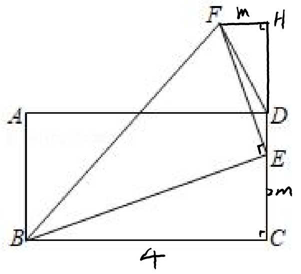
2022春季数学压轴每日一练（九）

2021 振华一模

10．如图，在矩形 $ABCD$ 中，$BC=4$，$AB=2$，Rt△BEF 的顶点 E 在边 CD 上，且∠$BEF=90°$，$EF=\frac{1}{2}BE$，$DF=\frac{3}{4}\sqrt{5}$，则 tan∠DEF 的值为（ A ）



见直角作一线三垂直.

$\triangle FEH \backsim \triangle EBC$

$\frac{HE}{BC}=\frac{EF}{BE}=\frac{FH}{EC}=\frac{1}{2}$

$HE=2$，$AB=DC=2 \to HD=EC$

设 $FH=m$，则 $EC=2m$.

$HD=2m$. $DF=\frac{3}{4}\sqrt{5}$

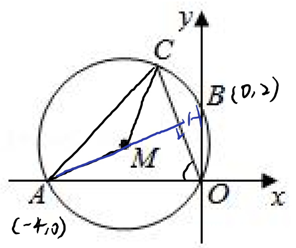
$\therefore m=\frac{3}{4}$

即 $FH=\frac{3}{4}$，$HD=EC=\frac{3}{2}$

$\therefore \tan\angle DEF=\frac{\frac{3}{4}}{2}=\frac{3}{8}$

A．$\frac{3}{8}$　　B．$\frac{9}{16}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{5}$

18．如图，在平面直角坐标系中，⊙M 经过原点，且与 x 轴交于点 A（－4，0），与 y 轴交于点 B（0，2），点 C 在第二象限⊙M 上，且∠$AOC=60°$，则 $OC=$ $\underline{2+\sqrt{3}}$.



$M(-2,\ 1)$

$r=AM=\sqrt{5}$

$\therefore AC=\sqrt{15}$

$\triangle ACO$ 中

$AC=\sqrt{15}$，$AO=4$.

$\angle AOC=60°$

过A作AH⊥OC.

则 $OH=2$. $AH=2\sqrt{3}$

$\therefore CH=\sqrt{3}$

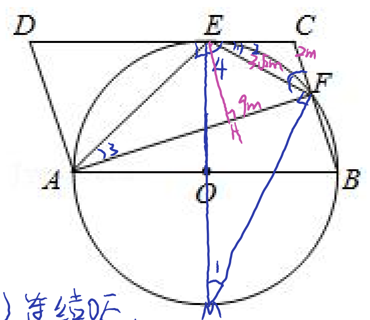
$\therefore OC=2+\sqrt{3}$

27．如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，以 AB 为直径的⊙O 与 CD 边相切于点 E，BC 交⊙O 于点 F（$AF>BF$），连接 AE，EF．

（1）求证：∠$AFE=45°$；

（2）求证：$EF^2=AF \cdot CF$；相似 $\triangle AEF \backsim \triangle ECF$　　弦切角

（3）若⊙O 的半径是$\frac{3\sqrt{10}}{2}$，且$\frac{CF}{AF}=\frac{2}{9}$，求 AD 的长．



(1) 连结OE.

∵ CD是圆O的切线，∴ OE⊥CD

∵ ▱ABCD，∴ AB∥CD.

∴ OE⊥AB

∴ ∠AOE = 90°

∴ ∠AFE = 45°

(2) 延长EO交圆于M，连结FM

∵ AB是直径

∴ ∠AFB = 90° = ∠AFC

∵ ∠AFE = 45°

∴ ∠CFE = 45°

∴ ∠CFE = ∠AFE

∵ OE⊥CD

∴ ∠2+∠4 = 90°

∵ EM是直径

∴ ∠EFM = 90°

∴ ∠1+∠4 = 90°

∴ ∠2 = ∠1

又 ∵ ∠1 = ∠3

∴ ∠2 = ∠3

∴ △AEF ∽ △ECF

∴ $\frac{EF}{CF}=\frac{AF}{EF}$

∴ $EF^2=AF \cdot CF$

(3) ∵ $\frac{CF}{AF}=\frac{2}{9}$

∴ 设 $CF=2m$，$AF=9m$.

∴ $EF^2=18m^2$

∴ $EF=3\sqrt{2}m$

解三角形

在△AEF中，$EF=3\sqrt{2}m$，$AF=9m$，∠AFE = 45°.

