\sqrt{1\,999^2+1}-2+\sqrt{3}<1\,999$. 故 $\left[\sqrt{1\,999^2+1}-2+\sqrt{3}\right]=1\,998$ 3. 易知 x 是整数，y 是整数，则有 $x+y-8=6-x$，$x-5+y-4=15-x-y$，解之得 $x=2$，$y=10$ 4. $n=4k+1$ 时，$\left[\frac{n^2}{4}\right]=2k(2k+1)$ 不为质数；$n=4k+2$ 时，$\left[\frac{n^2}{4}\right]=(2k+1)^2$ 不为质数；$n=4k+3$ 时，$\left[\frac{n^2}{4}\right]=2(2k+1)(k+1)$，$k\neq 0$ 不为质数，而当 $k=0$ 时，$\left[\frac{n^2}{4}\right]=2$，故 $n=3$

第二十一讲　几何定值问题

练习题 1. P、M、O、N 四点共圆，圆 O 的半径 OP（设为 R）恰为圆 $PMON$ 的一条直径，则 $\angle MON$ 为定角（设为 α），于是由正弦定理 $MN=R\sin\alpha$（定长） 2. $MN\parallel BC$，设 MN 交 AP 于 Q，则 $AQ=QP$. 由 A、P 为定点知 Q 点也为定点，于是直线 MN 恒通过定点 Q 3. (1)因为 $DC=DA$，$EC=EB$，则 $PD+PE+DE=PD+DA+PE+BE=PA+PB$. 故 $\triangle PDE$ 的周长为定值. (2) $\angle DOE=\frac{1}{2}\angle AOB$ 4. 作 $PE\perp OA$ 于 E，$PF\perp OB$ 于 F，连结 PC、PD，则有 $\triangle PCE\cong\triangle PDF$，得 $CE=DF$. 故 $OC+OD=(OE-CE)+(OF+FD)=OE+OF=$（定值） 5. 设 $AP=m$，$\angle BAP=\angle CAP=\alpha$（定角），连 PB、PC，有 $PB=PC$，利用余弦定理得 $AB^2-(2m\cos\alpha)\cdot AB+(m^2-PB^2)=0$，$AC^2-(2m\cos\alpha)\cdot AC+m^2-PB^2=0$. 由一元二次方程根与系数的关系知 $AB+AC=2m\cos\alpha=$ 定值 6. 设 E、F 是 AB、CD 之中点，且 MN 与 EF 交点为 O，则 $S_{\triangle OMB}=S_{\triangle ONF}$. 易证 $\triangle OME\backsim\triangle ONF$，于是 $1=S_{\triangle OME}:S_{\triangle ONF}=OE^2:OF^2$，即有 O 为 E、F 的中点. 由此可知 MN 必过定点 O 7. 特殊位置：角平分线 OA 的垂线，则 $OP=OQ$. 一般地，取 OP 中点 C，连 AC，有 $AC\parallel OQ$，则 $\frac{CP}{OC}=\frac{PA}{AQ}$，得 $\frac{OC}{OP}=\frac{AQ}{PQ}$. 又 $\frac{OQ}{OP}=\frac{AQ}{AP}$，则 $\frac{OQ}{OP+OQ}=\frac{AQ}{PQ}$. 因而就有 $\frac{1}{OP}+\frac{1}{OQ}=\frac{1}{OC}$. 由 A 为定点，OY 是定直线，C 为一定点，OC 为定值，故结论成立 8. 设 $EH\parallel FG\parallel BD$，$EF\parallel HG\parallel AC$. 交 AB、BC、CD、DA 于 E、F、G、H，则 $EFGH$ 为平行四边形，且有 $\frac{EH}{BD}=\frac{AE}{AB}$，$\frac{EF}{AC}=\frac{BE}{AB}$，从而 $EF+EH=AC$. 因此 $\square EFGH$ 的周长为 $2(EF+EH)=2AC=$ 定值 9. 因为 $\angle ANM=\angle ABM$，所以 $\triangle PAN\backsim\triangle PMB$，得 $\frac{BM}{AN}=\frac{PB}{PN}$. 又

$\triangle PAM \backsim \triangle PNB$，则 $\frac{AM}{BN}=\frac{PA}{PN}$. 于是 $\frac{AM\cdot BM}{AN\cdot BN}=\frac{PA\cdot PB}{PN^2}=\frac{PM}{PN}=\frac{a}{a+2R}$ = 定值，这里 $a=PM$ =（定长），R 为圆半径　**10.** 连 OE、OF、FC、AO，AO 交 EF 于 M，则有 A、E、O、F、C 共圆，得 $\angle OFM=\angle OCF$. 又 $\triangle PFO \backsim \triangle FCO$，$\frac{OF}{OC}=\frac{OP}{OF}$，故 $OP=\frac{OF^2}{OC}=\frac{r^2}{d}$ = 定值　**11.** 连 CD，取 CD 中点 M，并连 MG、MF，则 $MG \overset{//}{=} \frac{1}{2}CE$，$MF \overset{//}{=} \frac{1}{2}DB$，得 $MG=MF$. 所以 $\angle MGF=\angle MFG$. 又 $\angle FMG+\angle BAC=180°$，$\angle MGF+\angle MFG+\angle FMG=180°$，则有 $\angle BAC=\angle MFG+\angle MGF$. 作 $\angle A$ 的平分线 AT，就有 $\angle MGF=\angle CAT$. 故 $GF \parallel AT$，而 AT 方向一定，得直线 GF 有定向　**12.** 连 OO_1、OO_2，设直线 AB 交圆 O_1 于 C，交直线 O_1O_2 于 D，连 CO_1，则 $\triangle O_1CA$ 与 $\triangle OAB$ 均为等腰三角形，得 $\angle ACO_1=\angle OBA$，所以 $CO_1 \parallel BO_2$，得 $\frac{DO_1}{DO_2}=\frac{O_1C}{O_2B}$，令 O_1O_2 的长为 l，l、r_1，r_2 均为定长，从而 $O_1D=\frac{r_1 l}{r_2-r_1}$ = 定长

测试题　**1.** 因为 $\triangle BPQ \backsim \triangle BDA$，$\triangle PCR \backsim \triangle DCA$，则 $\frac{PQ}{DA}=\frac{BP}{BD}$，$\frac{PR}{DA}=\frac{PC}{DC}$. 于是由 $BD=DC$，$BP+PC=BC=2BD$ 得 $\frac{PQ+PR}{DA}=2$　**2.** 连 OD、OM、OF、ON、OE，则 $\angle BOM=\angle CNO$，$\angle MBO=\angle OCN$，所以 $\triangle BOM \backsim \triangle CNO$，得 $\frac{BM}{CO}=\frac{BO}{CN}$，从而 $BM\cdot CN=BO^2=\frac{1}{4}BC^2$（定长）　**3.** 因 $CA^2=CD\cdot CE$，则 $BC^2=CD\cdot CE$，所以 $\triangle BCD \backsim \triangle ECB$，又 $\angle DEQ=\angle DPQ$，故有 $\angle CBP=\angle BPQ$，从而 $PQ \parallel AB$. 而 AB 是定圆 O 上过定点 A 的切线，其方向一定. 结论成立

第二十二讲　三角形的“五心”

练习题　**1.** 任作⊙P，使 Q 在⊙P 内. 在⊙P 上任取一点 A，射线 AQ 交⊙P 于 D；以 D 为圆心，DQ 为半径画弧交⊙P 于 B、C，$\triangle ABC$ 即为所求. 由⊙P 可大可小，A 点又是任意取的，故有无数个三角形. 故选(D)　**2.** 令 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R，则 $m=\sqrt{R^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=R\cos A$，$n=R\cos B$，$p=R\cos C$. 故选(C)　**3.** 易知 $\frac{EF}{BC}+\frac{PQ}{CA}+\frac{HG}{AB}=\frac{EF}{BC}+\frac{BP}{BC}-\frac{GC}{BC}=2$，则 $\frac{EF}{BC}=\frac{PQ}{CA}=\frac{HG}{AB}=\frac{2}{3}$，故 $\triangle ABC$ 的重心同时在 EF、PQ、HG 上，O 点必为 $\triangle ABC$ 的重心. 故选(B)　**4.** 10个　**5.** 113°　**6.** 作 BC 边中线 AM，则 AM 过 G. 于是有 $S_{\triangle GBM}=$

