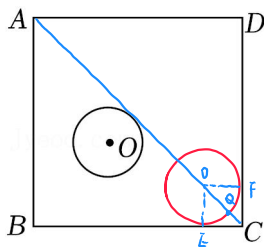


## 2022 春季数学压轴每日一练（十五）

2021 盐城滨海九上期末

18. 如图，正方形  $ABCD$  的边长为 6， $\odot O$  的半径为 1. 若  $\odot O$  在正方形  $ABCD$  内平移（ $\odot O$  可以与该正方形的边相切），则点  $A$  到  $\odot O$  上的点的距离的最大值为  $5\sqrt{2}+1$ .



过圆心  
切 BC、DC  
AQ 的长即为所求  
 $QC = \sqrt{2} - 1$   
 $\therefore AQ = 6\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)$   
 $= 5\sqrt{2} + 1$

27. 如图，二次函数  $y = -x^2 + bx + c$  的图象与  $x$  轴交于点  $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$  两点，与  $y$  轴交于点  $C$ ，点  $D$  为  $OC$  的中点.

建议交点式  $y = -(x+1)(x-3)$

- (1) 求二次函数的表达式;  $y = -x^2 + 2x + 3$  (答案必须是二次式)

- (2) 若点  $E$  为直线  $BC$  上方抛物线上一点，过点  $E$  作  $EH \perp x$  轴，垂足为  $H$ ， $EH$  与  $BC$ 、 $BD$  分别交于点  $F$ 、 $G$  两点，设点  $E$  的横坐标为  $m$ .

- ① 用含  $m$  的代数式表示线段  $EF$  的长度;  $EF = -m^2 + 3m$

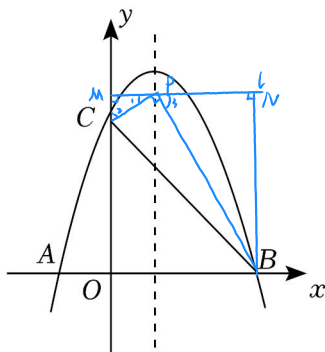
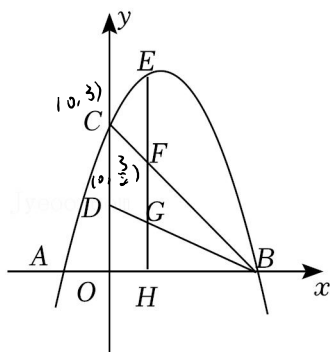
- ② 若  $EF = FG$ ，求此时点  $E$  的坐标;  $B(3, 0)$   $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$   $-m^2 + 3m = -\frac{1}{2}m + \frac{3}{2}$   $m_1 = 3$  (舍),  $m_2 = \frac{1}{2}$   $\therefore E(\frac{1}{2}, \frac{15}{4})$

- (3) 在抛物线的对称轴上是否存在一点  $P$ ，使  $\angle CPB = 90^\circ$ ，若存在，请求出点  $P$  的坐标; 若不存在，请说明理由.

见  $90^\circ$ ，想“K”型相似

(3)  $\because A(-1, 0), B(3, 0)$   
 $\therefore$  对称轴为直线  $x = 1$

不推荐用勾股

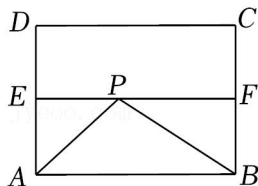


备用图

设  $P(1, a)$   
过点  $P$  作  $L \parallel x$  轴，过点  $C$  作  $CM \perp L$ 。  
过点  $B$  作  $BN \perp L$ 。  
 $\therefore \angle PMC = \angle BNP = 90^\circ$   
 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$   
 $\because \angle BPC = 90^\circ$   
 $\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$   
 $\therefore \angle 2 = \angle 3$   
 $\therefore \triangle CPM \sim \triangle PNB$   
 $\therefore \frac{CM}{PN} = \frac{PM}{BN}$   
 $\therefore \frac{a-3}{1} = \frac{1-a}{2}$   
解得  $a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$   
 $\therefore P_1(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}), P_2(1, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$

2021 镇江九上期末

18. 如图, 在矩形  $ABCD$  中,  $AB=8$ ,  $BC=6$ , 点  $E$ 、 $F$  分别是  $AD$ 、 $BC$  的中点, 点  $P$  在线段  $EF$  上,  $\triangle PAB$  内切圆半径的最大值是 (D)



A. 1

B.  $\frac{6}{5}$

C.  $\frac{5}{4}$

D.  $\frac{4}{3}$

② 面积确定

$r$  最大, 即  $PA+PB+AB$  最小.

