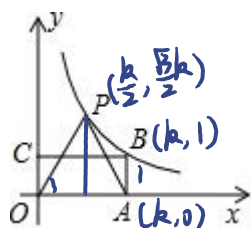


2022 春季初二下数学压轴每日一练（二十一）

1. 如图，矩形 $OABC$ 的顶点 A 、 C 分别在 x 轴、 y 轴上，顶点 B 在第一象限， $AB = 1$ 。将线段 OA 绕点 O 按逆时针方向旋转 60° 得到线段 OP ，连接 AP ，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 过 P 、 B 两点，则 k 的值为 (D)



P、B 在反比例函数上：

$$\begin{aligned} \frac{5}{4}k^2 &= k \\ \therefore k &\neq 0 \\ \therefore k &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

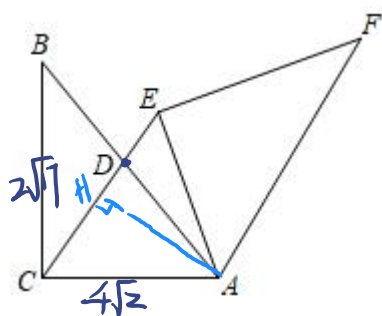
A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{4}{3}$

☒ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

2. 如图 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 是斜边 AB 的中点，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按顺时针方向旋转，点 C 落在 CD 的延长线上的 E 处，点 B 落在 F 处，若 $AC = 4\sqrt{2}$ ， $BC = 2\sqrt{17}$ ，则 CE 的长为 $\frac{32}{5}$ 。



$AB = 10, CD = BD = AD = 5$

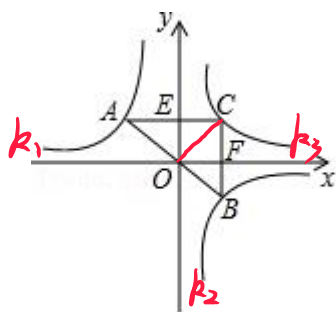
① AH 等积 $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times CD \times AH$

$AH = \frac{\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{17}}{5} = \frac{4\sqrt{34}}{5}$

② CH 勾股定理：
 $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \frac{16}{5}$

③ CE 斜腰 + 直角 \rightarrow 三线合一 + 中线
 $CE = 2CH = \frac{32}{5}$

3. 如图，点 A 、 B 、 C 三点分别在反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ ($x < 0$)、 $y = \frac{k_2}{x}$ ($x > 0$)、 $y = \frac{k_3}{x}$ ($x > 0$) 的图象上， $AC \perp y$ 轴于点 E ， $BC \perp x$ 轴于点 F ， AB 经过原点，若 $S_{\triangle ABC} = 5$ ，则 $k_1 + k_2 - 2k_3$ 的值为 -10 。



$S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}(k_3 - k_1)$

$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}(k_3 - k_2)$

$S_{\triangle ABC} = k_3 - \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 5$

$k_1 + k_2 - 2k_3 = -10$

4. 阅读理解：已知：对于实数 $a \geq 0, b \geq 0$ ，满足 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，此时取得代数式 $a+b$ 的最小值。

根据以上结论，解决以下问题：

(1) 拓展：若 $a > 0$ ，当且仅当 $a = \underline{1}$ 时， $a + \frac{1}{a}$ 有最小值，最小值为 2；

(2) 应用：

①如图 1，已知点 P 为双曲线 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ 上的任意一点，过点 P 作 $PA \perp x$ 轴， $PB \perp y$ 轴，四边形 $OAPB$ 的周长取得最小值时，求出点 P 的坐标以及周长最小值；

②如图 2，已知点 Q 是双曲线 $y = \frac{8}{x} (x > 0)$ 上一点，且 $PQ \parallel x$ 轴，连接 OP 、 OQ ，当线段 OP 取得最小值时，这是定点，先求出来，在平面内取一点 C ，使得以 O 、 P 、 Q 、 C 为顶点的四边形是平行四边形，求出点 C 的坐标。

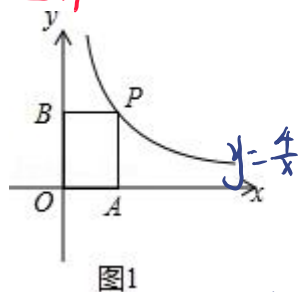


图1

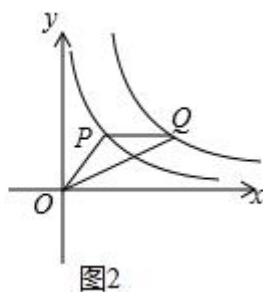


图2

(2) ① 设 $P(m, \frac{4}{m})$

$$\begin{aligned} \text{则 } C_{\text{四边形} OAPB} &= 2PB + 2AP \\ &= 2(m + \frac{4}{m}) \\ &\geq 2(2\sqrt{m \cdot \frac{4}{m}}) = 8 \end{aligned}$$

此时 $m = \frac{4}{m}$ ，解得 $m = \pm 2$ (负值舍去)

$\therefore P(2, 2)$

\therefore 当 P 在 $(2, 2)$ 时，周长最小为 8。

② 设 $P(m, \frac{4}{m})$ ， $Q(2m, \frac{4}{m})$

由题意得：

$$OP^2 = m^2 + \frac{16}{m^2} \geq 2\sqrt{m^2 \times \frac{16}{m^2}} = 8$$

此时： $m = \frac{4}{m}$ ， $m = \pm 2$ (负值舍去)

$\therefore P(2, 2)$

$\therefore Q(4, 2)$

1° OP 为对角线

$$\begin{cases} x_0 + x_p = x_q + x_c \\ y_0 + y_p = y_q + y_c \end{cases}$$

$\therefore C(-2, 0)$

2° OQ 为对角线

$$\begin{cases} x_0 + x_q = x_p + x_c \\ y_0 + y_q = y_p + y_c \end{cases}$$

$\therefore C(2, 0)$

3° PQ 为对角线

$$\begin{cases} x_p + x_q = x_0 + x_c \\ y_p + y_q = y_0 + y_c \end{cases}$$

$\therefore C(6, 4)$

综上： $C(6, 4)$ 或 $(-2, 0)$ 或 $(2, 0)$