$S_{\triangle GCM}=S_{\triangle GDA}=S_{\triangle GEA}=S_{\triangle GIC}=S_{\triangle GEB}$，从而 $S_{\triangle GBC}=S_{ADGE}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$

7. AA_1、BB_1 是两条直径，故 AB_1A_1B 是矩形，即 $AB_1 \parallel BA_1$. 取 P 点，使 $CP \parallel AB$，易知 BA_1CP、PCB_1A、PAC_1B 都是平行四边形. 故 $S_{ABC_1}=S_{ABP}$，$S_{BCA_1}=S_{BCP}$，$S_{CAB_1}=S_{CAP}$，从而有 $S_{ABC_1}+S_{BCA_1}+S_{CAB_1}=S_{ABC}$ **8.** 作$\triangle ABC$ 的外接圆，BD 延长线交外接圆于 K，连 AK、CK，则 $\angle AKB=\angle ACB=20°$，$\angle BDA=40°$，$\angle DAK=\angle BDA-\angle AKB=20°$. 所以 $DA=DK$. 同理得 $DC=DK$. 于是有 D 为$\triangle ABC$ 外接圆圆心，从而 $\angle ACK=90°$，$\angle CAD=45°$，$\angle ACK=70°$，得 $\angle CPD=85°$ **9.** 作$\triangle AMC$ 的外接圆 O，设半径为 R，则 $\angle MOC=30°$，且得 AB 与$\odot O$ 相切于 A，所以 $\angle OAB=90°$. 过 M、B 分别作 MP、BQ 垂直于 OC，由 $BM=MC$ 得 $MP=\frac{1}{2}BQ$，故 $BQ=R=OA$，从而 $AB \parallel OC$，$\angle AOC=90°$. 得 $\angle C=\angle MCA=\frac{1}{2}\angle AOM=30°$ **10.** 点 P、Q 分别是$\triangle BM'M$、$\triangle MM'C$ 的外心，则有 $\angle BM'M=\frac{1}{2}\angle BAC$，$\angle MM'C=\frac{1}{2}\angle BAC$，所以有 $\angle BM'M+\angle MM'C=\angle BAC$，即 $\angle BM'C=\angle BAC$，从而得 M'、A、B、C 四点共圆，即点 M'在$\triangle ABC$ 的外接圆上 **11.** 令$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCD$、$\triangle PDA$的半周长依次为 p_1、p_2、p_3、p_4，$S_{\triangle PAB}=S_1$，$S_{\triangle PBC}=m^2$，$S_{\triangle PCD}=S_3$，$S_{\triangle PDA}=n^2$，则有 $S_1=S_3=mn$，又 $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{p_1+p_3}{mn}$，$\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}=\frac{p_2n^2+p_4m^2}{m^2n^2}$，且由 $\triangle PBC \backsim \triangle PDA$ 得 $\frac{p_2}{p_4}=\frac{m}{n}$，则 $\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}=\frac{p_2+p_4}{mn}$. 所以 $p_1+p_3=p_2+p_4$，从而有 $AB+CD=BC+DA$ **12.** 连 AE、BD、MC、PC、CF、BN、NE、PE. 因 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$，所以 $BD=AE$，同理 $FC=BD$. 从而有 $\triangle BMN \backsim \triangle BCF$，得 $\frac{MN}{FC}=\frac{BM}{BC}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 同理得 $\frac{PN}{BD}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{MP}{AE}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以 $MN=NP=PM$，即$\triangle MNP$ 是正三角形 **13.** (1) 设$\angle A$ 的平分线交 CO_2 于 E，则 $\angle EAC=\angle O_2CB$，且 $\angle EAC+\angle ACE=90°$，所以 $\angle AEC=90°$，从而 $O_1O \perp CO_2$ (2) $\angle O_1CO_2=45°$，又 $\angle O_1EC=90°$，则 $CE=EO_1$. 同理，设直线 O_2O 交 CO_1 于 F，则 $O_2F \perp CF$，$\angle OO_2E=45°$，有 $O_2E=EO$. 于是有 $\triangle CEO \cong \triangle O_1EO_2$，得 $OC=O_1O_2$ **14.** 连 A_1B、A_1C、A_1I_1，则 $\angle BI_1C=\frac{\angle B+\angle C}{2}$. 所以 $\angle BA_1C=2\angle BI_1C=\angle B+\angle C$，从而 $\angle BA_1C+\angle A=180°$，得 A、B、A_1、C 四点共圆. 同理得 A、B、C、B_1 四

点共圆，A、C_1、B、C 四点共圆. 故 A、B、C、A_1、B_1、C_1 6 点共圆，即结论成立 **15.** 连 AI 交 BC 于 P，交外接圆于 K，连 BK. 则 $OK \perp BC$，$OK = R$，$PC = \frac{ab}{b+c}$，$BK = IK$，$\triangle AKB \backsim \triangle ACP$. 又 $AD \parallel OK$，有 $\frac{AD}{OK} = \frac{AI}{IK}$，即 $\frac{AD+OK}{OK} = \frac{AK}{IK} = \frac{AK}{BK}$，但由 $\triangle AKB \backsim \triangle ACP$ 得 $\frac{AK}{BK} = \frac{AC}{PC} = \frac{b+c}{a}$. 于是有 $\frac{h_a+R}{R} = \frac{b+c}{a}$，$R = \frac{ah_a}{b+c-a} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{b+c-a} = r_a$ **16.** (1)连结 DI，DI_2，并延长 DI_1 交 AB 于 G. 则 $\mathrm{Rt}\triangle ABD \backsim \mathrm{Rt}\triangle CAD$，且 $\angle I_1DI_2 = 90°$，$\frac{DI_1}{DI_2} = \frac{AB}{AC}$，所以 $\triangle DI_1I_2 \backsim \triangle ABC$，从而 $\angle AEF = \angle GDB = 45°$. 故 $\angle AFE = 45° = \angle AEF$，得 $AE = AF$ (2)假设 $\angle BAC \neq 90°$，则 $\angle AEF = \angle AFE \neq 45°$，连 AI_1、AI_2、DI_1、DI_2，则 $AE = AF \neq AD$. 在 AB、AC 上分别截取 AE'、AF'，使得 $AE' = AF' = AD$，故 $\triangle ADI_1 \cong \triangle AE'I_1$，$\triangle ADI_2 \cong \triangle AF'I_2$，得 $\angle AE'I_1 = \angle AF'I_2 = 45°$，于是 $\angle EE'I = \angle FF'I = 45°$ 或 $135°$，从而 $\triangle EE'I_1 \cong \triangle FF'I_2$，得 $EI_1 = FI_2$. 又 $\triangle AEI_1 \cong \triangle AFI_2$，得 $\angle BAD = \angle CAD$，故 $\angle B = \angle C$，$AB = AC$. 因此，$AE = AF$，$\angle BAC$ 不一定等于 $90°$，当 $AB = AC$ 时存在不成立情形

测试题 **1.** 由 H、E、C、D 四点共圆知 $\angle BHD = \angle BCA$，而 $\angle BCA = \angle BKH$，所以 $\angle BKH = \angle BHK$，得 $BH = BK$. 又 $BD \perp HK$，故 $HD = DK$ **2.** 连 AG 交 BC 于 D，连 AI 交 BC 于 E，连 BI，CI. 在 $\triangle ADE$ 中，因 $GI \parallel DE$，则 $AI : IE = AG : GD = 2 : 1$，又 $AB : BE = AI : IE = 2 : 1$. 同理有 $AC : CE = AI : IE = 2 : 1$，即 $AB = 2BE$，$AC = 2CE$. 从而有 $AB + AC = 2BC$ **3.** 假设 $\triangle ABC$ 不是等腰三角形，则 O、I、H 三点所在直线不能经过 A、B、C 中的任一点，连 AI、AH、AO，并将 AH 延长交 BC 于 D，则 $AD \perp BC$. 又将 AO 延长交 $\odot O$ 于 E，连 BE，则 $BE \perp AB$. 又 $\angle BAE = \angle DAC$，则 $\angle IAE = \angle IAD$，$\frac{AO}{AH} = \frac{OI}{IH}$. 若连结 BO、BH、CO、CH，同理得 $\frac{BO}{BH} = \frac{OI}{IH}$，$\frac{CO}{CH} = \frac{OI}{IH}$. 所以 $\frac{AO}{AH} = \frac{BO}{BH} = \frac{CO}{CH}$. 又 $AO = BO = CO$，则 $AH = BH = CH$，则 $\triangle ABC$ 有二个外心，这不可能. 由此可知假设不能成立. 故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形 **4.** $\angle BCD = \angle A$，$\angle ACD = \angle B$，$\angle ANC = \angle B + \angle BCN = \angle ACD + \angle DCN = \angle ACN$，则 $AN = AC$. 同理 $BM = BC$. 连结 AO 延长交 CN 于 E，连结 BO 延长交 CM 于 F，显然 O_1、O_2 分别在 AE、BF 上，从而 AE 为 CN 的垂直平分线，BF 为 CM 的垂直平分线. 于是 $OM = OC$，$ON = OC$，即 O 为 $\triangle CMN$ 的外心. 故 $\angle MON = 2\angle MCN = 90°$，即 $OM \perp ON$ **5.** 由 Ceva 定