过点E作EH⊥AF于点H.

则 $EH=FH=\frac{\sqrt{2}}{2}EF=3m$.

$AH=AF-HF=6m$

则 $AE=3\sqrt{5}m$

又 $AO=OE=r=\frac{3}{2}\sqrt{10}$

∠AOE = 90°

∴ $AE=3\sqrt{5}$

∴ m = 1

∴ FB = 3.

∴ BC = 5

∴ AD = BC = 5

28．如图 1，四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=1$，点 E 是线段 BC 上一动点（不与 B，C 重合），点 F 是线段 BA 延长线上一动点，连接 DE，EF，DF，EF 交 AD 于点 G．设 $BE=x$，$AF=y$，已知 y 与 x 之间的函数关系如图 2 所示．

（1）y 与 x 的函数表达式为 $y=-2x+4\ (0<x<2)$；边 BC 的长为 2；

（2）求证：$DE\perp DF$；

（3）是否存在 x 的值，使得△DEG 是等腰三角形？如果存在，求出 x 的值；如果不存在，说明理由．

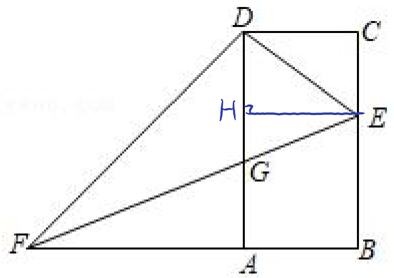


图 1

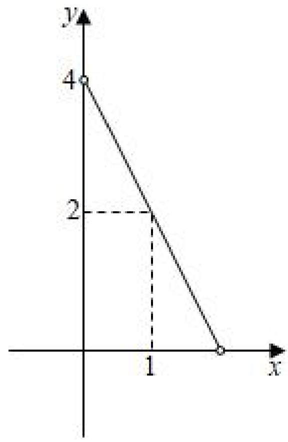


图 2

(2) 证明：∵ $BE=x$，$BC=2$.

∴ $CE=2-x$

∴ $\frac{CE}{AF}=\frac{CD}{AD}$

∵ $\angle C=\angle DAF=90°$

∴ $\triangle CDE\sim\triangle ADF$

∴ $\angle ADF=\angle CDE$

又∵ $\angle ADF+\angle EDG=\angle CDE+\angle EDG=90°$

∴ $\angle EDF=90°$

∴ $DE\perp DF$

(3) 假设存在 x 的值，使得△DEG 是等腰三角形.

① $DE=DG$，则 $\angle DGE=\angle DEG$

∵ $AD\parallel BC$

∴ $\angle DGE=\angle BEF=\angle DEG$

在△DEF 和△BEF 中

$\begin{cases}\angle DEF=\angle BEF\\ \angle EDF=\angle B\\ EF=EF\end{cases}$

∴ $\triangle DEF\cong\triangle BEF$ (AAS)

∴ $DE=BE=x$

而 $CE=2-x$，$CD=1$

在 Rt△DCE 中

$1^2+(2-x)^2=x^2$

解得 $x=\frac{5}{4}$

② $DG=GE$，则 $\angle GDE=\angle GED$

∵ $\angle GDE+\angle GDF=90°$，$\angle DEG+\angle DFE=90°$

∴ $\angle GDF=\angle DFE$

∴ $DG=FG=GE$

∴ G 为 EF 的中点.

又∵ $AG\parallel BE$

∴ A 也为 BF 的中点.

∴ $AF=BA=1$

∴ $y=-2x+4=1$

解得 $x=\frac{3}{2}$

③ $DE=GE$，则 $\angle EDG=\angle EGD$.

过点 E 作 $EH\perp DG$ 于点 H，则

$DH=GH=CE=2-x$，$EH=CD=AB=1$.

$AG=2-DG=2-2(2-x)=2x-2$.

$AF=-2x+4$.

∵ $\angle EHG=\angle GAB=\angle GAF=90°$

$\angle HGE=\angle AGF$

∴ $\triangle HGE\sim\triangle AGF$

∴ $\frac{HG}{AG}=\frac{HE}{AF}$

即 $\frac{2-x}{2x-2}=\frac{1}{-2x+4}$

解得 $x_1=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{5+\sqrt{5}}{2}>2$（舍）

∴ 此时 $x=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$

综上：$x=\frac{5}{4}$ 或 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ 时，△DEG 为等腰三角形.