

## 2023 秋季初三数学每日一题打卡 003

003 试题来源：2022 如皋市期末第 26 题

定义：在平面直角坐标系  $xOy$  中，函数图象上到两条坐标轴的距离之积等于  $n$  ( $n \neq 0$ ) 的点，叫做该函数图象的“ $n$ 阶积点”。例如，点  $(1,1)$  为反比例函数  $y = \frac{1}{x}$  图象的“1阶积点”， $(3, -\frac{3}{2})$  为一次函数  $y = -\frac{3}{2}x + 3$  图象的“ $\frac{9}{2}$ 阶积点”。

- (1) 若点  $(-2, -2)$  为  $y$  关于  $x$  的二次函数  $y = mx^2$  图象的“ $n$ 阶积点”，则  $n$  的值等于 \_\_\_\_\_， $m$  的值等于 \_\_\_\_\_；
- (2) 若  $y$  关于  $x$  的一次函数  $y = mx + 2$  的图象经过一次函数  $y = x - 1$  图象的“2阶积点”，求  $m$  的值；
- (3) 若  $y$  关于  $x$  的一次函数  $y = nx + 3n - 6$  图象的“ $n$ 阶积点”恰好有 3 个，求  $n$  的值。

试题解析

(1) 若点  $(-2, -2)$  为  $y$  关于  $x$  的二次函数  $y = mx^2$  图象的“ $n$  阶积点”，则  $n$  的值等于 4， $m$  的值等于  $-\frac{1}{2}$ ；

回顾定义：函数图象上到两条坐标轴的距离之积等于  $n$  ( $n \neq 0$ ) 的点

$$\Rightarrow n = |-2| \times |-2| = 4$$

将  $(-2, -2)$  代入  $y = mx^2$  得

$$-2 = 4m$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

(2) 若  $y$  关于  $x$  的一次函数  $y = mx + 2$  的图象经过一次函数  $y = x - 1$  图象的“2 阶积点”，求  $m$  的值；

$\Rightarrow \begin{cases} y = mx + 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$  的交点是  $y = x - 1$  的“2 阶积点”  $m = -\frac{1}{2}$  或  $4$

$$\Rightarrow \text{求交点: } \left( \frac{3}{1-m}, \frac{2+m}{1-m} \right)$$

$$\left| \frac{3}{1-m} \right| \times \left| \frac{2+m}{1-m} \right| = 2$$

$$3(2+m) = 2(1-m)^2$$

$$2m^2 - 7m - 4 = 0$$

$$(2m+1)(m-4) = 0$$

$$m_1 = -\frac{1}{2}, m_2 = 4$$

$$3(2+m) = -2(1-m)^2$$

$$2m^2 - m + 8 = 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow \text{无实数根}$$

$\frac{2m}{m} \times \frac{1}{-4}$

(3) 若  $y$  关于  $x$  的一次函数  $y = nx + 3n - 6$  图象的“ $n$  阶积点”恰好有 3 个，求  $n$  的值。

$$y = nx + 3n - 6 \text{ 恒过 } (-3, -6)$$

设  $y = nx + 3n - 6$  上的“ $n$  阶积点”为  $(a, b)$

$$\therefore |a| \cdot |b| = n, n > 0$$

$$\therefore ab = n \text{ 或 } ab = -n.$$

故  $(a, b)$  在  $y = \frac{n}{x}$  或  $y = -\frac{n}{x}$  上

故转化为： $y = nx + 3n - 6$  与  $y = \frac{n}{x}$  与  $y = -\frac{n}{x}$  交点问题

$\therefore y = nx + 3n - 6$  恒过  $(-3, -6)$  且  $n > 0$

$\therefore y = nx + 3n - 6$  恒过  $一、三$  象限。

$\therefore$  恰好有 3 个“ $n$  阶积点”

$\therefore y = nx + 3n - 6$  与  $y = \frac{n}{x}$  必有 2 个交点，

$\star y = nx + 3n - 6$  与  $y = -\frac{n}{x}$  有且只有 1 个交点。

$$\text{联列得 } nx + 3n - 6 = -\frac{n}{x}$$

$$nx^2 + (3n-6)x + n = 0$$

$$\Delta = (3n-6)^2 - 4n^2$$

$$= 5n^2 - 18n + 36 = 0$$

$$(5n-6)(n-6) = 0 \quad \frac{5n-6}{n} \times -6$$

$$n_1 = \frac{6}{5}, n_2 = 6$$

含参直线过定点：

$$y = nx + 3n - 6$$

$$\text{恒过 } (-3, -6)$$