理得 $\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CH}{HA}=1$，而 $\frac{BM}{CM}=1$，$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}$，于是有 $\frac{CH}{AH}=\frac{a}{b}$.

令 $CH=at$，$AH=bt$，则 $at+bt=b$，$t=\frac{b}{a+b}$. 又 $BH^2=c^2-b^2t^2=a^2-a^2t^2$，所以有 $a^3+b^3+a^2b-ab^2-bc^2-ac^2=0$. 反之，亦成立. 由上式知不存在符合要求的等腰三角形(不含等边三角形)

第二十三讲　几何不等式

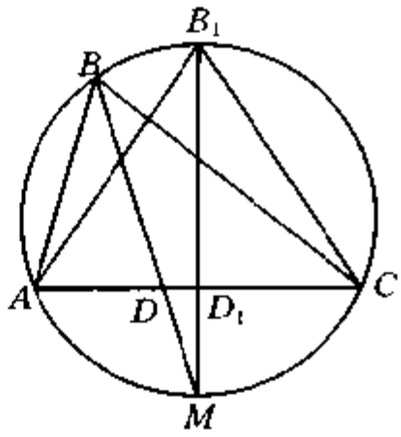
练习题　1. $\angle ADB$ 和 $\angle ADC$ 之中必有一个大于等于 $90°$，不妨设为 $\angle ADB\geqslant 90°$，则 $AB>AD$. 所以 AD 小于 $\triangle ABC$ 中的最大边　2. 考虑 P、Q 都在 $\triangle ABC$ 内. 连 AP、BP、CP，延长 AP 交 BC 边于 D，则由第 1 题结论知 $AP<\triangle ABC$ 中最大边. 同理 BP、$CP<\triangle ABC$ 中最大边，$PQ<\triangle APC$ 中最大边. 从而有 $PQ<\triangle ABC$ 中最大的边. 其余情形同理　3. 延长中线一倍，构成平行四边形，利用三角形两边之和大于第三边而得结论　4. 利用中线长公式易知结论成立　5. 因为 $b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2}$，所以 $m_a^2=\frac{(b-c)^2}{2}+bc-\frac{a^2}{4}\geqslant bc-\frac{a^2}{4}$. 又 $m_a^2=bc+\frac{(b-c+a)(b-c-a)}{2}+\frac{a^2}{4}<bc+\frac{a^2}{4}$. 同理得到其余两式成立　6. 在桌面 D 处引线段 $DE\perp$ 桌面，且使 $DE=BC$. 当 A、C、E 三点共线时，BD 最小，即此时，灯泡 B 距桌面上 D 点最近　7. 设 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，$\triangle A'BC$ 是与 $\triangle ABC$ 同底且面积相等的任一不等腰三角形(不妨设 A、A' 在 BC 同侧). 易知 $AA'\parallel BC$，延长 BA 到 C' 使 $AC'=AC$，则有 $\triangle AC'A'\cong\triangle ACA'$，所以 $A'B+A'C=A'B+A'C'>C'B=AB+AC$　8. 作 $\angle ECF=\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC$，$CF$ 交 BD 于 F. 又 CF 在 $\angle DCE$ 内部，F 在线段 DB 内部，则 B、C、F、E 四点共圆. 由 $\angle ACB>\angle ABC$ 得 $\angle EBC<\angle FCB$，故 $CE<BF<BD$　9. 设 $BC=a$，由余弦定理和正弦定理得 $c^2+1-2c\cos A=a^2=(2R\sin A)^2\leqslant 4\sin^2 A$，即 $(c-\cos A)^2\leqslant 3\sin^2 A$. 因为 $c>AC\cos A=\cos A$，所以 $c-\cos A\leqslant\sqrt{3}\sin A$，结论成立　10. 由 $\triangle ABC$ 是锐角三角形得 $\angle A>90°-\angle B$，$\cos A<\cos(90°-B)=\sin B$，则 $\cos A+\cos B+\cos C<\sin A+\sin B+\sin C$. 再由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2$，有 $\sin A+\sin B-\sin C=\frac{1}{2}(a+b+c)$ 故 $\cos A+\cos B+\cos C<\frac{1}{2}(a+b+c)$

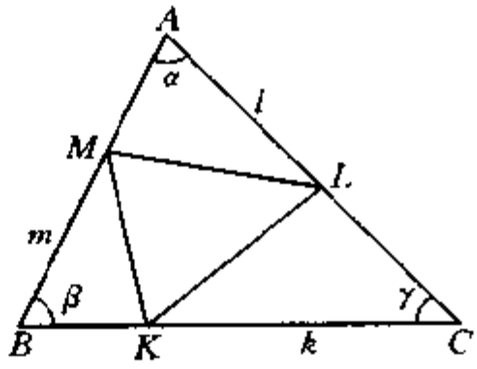
11. $AP+BP>AB=1$，$BP+CP>BC=1$，$CP+AP>AC=1$. 得 $L>1.5$. 过 P 作 $MN\parallel BC$，交 AB 于 M，交 AC 于 N，则 $\triangle AMN$ 是正三角形，$\angle APN>\angle AMP=60°=\angle ANP$，所以 $AP<AN$. 又 $MP+BM>BP$，$NP+CN>CP$，则 $MP+BM+NP+CN>BP+CP$，即 $BM+MN+NC>$

$BP+CP$，但 $AM=MN$，$AN>NP$，故 $(BM+AM)+(AN+NC)>AP+BP+CP=L$，即 $AB+AC>L$，即有 $1.5<L<2$　**12.** 由 X、Y 向 AC 或 AC 的延长线引垂线 XE 和 YF，就有 $AX+AY>AE+AF=2AC+(CF-CE)$. 易证 $CF>CE$. 故 $AX+AY>2AC$　**13.** 作 $CD\perp AB$ 于 D，作 $RE\perp AB$ 于 E，设 BC、CA、AB 长分别为 a，b，c，则 $PQ=\frac{1}{3}(a+b+c)>\frac{2}{3}c$，$PA\leqslant AB-PQ<c-\frac{2}{3}c=\frac{c}{3}$. 由此可知 $PA+RA=\frac{1}{3}(a+b+c)$. 又 $PA<\frac{c}{3}$，则 $RA>\frac{1}{3}(a+b+c)-\frac{c}{3}=\frac{1}{3}(a+b)>\frac{c}{3}$. 故 $\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{PQ\cdot RE}{AB\cdot CD}=\frac{PQ}{AB}\cdot\frac{AR}{AC}>\frac{2}{9}$　**14.** $S_{ABCDEF}=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 要使 $S_{\triangle PQR}$ 最大，P 点应在与 QR 平行的 DE 边上，过 P 作 $PH\perp QR$ 交 QR 于 H，交 AB 于 K，过 A 作 $AM\perp QR$ 交 QR 于 M，过 B 作 $BN\perp QR$ 交 QR 于 N. 令 $PH=x$，则 $HK=\sqrt{3}-x$，$QM=NR=AM\cdot\tan 30^\circ=1-\frac{\sqrt{3}}{3}x$，$QR=3-\frac{2}{3}\sqrt{3}x$. 所以 $S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}\left(3-\frac{2}{3}\sqrt{3}x\right)x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2+\frac{9\sqrt{3}}{16}$. 当 $x=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 时，$S_{\triangle PQR}$ 最大值为 $\frac{9\sqrt{3}}{16}$　**15.** 连 AM、AN、DM、DN、BM、NC. 由 $\triangle ADB\backsim\triangle ACD$，得 $\angle ABD=\angle DAC$，$\angle BDA=\angle CDA$，M、N 分别是 $\triangle ADB$、$\triangle ACD$ 的内心，故 $\angle BDM=\angle NDA$，$\angle DBM=\angle DAN$，从而 $\triangle MDB\backsim\triangle NDA$，得 $\frac{DM}{DN}=\frac{BD}{AD}$. 又 $\triangle NMD\backsim\triangle ABD$，则 $\angle LKA=\angle BDM=45^\circ$，即 $\triangle AKL$ 为等腰直角三角形. 因为 $\triangle AMK\cong\triangle AMD$，得 $AK=AD=AL$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC$，$S_{\triangle AKL}=\frac{1}{2}AK\cdot AL=\frac{1}{2}AD^2=\frac{1}{2}\times\frac{AB^2\cdot AC^2}{BC^2}<\frac{1}{2}AB\cdot AC\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}AB\cdot AC$，这里 $BC^2=AB^2+AC^2\geqslant 2AB\cdot AC$. 因此，$S_{\triangle ABC}\geqslant 2S_{\triangle AKL}$

