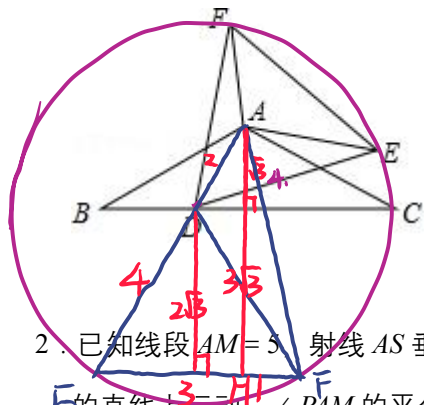


2022 春季数学压轴每日一练 (三十五)

1. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 120^\circ$, $AB = AC = 2\sqrt{3}$. D 为 BC 边一点, 且 $BD:DC = 1:2$. 以 D 为一个点作等边 $\triangle DEF$, 且 $DE = DC$ 连接 AE , 将等边 $\triangle DEF$ 绕点 D 旋转一周, 在整个旋转过程中, 当 AE 取得最大值时 AF 的长为 $2\sqrt{7}$.



$\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 120^\circ$, $AB = AC = 2\sqrt{3}$, $BD = DC = 2$
 $BC = 6$, $BD = 2$, $DC = 4$
 E, F 点的轨迹是以 D 为圆心, 4 为半径的圆上点.
 ① AE 何时最大? A, D, E 三点共线
 ② 此时 AF 是多少?

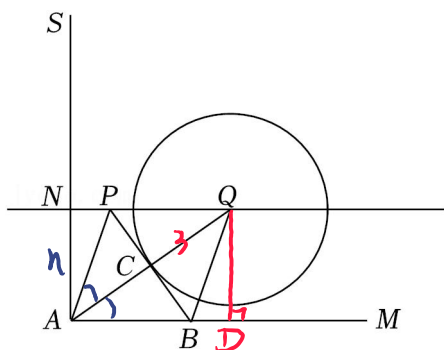
2. 已知线段 $AM = 5$, 射线 AS 垂直于 AM , 点 N 在射线 AS 上, 设 $AN = n$, 点 P 在经过点 N 且平行于 AM 的直线上运动, $\angle PAM$ 的平分线交直线 NP 于点 Q , 过点 Q 作 $QB \parallel AP$, 交线段 AM 于点 B , 连接 PB 交 AQ 于点 C , 以 Q 为圆心, QC 为半径作圆.

解阶线 + 平 \Rightarrow 等腰.

(1) 求证: PB 与 $\odot Q$ 相切;

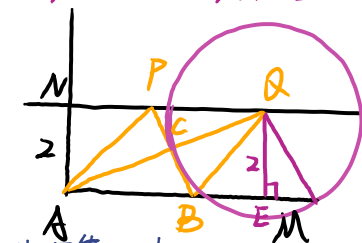
(2) 已知 $\odot Q$ 的半径为 3, 当 AM 所在直线与 $\odot Q$ 相切时, 求 n 的值及 PA 的长;

(3) 当 $n = 2$ 时, 若 $\odot Q$ 与线段 AM 只有一个公共点, 则 $\odot Q$ 的半径的取值范围是 _____ (直接写出答案)



(2) 解: 当 AM 所在直线与 $\odot Q$ 相切于 D 时,
 $AN = r = QC = 3$, $AQ = 6$, $\angle ADQ = 90^\circ$
 在 $Rt\triangle ADQ$ 中 $AD = 3\sqrt{3}$
 设 $AP = AB = BQ = x$, 则 $BD = 3\sqrt{3} - x$
 在 $Rt\triangle BQD$ 中 $(3\sqrt{3} - x)^2 + 3^2 = x^2$
 解得 $x = 2\sqrt{3}$, 即 $PA = 2\sqrt{3}$
 $\therefore n = 3$, $AP = 2\sqrt{3}$

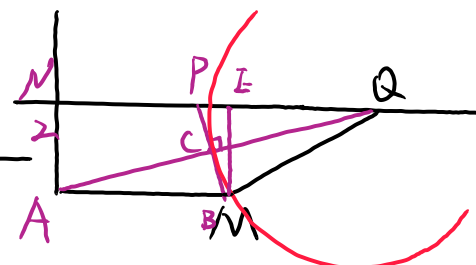
(3) 1° $\odot Q$ 与 AM 相切
 $r = n = 2$
 2° M 在圆内, A 在圆外



临界值 M 在 $\odot Q$ 上时
 设 $AE = x$, $EM = 5 - x$
 $AQ = 2QM$, $AQ^2 = 4QM^2$
 $x^2 + 4 = [(5 - x)^2 + 4] \times 4$
 $3x^2 - 40x + 12 = 0$
 $(3x - 28)(x - 4) = 0$
 $x_1 = \frac{28}{3}$ (舍), $x_2 = 4$

此时 $AQ = 2\sqrt{5}$, $r = \sqrt{5}$
 $\therefore r > \sqrt{5}$

3° 当 $\odot Q$ 第二次经过 M 时



设 $QE = x$, $NQ = 5 + x$
 $AQ = 2QM$, $AQ^2 = 4QM^2$
 $2^2 + (5 + x)^2 = 4(x^2 + 4)$
 $3x^2 - 10x - 13 = 0$
 $(3x + 13)(x - 1) = 0$
 $x_1 = \frac{13}{3}$, $x_2 = -1$
 $\therefore EQ = \frac{13}{3}$, $\therefore AQ = \frac{2\sqrt{65}}{3}$
 综上:
 $r = 2$ 或 $\sqrt{5} < r \leq \frac{\sqrt{65}}{3}$

1° $\angle PAM$ 的平分线交直线 NP 于点 Q ,
 $\therefore \angle PAQ = \angle BAQ$
 $\therefore PQ \parallel AB$
 $\therefore \angle PQA = \angle BQA$
 $\therefore \angle PQA = \angle PQA$
 $\therefore PA = QA$
 $\therefore QB \parallel PA$
 \therefore 四边形 $APQB$ 为平行四边形
 \therefore 四边形 $APQB$ 为菱形
 $\therefore PB \perp AQ$, 垂足为 C
 $\therefore PB$ 与 $\odot Q$ 相切