

2023 秋季初一数学每日一题打卡 004

004 试题来源：2022 星湾 10 月月考 24 题（改编）

小聪是一个聪明而又富有想象力的孩子. 学习了“有理数的乘方”后, 他就琢磨着使用“乘方”这一数学知识, 脑洞大开地定义出“有理数的除方”概念. 于是规定: 若干个相同有理数 (均不能为 0) 的除法运算叫做除方, 如 $5 \div 5 \div 5$, $(-2) \div (-2) \div (-2) \div (-2)$ 等, 类比有理数的乘方. 小聪把 $5 \div 5 \div 5$ 记作 $f(3, 5)$, $(-2) \div (-2) \div (-2) \div (-2)$ 记作 $f(4, -2)$.

(1) 直接写出计算结果, $f(4, \frac{1}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(5, 3) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 关于“有理数的除方”下列说法正确的是 . (填序号)

① $f(6, 3) = f(3, 6)$;

② $f(2, a) = 1$ ($a \neq 0$);

③ 对于任何正整数 n , 都有 $f(n, -1) = 1$;

④ 对于任何正整数 n , 都有 $f(2n, a) < 0$ ($a < 0$).

(3) 小明深入思考后发现: “除方”运算能够转化成乘方运算, 且结果可以写成幂的形式, 请推导出“除方”的运算公式 $f(n, a)$ (n 为正整数, $a \neq 0$, $n \geq 2$), 要求写出推导过程将结果写成幂的形式; (结果用含 a, n 的式子表示)

(4) 请利用 (3) 问的推导公式计算: $f(5, 3) \times f(4, \frac{1}{3}) \times f(5, -2) \times f(6, \frac{1}{2})$.

试题解析

(1) 直接写出计算结果, $f(4, \frac{1}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(5, 3) = \underline{\hspace{2cm}}$;

解: (1) $f(4, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = 4$, $f(5, 3) = 3 \div 3 \div 3 \div 3 \div 3 = \frac{1}{27}$;

故答案为: 4; $\frac{1}{27}$.

(2) 关于“有理数的除方”下列说法正确的是 . (填序号)

① $f(6, 3) = f(3, 6)$; ② $f(2, a) = 1 (a \neq 0)$;

③ 对于任何正整数 n , 都有 $f(n, -1) = 1$; (分为 n 为偶数和奇数两种情况分别计算即可)

④ 对于任何正整数 n , 都有 $f(2n, a) < 0 (a < 0)$. ($2n$ 为偶数, 偶数个 a 相除, 结果应为正)

(2) ① $f(6, 3) = 3 \div 3 \div 3 \div 3 \div 3 \div 3 = \frac{1}{81}$, $f(3, 6) = 6 \div 6 \div 6 = \frac{1}{6}$,

$\therefore f(6, 3) \neq f(3, 6)$, 故错误;

② $f(2, a) = a \div a = 1 (a \neq 0)$, 故正确;

③ 对于任何正整数 n , 当 n 为奇数时, $f(n, -1) = -1$;

当 n 为偶数时, $f(n, -1) = 1$. 故错误;

④ 对于任何正整数 n , $2n$ 为偶数, \therefore 都有 $f(2n, a) > 0$,

而不是 $f(2n, a) < 0 (a < 0)$, 故错误;

故答案为: ②.

(3) 小明深入思考后发现: “除方”运算能够转化成乘方运算, 且结果可以写成幂的形式, 请推导出“除方”的运算公式 $f(n, a)$ (n 为正整数, $a \neq 0, n \geq 2$), 要求写出推导过程将结果写成幂的形式: (结果用含 a, n 的式子表示); **推导 $f(n, a)$ 即可**

(3) 公式 $f(n, a) = a \div a \div a \div a \div \cdots \div a \div a$
 $= 1 \div (a^{n-2})$
 $= (\frac{1}{a})^{n-2} (n \text{ 为正整数, } a \neq 0, n \geq 2)$.

(4) 请利用 (3) 问的推导公式计算: $f(5, 3) \times f(4, \frac{1}{3}) \times f(5, -2) \times f(6, \frac{1}{2})$.

(先将算式中的每一部分表示出来)

(4) $\because f(5, 3) = \frac{1}{27}$; $f(4, \frac{1}{3}) = 9$; $f(5, -2) = -\frac{1}{8}$; $f(6, \frac{1}{2}) = 16$

$\therefore f(5, 3) \times f(4, \frac{1}{3}) \times f(5, -2) \times f(6, \frac{1}{2}) = \frac{1}{27} \times 9 \times (-\frac{1}{8}) \times 16 = -\frac{2}{3}$

本题考查新定义的灵活运用, 学会把“除方”转化为学过的有理数的除法是解题关键。