测试题　**1.** $\angle BAC>\angle ABC=\angle ACB$，$\triangle FBD\cong\triangle DCE$，则 $DF=DE$，$\angle FDE=\angle ABC$，所以 $2\angle DEF+\angle FDE=180^\circ$，从而有 $60^\circ\leqslant\angle DEF<90^\circ$. 选(C)　**2.** $AD\perp BC$ 于 D，$BE\perp AC$ 于 E，$CF\perp AB$ 于 F. $AD=h_a$，$BE=h_b$，$CF=h_c$，则 $h_a+CD>b$，$h_a+BD>c$，$h_b+CE>a$，$h_b+AE>c$，$h_c+AF>b$，$h_c+BF>a$. 所以 $2(h_a+h_b+h_c)+(a+b+c)>2(a+b+c)$，即 $\frac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c}>\frac{1}{2}$. 在直角 $\triangle ACD$、$\triangle BAE$、$\triangle CBF$ 中，$h_a<b$，$h_b<c$，

$h_c < a$，则 $h_a + h_b + h_c < a + b + c$. 故结论成立　3. 由题中不等式得 $\frac{(x+y)^2 - z^2}{2xy} + \frac{(y+z)^2 - x^2}{2yz} + \frac{(z+x)^2 - y^2}{2zx} > 4$，即有 $(x+y+z)[z(x+y-z) + (y+z-x)x + (z+x-y)y] > 8xyz$ 则有 $(x+y-z)(z+y-x)(z+x-y) > 0$. 不妨设 $0 < x \leqslant y \leqslant z$，则 $z+y-x > 0$，$z+x-y > 0$. 所以 $x+y-z > 0$，即 $x+y > z$. 于是 x、y、z 是某个三角形的三边长　4. $\triangle ABC$ 中，AC 为底边(定边)，$\angle ABC$ 为定角，作 $\triangle ABC$ 的外接圆，则其它三角形的顶点落在弧 ABC 上，对其中等腰三角形 AB_1C 作出顶角平分线 B_1D_1. 延长两条角平分线 BD 和 B_1D_1 交于圆同一点 M，M 是 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点. 由 B_1M 是圆的直径，得 $BM < B_1M$. 在 $\triangle DD_1M$ 中 $D_1M \perp AC$，则 $DM > D_1M$. 于是有 $BM - DM < B_1M - D_1M$，即 $BD < B_1D_1$　5. 尝试证明 $S_{\triangle LAM} \cdot S_{\triangle MBK} \cdot S_{\triangle KCL} \leqslant \left(\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}\right)^3$. 令 $AC = b$，$BC = a$，$AB = c$，$KC = k$，$AL = l$，$BM = m$，且有 $0 < k < a$，$0 < l < b$，$0 < m < c$，$0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$. 于是 $S_{\triangle LAM} = \frac{l}{2}(c-m)\sin\alpha$，$S_{\triangle MBK} = \frac{m}{2}(a-k)\sin\beta$，$S_{\triangle KCL} = \frac{k}{2}(b-l)\sin\gamma$，$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. 则 $(S_{\triangle ABC})^3 = \frac{1}{8}a^2b^2c^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. 所以 $\frac{S_{\triangle LAM} \cdot S_{\triangle MBK} \cdot S_{\triangle KCL}}{(S_{\triangle ABC})^2} = \frac{nkl(c-m)(a-k)(b-l)}{a^2b^2c^2}$.



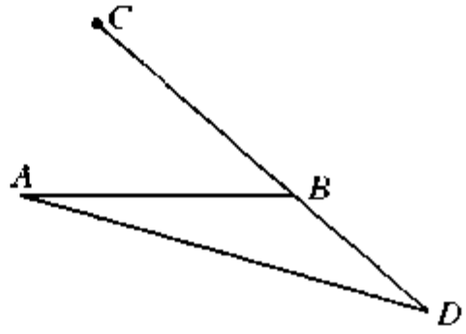


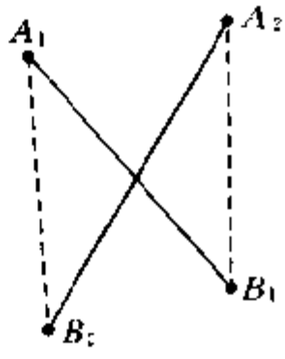
易知 $m^2 - cm + \frac{c^2}{4} = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$，则有 $0 < (c-m)m \leqslant \frac{c^2}{4}$，同理有 $0 < (b-l)l \leqslant \frac{b^2}{4}$，$0 < (a-b)k \leqslant \frac{a^2}{4}$. 所以 $S_{\triangle LAM} \cdot S_{\triangle MNK} \cdot S_{\triangle KCL} \leqslant \left(\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}\right)^3$. 因而必有一个三角形的面积不超过 $\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$(否则，若均大于 $\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，则其和有 $> \left(\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}\right)^3$，矛盾)

第二十四讲　极端原理

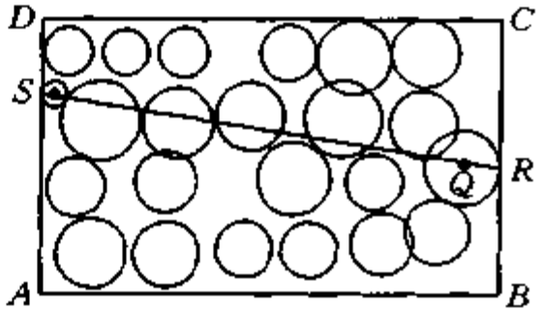
练习题　1. 极端情形是无4只猴子分得的花生一样多，则就有 $3 \times (0+1+$

