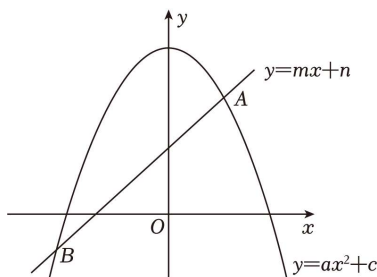
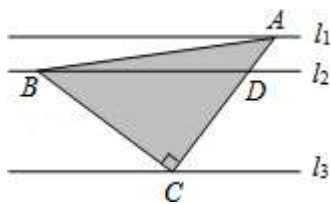


## 2023 初三数学期中每日一练 006

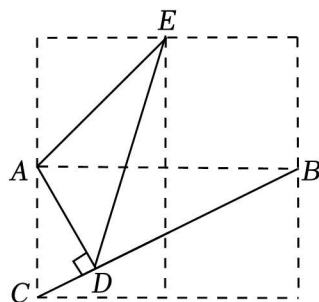
- 若二次函数  $y = (x+2)^2 + m$  与  $y = x^2 + nx + 3$  的图象重合, 则  $m, n$  的值为 ( ).  
 A.  $m=1, n=4$     B.  $m=1, n=-4$     C.  $m=-1, n=-4$     D.  $m=-1, n=4$
- 在  $\triangle ABC$  中, 若  $\left| \sin A - \frac{1}{2} \right| + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos B \right)^2 = 0$ , 则  $\angle C$  的度数是 \_\_\_\_\_.
- $\triangle ABC$  中,  $\angle A, \angle B$  都是锐角,  $\cos A = \frac{4\sqrt{41}}{41}$ ,  $\sin B = \frac{5}{13}$ ,  $AB = 8$ , 则  $BC$  长为 \_\_\_\_\_.
- 如图, 抛物线  $y = ax^2 + c$  与直线  $y = mx + n$  交于  $A(2, p)$ ,  $B(-4, q)$  两点, 则不等式  $ax^2 - mx + c - n > 0$  的解集是 \_\_\_\_\_.



- 如图, 直线  $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ , 且  $l_1$  与  $l_2$  的距离为 2,  $l_2$  与  $l_3$  的距离为 5, 把一块含有  $45^\circ$  角的直角三角形如图放置, 顶点  $A, B, C$  恰好分别落在三条直线上,  $AC$  与直线  $l_2$  交于点  $D$ , 则线段  $BD$  的长度为 \_\_\_\_\_.



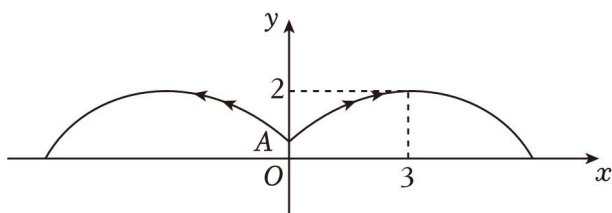
- 如图, 边长为 1 的小正方形网格中, 点  $A, B, C, E$  在格点上, 连接  $AE, BC$ , 点  $D$  在  $BC$  上且满足  $AD \perp BC$ , 则  $\angle AED$  的正切值是 \_\_\_\_\_.



- 某游乐场的圆形喷水池中心  $O$  有一喷水管  $OA$ , 从点  $A$  向四周喷水, 喷出的水柱为抛物线, 且形状相同. 如图, 以水平方向为  $x$  轴, 点  $O$  为原点建立平面直角坐标系 (单位长度为  $1m$ ), 点  $A$  在  $y$  轴上, 水柱所在的抛物线 (第一象限部分) 的函数表达式为  $y = -\frac{1}{6}(x-3)^2 + 2$ .

(1) 求喷水管高  $OA$ .

(2) 身高为  $1.7m$  的小明站在距离喷水管  $4m$  的地方, 他会被水喷到吗?