转化得  $PA+PB$  最小  $\min=10$

① 等积构造

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12.$$

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times (PA+PB+AB) \cdot r = \frac{1}{2} \times (PA+PB+8) \cdot r = 12.$$

$$\frac{1}{2} \times 18 \cdot r = 12$$

$$r = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

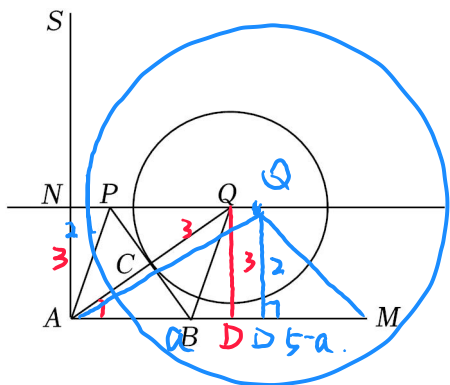
26. 已知线段  $AM=5$ , 射线  $AS$  垂直于  $AM$ , 点  $N$  在射线  $AS$  上, 设  $AN=n$ , 点  $P$  在经过点  $N$  且平行于  $AM$  的直线上运动,  $\angle PAM$  的平分线交直线  $NP$  于点  $Q$ , 过点  $Q$  作  $QB \parallel AP$ , 交线段  $AM$  于点  $B$ , 连接  $PB$  交  $AQ$  于点  $C$ , 以  $Q$  为圆心,  $QC$  为半径作圆.

四边形  $PABQ$  为菱形

(1) 求证:  $PB$  与  $\odot Q$  相切;

(2) 已知  $\odot Q$  的半径为 3, 当  $AM$  所在直线与  $\odot Q$  相切时, 求  $n$  的值及  $PA$  的长;

(3) 当  $n=2$  时, 若  $\odot Q$  与线段  $AM$  只有一个公共点, 则  $\odot Q$  的半径的取值范围是  $r=2$  或  $\sqrt{5} < r \leq \frac{\sqrt{205}}{3}$  直接写出答案)



(1) 证明 四边形  $PABQ$  为菱形

$\downarrow$   
 $CA \perp PB$

$\downarrow$   
相切

(2) 过点  $Q$  作  $QD \perp AM$ .

$\because \odot Q$  与  $AM$  相切

$\therefore QD = QA = CQ = 3$

又  $\because$  菱形  $PABQ$  中

$\therefore AQ = 2CQ = 6$

$\therefore AD = 3\sqrt{3}$ .

设  $PA = AB = BQ = x$ .

则  $BD = 3\sqrt{3} - x$

在  $Rt\triangle QDB$  中

$$3^2 + (3\sqrt{3} - x)^2 = x^2$$

解得  $x = 2\sqrt{3}$

$\therefore AP = 2\sqrt{3}$

(3) 只有一个公共点

$\odot$  相切

$r=2$ .

② 当  $M$  在  $\odot Q$  内时.

$\frac{1}{2}AQ > QM$

当  $\frac{1}{2}AQ = QM$  时

即  $AQ = 2QM$

令  $AD=a$ , 则  $DM=5-a$ .

$$4+a^2 = 4[4+(5-a)^2]$$

$$4+a^2 = 16+4(5-a)^2$$

$$4+a^2 = 16+4a^2-40a+100$$

$$3a^2-40a+112=0$$

$$(3a-28)(a-4)=0$$

$$a_1=4, a_2=\frac{28}{3}$$

$\therefore$  当  $\frac{1}{2}AQ > QM$  时

$$4 < a \leq \frac{28}{3}$$

当  $a=4$  时  $r = \frac{1}{2}AQ = \sqrt{5}$

当  $a=\frac{28}{3}$  时  $r = \frac{1}{2}AQ = \frac{\sqrt{205}}{3}$

$\therefore \sqrt{5} < r \leq \frac{\sqrt{205}}{3}$

综上  $r=2$  或  $\sqrt{5} < r \leq \frac{\sqrt{205}}{3}$