$2+3+\cdots+32)+33=1\,617$. 故必有 4 只猴子分得花生一样多　2. “极端”——最大角. 对于四边形 $ABCD$ 内任一点 P，则 $\angle APB$、$\angle BPC$、$\angle CPD$、$\angle DPA$ 之和为 360°，故其中最大的一个角（设为 $\angle APB$）“大于等于”90°，即点 P 在以 AB 为直径的半圆内　3. 不能作出. 这是因为，假设这几条线段的端点，两两之间距离最大的是点 A 和点 B 之间的距离. 设线段 b 以点 B 为一端点，由已知条件，B 在另外某一线段 d 之内部. 设 d 的两个端点分别是 C 和 D. 由 $\angle ABD+\angle ABC=180°$ 得 $\angle ABD$ 和 $\angle ABC$ 必至少有一个，不妨令 $\angle ABD\geqslant 90°$. 由此得 $AD>AB$，与 AB 最大性矛盾　4. 取“极端”直线为使这些点在直线的同一侧，平移（或旋转）这条直线，直到这样的直线 l 上至少有给定点中的两点，而其余点在 l 的同一侧. 令 A、B 是 l 上相邻的两点，则在 l 外的同一侧必有给定点中的其他点 P_1，…，P_k. 设点 P 是使 $\angle AP_1B$，…，$\angle AP_kB$ 中最大的一点 P_i，则过点 A、B、P 的圆内没有给定点中的其他点　5. “极端”——AA_1 过 O_1、O_2，B_1、B 与 P 点重合，则有 $AA_1^2+BB_1^2=(d_1+d_2)^2$. 令 $AP=x_1$，$A_1P=x_2$，$BP=y_1$，$B_1P=y_2$，则 $x_1^2+y_1^2=d_1^2$，$x_2^2+y_2^2=d_2^2$，且 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{d_1}{d_2}$. 于是令 $x_1=d_1t$，$x_2=d_2t$，$y_1=d_1s$，$y_2=d_2s$，则 $s^2+t^2=1$，从而 $2(x_1x_2+y_1y_2)=2d_1d_2$. 故有 $(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2=(d_1+d_2)^2$　6. “极端”——线段总长最小. 考察所有一蓝一白连结的 n 条线段，则 n 条线段总长取最小值的连法满足要求. 如右图，若 A_1B_1 与 A_2B_2 相交（A 表蓝点，B 表白点），改连 A_1B_2 及 A_2B_1（其余 $n-2$ 条线段不动），令使 n 条线段总长变小，如此下去有限次，得到结论　7. “极端”——最大值. 设 A_i 有 c_i 个熟人，其中 d_i 不跟他同组，则 d_i 随分组方式变化. 于是存在某种分法可使 $d_i\geqslant\frac{1}{2}c_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 令 $d=d_1+d_2+\cdots+d_n$，则分法不同，d 也可能不同. 设 D 是所有这些 d 构成的集合，则 D 是一个由有限个正整数构成的集合，其中有一个最大整数 d'，与 d' 相应的分法符合要求. 假设 $d'=d_1+d_2+\cdots+d_n$ 已达 D 中最大值，但甲组有某成员 A_i，他在乙组中认识人的数目 $d_i<\frac{1}{2}c_i$. 我们将 A_i 调往乙组. 这时甲组中原有的 c_i-d_i 个他认识的人不再与他同组；而乙组原来的 d_i 个他的相识之人却与他同组了，这些人便都由于他调入乙组而减少了一个不同组的熟人；其他再无变化. 所以调动后的 d 与调动前





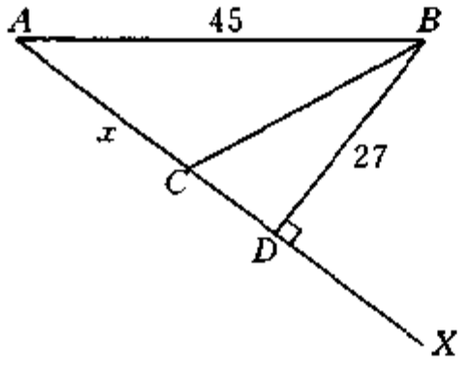
的 d' 之差为 $d-d'=(c_i-d_i)-d_i=c_i-2d_i>0$，即有 $d>d'$，这与 d' 的最大性矛盾，再由对称性知结论成立　8. (1) 否则，设 A_1，A_2，…，A_k 是构图中的一个多边形，$k\geqslant 3$. 不妨设 A_1A_2 是这多边形中最长的边. 因给定的点两两之间距离都不相等，所以这样的边是唯一的. 这样 $A_kA_1<A_1A_2$，故 A_2 不是离 A_1 最近的点，即线段 A_1A_2 不是来自对点 A_1 的考虑. 因 $A_2A_3<A_1A_2$，那么 A_1 不是离 A_2 最近的点，即线段 A_1A_2 也不是来自对点 A_2 的考虑. 故线段 A_1A_2 不能存在于构图中　(2) 否则，设线段 AB 和 CD 相交于点 P，且不妨令线段 AB 是因 B 为离 A 最近的点而连，线段 CD 是因 D 为离 C 最近的点而连，则 $AB<AD$，$CD<BC$，故 $AD+BC>AB+CD=AP+PD+CP+BP>AD+BC$，矛盾　9. 以给定的点为圆心、$\frac{d}{2}$ 为半径作圆，则这 n 个圆两两之间不相交. 设包含这 n 个圆的最小矩形是 $ABCD$. 由最小性，矩形的每一边均与某一个或几个圆相切. 易知矩形面积大于 n 个圆的面积之和，即 $AB\cdot CD>\frac{n\pi d^2}{4}$，所以 AB、CD 中一定至少有一边，不妨令 $AB>\sqrt{\frac{n\pi d^2}{4}}$. 设与边 BC、DA 相切的圆分别是圆 Q 和圆 P，切点分别是 R 和 S，则 $SP+PQ+QR\geqslant AB>d\sqrt{\frac{n\pi}{2}}$. 又 $SP+PQ+QR=d+PQ\leqslant d+D$，得 $D+d>d\sqrt{\frac{n\pi}{2}}$，即 $\frac{D}{d}>\sqrt{\frac{n\pi}{4}}-1$



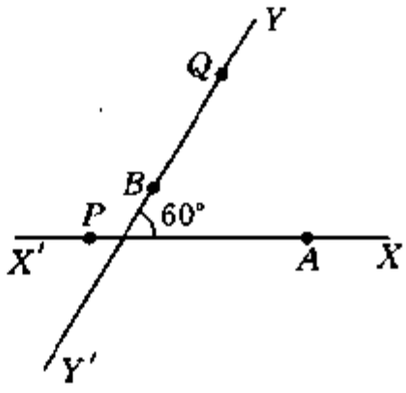
测试题　1. 在无三人分数相同的条件下，201 人总分最少情况是：2 人得 0 分，2 人得 1 分，…，2 人得 99 分，1 人得 100 分，则 $2\times(0+1+\cdots+99)+100=10\,000$. 得分最多的情况是：2 人得 100 分，2 人得 99 分，…，2 人得 1 分，1 人得 0 分，则有 $2\times(1+2+\cdots+100)+0=10\,100$. (1) 否则，$9\,999<10\,000$，矛盾　(2) $10\,100>10\,000$，超过最大值　(3) 总分 10 000 恰是无三人得分相同条件下 201 人总分的最小值，且是唯一取得　(4) 与(3)证明相同　2. 任取两点作直线，考虑其余各点到此直线的距离，再取一个有最小距离的点. 这三点符合要求　3. “极端”——A 国代表中认识 B 国代表最多的 1 位，记为 a_1，又记 a_1 所认识的 B 国代表的集合为 B_1，则 B_1 全在 B 之中. 所以有 1 位 B 国代表 b_2 不在 B_1 中. 再任找 1 位认识 b_2 的 A 国代表作为 a_2，则 a_2 不是 a_1，且 a_2 不会全认识 B_1 中的所有成员(否则，与 a_1 具有的最大性矛盾). 因此，可以从 B_1 中找出 1 位 b_1，使 a_2 不认识他. 于是 a_1，a_2，b_1，b_2 满足要求

第二十五讲　数学建模

练习题　1. 设乙工厂去年大约上交利税 x 万元，则由题意得 $\begin{cases} x(1+20\%)^2 > 40\times(1+10\%)^2, \\ x(1+20\%) \leqslant 40(1+10\%), \\ \dfrac{1.2x(1.2^3-1)}{1.2-1} \geqslant \dfrac{4.4\times(1.1^3-1)}{1.1-1}, \\ \dfrac{1.2x(1.2^2-1)}{1.2-1} < \dfrac{4.4\times(1.1^2-1)}{1.1-1}. \end{cases}$ 解得 $33\dfrac{11}{18} < x < 35$. 故 $x=34$　2. (1)涨价 x 成后，营业额为 $y=a\left(1+\dfrac{x}{10}\right)\cdot b\left(1-\dfrac{mx}{10}\right)=ab\left[1+\dfrac{(1-m)^2}{4m}-\left(\dfrac{\sqrt{m}}{10}x-\dfrac{1-m}{\sqrt[2]{m}}\right)^2\right]$. 当 $x=1.25$ 时，$y=ab\dfrac{(1+m)^2}{4m}$，则 $\dfrac{\sqrt{m}}{10}x-\dfrac{1-m}{\sqrt[2]{m}}=0$，解得 $m=\dfrac{4}{5}$　(2) 由于 $y=ab+ab\left(\dfrac{1-m}{10}x-\dfrac{mx^2}{100}\right)$，未涨价的营业额为 ab，则适当涨价，且使营业额增加，有 $\dfrac{1-m}{10}x-\dfrac{mx^2}{100}>0$，且 $x>0$，$m>0$，得 $1>m>0$　3. AB 间路程为 $3(a+b)$ 公里，则有 $\dfrac{3(a+b)}{b}-\dfrac{3(a+b)}{a}=c$，即 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-\dfrac{c}{3}\left(\dfrac{a}{b}\right)-1=0$，得 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c+\sqrt{c^2+36}}{6}$(负根已舍去)，于是 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c+\sqrt{c^2+36}}{6}$ $(c\geqslant 0)$，从而知甲在途中的时间为 $3+\dfrac{3b}{a}=3+\dfrac{\sqrt{c^2+36}-c}{2}$ $(c\geqslant 0)$. 由于 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{c^2+36}}{3}$，则有 $\dfrac{\sqrt{c^2+36}}{3}\geqslant 2$，即 $c=0$　4. 由题意得 $d=kv^2l$，则 $1.44l=k\cdot 60^2\cdot l$，即 $k=\dfrac{1}{2\,500}$. 所以 $d=\begin{cases} \dfrac{1}{2}l, & (v\leqslant 25\sqrt{2}) \\ \dfrac{1}{2\,500}v^2l. & (v>25\sqrt{2}) \end{cases}$ 车流量 $Q=\dfrac{v}{d+l}=\begin{cases} \dfrac{2v}{3l}, & v\leqslant 25\sqrt{2} \\ \dfrac{v}{l}\left(1+\dfrac{1}{2\,500}v^2\right)^{-1}, & v>25\sqrt{2} \end{cases}$ 当 $v\leqslant 25\sqrt{2}$ 时，$Q<\dfrac{50\sqrt{2}}{3l}$；当 $v>25\sqrt{2}$ 时，$\dfrac{1}{Q}=\dfrac{l(v^2+2\,500)}{2\,500v}=l\left(\dfrac{v}{2\,500}+\dfrac{1}{v}\right)\geqslant\dfrac{l}{50}$，当且仅当 $v=50$ 时等号成立. 又 $Q>0$，$l>0$，则 $Q\leqslant\dfrac{50}{l}$，$v=50$ 时取等号. 故车速为 50 km/h 时，车流量最大　5. 如右图，B 到铁路 AX 的距离 $BD=27$ 千米，则 $AD=36$



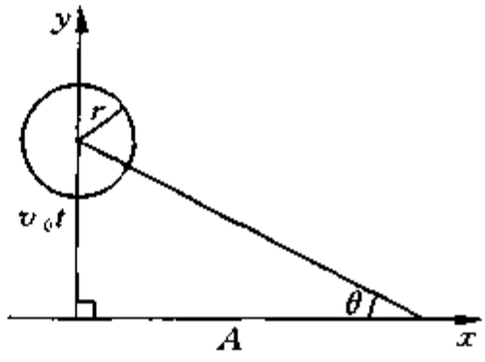
第 5 题



第 6 题

千米. 令 $AC = x$ 千米，那么 $BC = \sqrt{(36-x)^2 + 27^2}$ 千米. 设铁路吨千米运费为 a，则公路吨千米运费为 $2a$，于是有 $y = ax + 2a\sqrt{(36-x)^2 + 27^2}$，从而仿照例6，就有 $y \geqslant 36a + 27\sqrt{3}\,a$. 当 $y = 36a + 27\sqrt{3}\,a$ 时，$x = 36 - 9\sqrt{3} \approx 20.41$ 千米，即距 A 处 20.41 千米的 C 处筑一条公路到 B 地，总运费最低 **6**. (1)设甲、乙两人起初位置是 A、B，则 $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos 60° = 7$. 故起初甲、乙两人的距离为 $AB = \sqrt{7}$ 千米 (2)分情况讨论得到 $PQ^2 = 48t^2 - 24t + 7$，这里 $AP = 4t$，$BQ = 4t$，即 $PQ = \sqrt{48t^2 - 24t + 7}$ (3)因 $PQ^2 = 48 \times \left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + 4$，得 $t = \frac{1}{4}$，所以在第 15 分钟末，PQ 最短 **7**. 仿照例 3，可得承运编号为 2，3，6 号的货物，获利最大为 130 千元 **8**. 令 $y = ax^2 + bx + c$，题中数据可以变换为 $x = 0$，$y = 8.6$；$x = 5$，$y = 10.4$；$x = 10$，$y = 12.9$. 于是求得 $y = 0.014x^2 + 0.29x + 8.6$. 取 $x = 15$，得 $y = 16.1$. 与专家预测值相同 **9**. 以直线 BC、AE 分别为 x 轴和 y 轴建立直角坐标系. BC、AE 为正方向，易求直线 AB 方程为 $\frac{x}{30} + \frac{y}{20} = 1$. 最大长方形的一个顶点应是 D. 考虑与之不相邻的顶点 F 在 AB 上的情况，有 $F\left(x, 20 - \frac{2}{3}x\right)$，$0 \leqslant x \leqslant 30$. 所以 $S = (100 - x)\left(80 - \left(20 - \frac{2}{3}x\right)\right) = -\frac{2}{3}(x-5)^2 + 6016\frac{2}{3}$. 故当 $x = 5$，$y = 17$ 时，取得最大面积为 6 017 m^2. 其次考虑 F 在 AE 和 BC 上的情况，此时最大矩形面积分别为 6 000 m^2 和 5 000 m^2. 故选定 $F(5, 17)$ 点，最大面积是 6 017 m^2 **10**. 设导弹飞行时间为 t，飞行分加速段与匀速段. 加速段时间为 $\frac{v}{a} = \frac{20k}{4k} = 5$，加速段飞行的距离为 $\frac{v^2}{2a} = 50k$. 匀速段飞行的时间为 $t - 5$，于是 $s = 20tk - 50k$，$t \geqslant 5$. 则由 $(kt)^2 + A^2 = (20tk - 50k)^2$ 得 $399t^2 - 2\,000t - 997\,500 = 0$，有 $t \approx 52.569$，因此，$\tan\theta = \frac{52.569k}{1\,000k} = 5.25 \times 10^{-2}$

(2) 如右图，$(kt)^2+(1000k)^2=(20tk)^2$，得 $t\approx 50.062$. $\tan\theta=\dfrac{50.062k}{1000k}=0.050062\approx 0.05$　$\theta=\arctan 0.05$



11. 超市发出10 000张奖券相当于收得售货款400万元，超市的全部奖品发出合计价值为72 000元，扣除奖品款，实际收款为392.8万元，占全部销货款的98.2%. 如果超市按九八折优惠顾客的办法销售这些货物将会得到 $400\times 98\%=392$ 万元的收入. 因此有奖销售对顾客让利的额度实际上比九八折还少8 000元

12. 由田径场内道的两头半圆弧弯道跑程均为100米，则 $\pi(QQ'+0.4)=2000$，$QQ'=63.29$ 米. 第 n 条跑道的起点位置到 D_n 的长度就是这点与 D_n 之间距本道内线20厘米的弧线长度，将这个长度记为 K_n，$\pi=3.14$，于是 $K_n=(QQ'+1.22(n-1)\times 2+0.4)\times 3.14-200=1.22(n-1)\times 2\times 3.14$，$K_3=15.32$ 米

测试题　**1.** 设水库已有超安全线水位的水量 $x\text{m}^3$，上游河水以每小时 $y\text{m}^3$ 的水量注入水库，每个泄洪闸每小时泄洪 z m^3. 按题意有 $\begin{cases}x+30y=30z,\\ x+10y=2\times 10z,\end{cases}$ 解得 $x=15z$，$y=0.5z$. 设打开 n 个闸门，保证3小时使水位降至安全线以下，则有 $x+3y<3zn$，于是 $n\geqslant 5.5$. 由 n 是正整数，故最少要打开6个闸门　**2.** 在直角坐标系中，由表1描出数对 (x,y) 对应的点，可知这些点近似地构成一条直线，易知其中有4个点恰在一直线上，这样，得到芦蒿的需求量关于价格的近似函数关系式为 $y=50-5x$　(2) 同理可知芦蒿市场价格关于供应量的近似函数式 $y=\dfrac{1}{6}x-\dfrac{17}{6}$，因而芦蒿的供应量关于价格的近似函数关系式为 $y=6x+17$. 所以由 $\begin{cases}y=50-5x,\\ y=6x+17\end{cases}$ 得 $x=3$，$y=35$. 故市场对芦蒿的供求平衡量为35吨　**3.** 销往北京的利润函数为 $f_1=2x+6y$，销往上海的利润函数为 $f_2=3x+4y$，销往广州的利润函数为 $f_3=4x+2y$，这里 x、y 万元分别表示销售甲、乙两种钢管的利润. 画出它们的图象，易知甲、乙两种钢管分别生产 $\dfrac{5}{4}$ 吨、$\dfrac{3}{2}$ 吨且全部销往北京，可使一周的总利润最大，最大利润为11.5万元

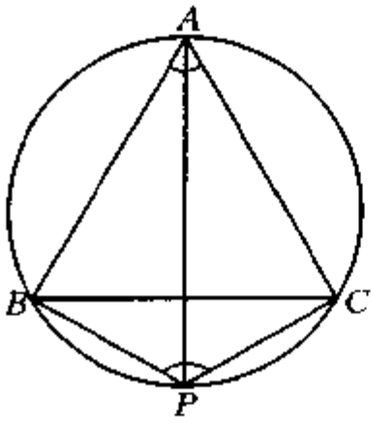
综合测试题一

1. 易知 $x=2$，则有 $y=1$，$z=4$，选(C)　**2.** 由题意知设一三角形斜边

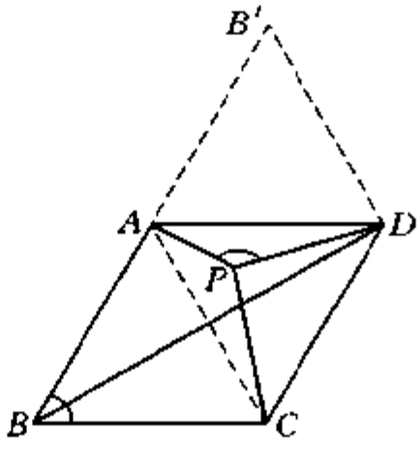
为 c，则另一三角形斜边为 $2c$，第三个三角形斜边为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}c$. 故之比为 $2:\frac{2\sqrt{3}}{3}:1$，即 $6:2\sqrt{3}:3$. 选(C)　**3.** 除去一个内角为 α，则 $0^\circ<\alpha<180^\circ$，于是有 $1\,999^\circ<(n-2)\cdot 180^\circ<1\,999^\circ+180^\circ$，得 $13\frac{19}{180}<n<14\frac{19}{180}$. 故 $n=14$，选(C)　**4.** 由题意知 $(a-b)^2+(3b)^2=(a+b)^2$，得 $9b=4a$，即 $a=9t$，$b=4t$，$t\geqslant 1$. 于是有三边为 $5t$，$12t$，$13t$，从而推知任一边长不可能为 14. 故选(C)　**5.** 因为 $(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{y-1}-1)^2+(\sqrt{z-2}-1)^2=0$，所以 $x=1$，$y=2$，$z=3$. 故选(B)　**6.** 考虑"极端"——AC 为圆 $ABCD$ 的直径，则 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}=\frac{\sqrt{3}}{8}$. 又 $S_{ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}$，则 $S_{ABCD}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. 故选(D)　**7.** 令 $\overline{x_1x_2x_3}=(x_1+x_2+x_3)^3$，且 $N=x_1+x_2+x_3$，则 N^3 是一个 3 位数，于是有 $10^{3-1}\leqslant N^3<10^3$，即 $\sqrt[3]{10^2}\leqslant N<10$，得 $5\leqslant N<10$. 检验知只有 $N=8$ 满足条件，即 $8^3=512=(5+1+2)^3$　**8.** $a>0$ 时，$x=2a$；$a<0$ 时，$x=-2a$　**9.** 因为 $4a^2-12a-27=(2a+3)(2a-9)$，所以就有 $2a-9=\pm 1$，或 $2a-3=\pm 1$. 经检验知 $a=1$，$a=2$，$a=4$，$a=5$ 都符合要求. 故有 $1+2+4+5=12$　**10.** 考虑 $\triangle ABC$ 为正三角形，P 为重心，则 $\frac{AP}{AR}=\frac{2}{3}$. 由 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$ 可知 $\frac{DE}{BC}=\frac{2}{3}$. 同理 $\frac{GF}{AC}=\frac{2}{3}$，$\frac{KH}{BC}=\frac{2}{3}$，则 $\frac{DE}{BC}+\frac{FG}{CA}+\frac{KH}{AB}=2$　**11.** 不等式转化为 $\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}(b-6)^2+(c-4)^2\leqslant 0$，则 $a-\frac{1}{2}b=b-6=c-4=0$，得 $a=3$，$b=6$，$c=4$　**12.** 设泉水每分钟流进池塘里的水为 x 米^3，每台抽水机每分钟抽水 y 米^3. 池塘里原有水 z 米^3，三台抽水机抽完池塘里的水需要 t 分钟. 于是有 $\begin{cases}60y-60x=z,\\20y+20y-20x=z,\\3ty-tx=z.\end{cases}$ 解得 $t=12$　**13.** (1) 设现有水面面积为 k，今年所填面积最多只能占现有水面面积的 $t\%$，则 $\frac{k\cdot\frac{t}{100}}{1-\frac{99}{100}}\leqslant\frac{1}{4}k$. 有 $t\leqslant 0.25$　(2) $cx-bx\geqslant cx^2$，有 $x\leqslant\frac{c-b}{a}$.

14. 由简单的个数入手，得到结果及说明结果的一般方法. 易知 2 个数、3 个数的情形下，其最大值分别为 2×2、2×3. 故猜知 $x_1+x_2+\cdots+x_{17}$ 的最大值为 $2\times 17=34$. 显然可以取得 34，因为 $x_1=x_2=\cdots=x_{15}=1$，$x_{16}=2$，$x_{17}=17$，则满足方程. 以 x_1、x_2、x_3 三个数的情形来说明，从中得到说明的方法.

由 $x_1+x_2+x_3=x_1x_2x_3$，$x_1\geqslant 1$，$x_2\geqslant 1$，$x_3\geqslant 1$，不妨令 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3$，则令 $x_1=1+x_1'$，$x_2=1+x_2'$，$x_3=1+x_3'$，于是有 $3+x_1'+x_2'+x_3'=(1+x_1')(1+x_2')(1+x_3')$，且 $0\leqslant x_1'<x_2'\leqslant x_3'$（为什么？），即 $1\leqslant x_2'\leqslant x_3'$. 因而 $3+x_1'+x_2'+x_3'=1+x_1'+x_2'+x_3'+x_3'x_2'+x_3'x_1'+x_2'x_1'+x_1'x_2'x_3'\geqslant 1+x_1'+x_2'+x_3'+x_3'x_2'+x_3'x_1'$，即 $3\geqslant 1+x_3'x_2'+x_3'x_1'\geqslant 1+x_3'x_2'+x_1'\geqslant x_3'+x_2'+(1+x_3'x_2'-x_3'-x_2')+x_1'\geqslant x_1'+x_2'+x_3'+(x_3'-1)(x_2'-1)\geqslant x_1'+x_2'+x_3'$（这里 $x_3'\geqslant 1$，$x_2'\geqslant 1$）. 从而有 $x_1+x_2+x_3\leqslant 3+3=2\times 3$. 类似地，对于 a_1，a_2，…，a_{17}，同样证明　**15.** 在图(1)中，对于正三角形 ABC，我们有 $PA=PB+PC$.（证明可以不用四点共圆），此结论证明略. 在图(2)中，以 AD 为边向形外作正三角形 ADB'，于是不难知道四边形 $ABCD$ 全等于四边形 $DB'AC$，从而 $B'C=BD$，而 $PB'+PC\geqslant B'C$，所以利用图(1)中结论有 $PA+PD+PC\geqslant B'C=BD$



(1)

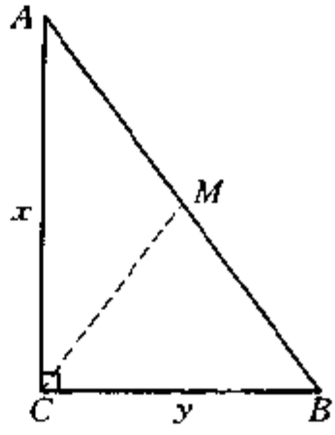


(2)

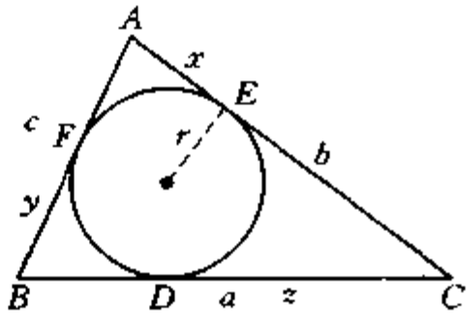
综合测试题二

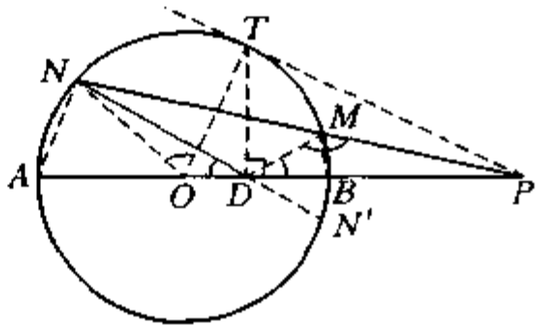
1. 显然为(D)　**2.** AD 为 $\angle A$ 的内角平分线交 BC 于 D，过 B 作 $BE\parallel DA$ 交 CA 的延长线于点 E，则 $\angle EBA=\angle BAD=45°$，$AE=AB=1$，$EB=\sqrt{2}$. 又 $\triangle CDA\backsim\triangle CBE$，得 $\frac{AD}{EB}=\frac{AC}{CE}=\frac{2}{3}$，故 $AD=\frac{2}{3}EB=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 选(D)　**3.** $x_1\cdot x_2=M+\alpha\beta$，$x_1+x_2=\alpha+\beta$，于是有 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(\alpha+\beta)^2-2(M+\alpha\beta)$. 而 $\alpha+\beta=a+b$，$\alpha\beta=ab-M$. 故 $x_1^2+x_2^2=a^2+b^2$. 选(D)　**4.** 选(B)　**5.** “极端”——等圆 O_1，圆 O_2，于是易求得 $O_1O_2=2-\sqrt{2}$. 故选(D)　**6.** 因为 $y=3x+\frac{12}{x}$，则 $x=1$，2，3，4，6，12，相应地有 $y=15$，12，13，15，20，37. 故有 6 组解. 选(D)　**7.** 由 $\sqrt{x+5}=\frac{3}{\sqrt{x+5}}$

得 $x=-2$　**8.** 由 $\begin{cases}x-199+y\geqslant 0\\199-x-y\geqslant 0\end{cases}$ 得 $x+y=199$. 则有 $\begin{cases}3x+5y-2-a=0,\\2x+3y-a=0.\end{cases}$ 于是有 $x+2y=2$，从而解得 $x=396$，$y=-197$. 故 $a=201$　**9.** 由于方程只有整数根，所以 a 为整数，且有 $a=x+4+\frac{16}{x-4}$. 于是 $x-4=\pm 1$，± 2，± 4，± 8，± 16，从而 $x+4=8\pm 1$，8 ± 2，8 ± 4，8 ± 8，8 ± 16. 这样，正实数 a 可取值 16，18，25　**10.** 令 $x^2-xy+y^2=k$，而 $x^2+xy+y^2=3$，就有 $xy=\frac{3-k}{2}$. 又 $k\leqslant 9$，且 $x+y=\pm\sqrt{\frac{9-k}{2}}$. 于是有 $\left(\mp\sqrt{\frac{9-k}{2}}\right)^2-4\cdot\frac{3-k}{2}\geqslant 0$，得 $k\geqslant 1$. 故 $1\leqslant x^2-xy+y^2\leqslant 9$　**11.** 易知 $(\sqrt{x_1-1}-1)^2+(\sqrt{x_2-1}-1)^2+\cdots+(\sqrt{x_{1999}-1}-1)^2=0$，得 $x_1=x_2=\cdots=x_{1999}=2$，于是 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots+1999x_{1999}=2(1+2+\cdots+1999)=2000\times 1999=3998000$　**12.** 由题意知 $\begin{cases}x^2+y^2=4a^2\\x+y=2p-2a\\x+y>2a\\x>0,\ y>0.\end{cases}$ 则有 $p>2a$，$xy=2p(p-2a)$，$x+y=2p-2a$，因而就有 $\Delta=(2p-2a)^2-4\cdot 2p(p-2a)\geqslant 0$，得 $a\geqslant(\sqrt{2}-1)p$. 于是 $(\sqrt{2}-1)p\leqslant a<\frac{p}{2}$



13. 如图，我们有 $\triangle ABC$ 的周长为 $2(x+y+z)$，面积有 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{(x+y+z)xyz}$（利用海伦公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$）于是有 $2(x+y+z)=\sqrt{(x+y+z)xyz}$，得 $4(x+y+z)=xyz$. 由 $y+z=a$，$x+z=b$，$y+x=c$ 及 a、b、c 为整数可知，$2x=b+c-a$，$2y=c+a-b$，$2z=a+b-c$，均为整数. 又 $2x+2y=2a$，得 $2x$ 与 $2y$ 同为奇数、同为偶数. 同理 $2y$ 与 $2z$ 同为奇数、同为偶数. 故 $2x$，$2y$，$2z$ 同为奇数或同为偶数. 而 $2(2x+2y+2z)=xyz$，从而有 $2x$、$2y$、$2z$ 均为偶数. 这样可知 x、y、z 均为正整数. 不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$，则由 $4(x+y+z)=xyz$ 得 $xyz\leqslant 4\times 3x$，即 $xy\leqslant 12$. 又 $4x<xyz$，得 $xy>4$. 于是 $5\leqslant xy\leqslant 12$. $xy=5$，$z=24$，即 $x=1$，$y=5$，$z=24$；$xy=$



6，有 $x=1$，$y=6$，$z=14$；$x=2$，$y=3$，$z=10$；$xy=7$ 时无解；$xy=8$ 时，$x=2$，$y=4$，$z=6$；$x=1$，$y=8$，$z=9$. $xy=9$，10，11，12 均无解. 故所求整边三角形的三边长分别为：1，5，24；1，6，14；2，3，10；2，4，6；1，8，9

14. 如图，考虑“极端状态”，即 M、N、T 重合，T 为过点 P 作关于 $\odot O$ 的切线 PT 与圆 O 的交点. 因而确定 D 点为过点 T 作 $TD\perp AB$ 交 AB 于 D. D 点即符合要求. 要说明 $\angle ADM=\angle BDN$，即说明 $\angle BDM=\angle ADN$. 因为 $OT\perp PT$，$TD\perp OP$，所以有 $\triangle TDP\backsim\triangle OTP$，得 $PT^2=PD\cdot PO$. 又 $PM\cdot PN=PT^2$，则 $PM\cdot PN=PD\cdot PO$，即 $\dfrac{PM}{PD}=\dfrac{PO}{PN}$. 于是 $\triangle PMD\backsim\triangle PON$，得 $\angle DMP=\angle NOP$，及 $\dfrac{NO}{DM}=\dfrac{PO}{PM}=\dfrac{PN}{PD}$. 因为 $\dfrac{ON}{PO}=\dfrac{DM}{PM}$，即有 $\dfrac{OT}{PO}=\dfrac{DM}{PM}$，又 $\dfrac{OT}{PO}=\dfrac{OD}{OT}$，得 $\dfrac{OD}{OT}=\dfrac{DM}{PM}$，即 $\dfrac{OD}{ON}=\dfrac{DM}{PM}$，这里 $ON=OT$. 所以 $\triangle PDM\backsim\triangle NDO$，得 $\angle ODN=\angle BDM$. 故结论成立，即 D 点为所求的点