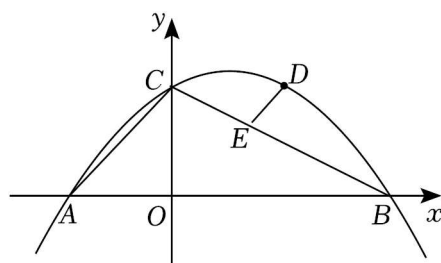
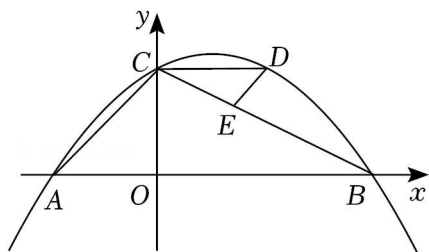


8. 如图,二次函数  $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$  的图象交  $x$  轴于  $A, B$  两点,交  $y$  轴于点  $C$ ,点  $D$  是  $BC$  上方抛物线上的一点,过  $D$  作  $AC$  的平行线,交  $BC$  于点  $E$ .

(1) 求  $\triangle ABC$  的面积;

(2) 连接  $CD$ ,当  $CD \parallel x$  轴时,求  $\triangle CDE$  的面积;

(3) 求  $DE$  的最大值.



(备用图)

## 2023 初三数学期中每日一练 006 答案解析

1. 若二次函数  $y = (x+2)^2 + m$  与  $y = x^2 + nx + 3$  的图象重合, 则  $m, n$  的值为 ( **D** )

A.  $m=1, n=4$     B.  $m=1, n=-4$     C.  $m=-1, n=-4$     D.  $m=-1, n=4$

**【分析】**把函数  $y = (x+2)^2 + m$  化成一般式, 对照即可得到结论.

**【解答】**解:  $\because y = (x+2)^2 + m = x^2 + 4x + 4 + m$ ,

$\therefore n=4, 4+m=3, \therefore m=-1$ .

2. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $\left| \sin A - \frac{1}{2} \right| + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos B \right)^2 = 0$ , 则  $\angle C$  的度数是  $105^\circ$ .

**【解答】**解: 由题意得,  $\sin A - \frac{1}{2} = 0, \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos B = 0$ , 即  $\sin A = \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos B$ ,

解得,  $\angle A = 30^\circ, \angle B = 45^\circ, \therefore \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 105^\circ$ .

3.  $\triangle ABC$  中,  $\angle A, \angle B$  都是锐角,  $\cos A = \frac{4\sqrt{41}}{41}, \sin B = \frac{5}{13}, AB = 8$ , 则  $BC$  长为  $6.5$ .

**【分析】**首先根据题意画出示意图, 作  $CD \perp AB$  于  $D$ ,

先在  $Rt\triangle BCD$  中由  $\sin B = \frac{5}{13}$ , 设  $CD = 5x, BC = 13x$ , 则  $BD = 12x$ , 进而得  $AD = 8 - 12x$ ,

然后根据  $\cos A$  的值求出  $\tan A$  的值, 进而根据正切函数的定义求出  $x$  的值即可得出  $BC$  的长.

**【解答】**解: 过点  $C$  作  $CD \perp AB$  于点  $D$ , 如图:

在  $Rt\triangle BCD$  中,  $\sin B = \frac{CD}{BC} = \frac{5}{13}$ ,  $\therefore$  设  $CD = 5x, BC = 13x$ ,

由勾股定理得:  $BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = 12x$ ,

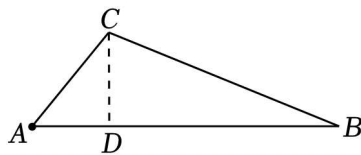
$\therefore AB = 8, \therefore AD = AB - BD = 8 - 12x$ ,

$\therefore \cos A = \frac{4\sqrt{41}}{41}, \therefore \sin A = \sqrt{1 - (\cos A)^2} = \frac{5\sqrt{41}}{41}$ ,

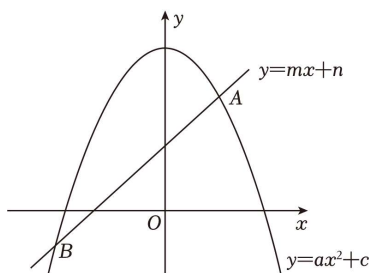
$\therefore \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{5}{4}$ ,

在  $Rt\triangle ACD$  中,  $\tan A = \frac{CD}{AD}, \therefore \frac{5x}{8 - 12x} = \frac{5}{4}$ ,

解得:  $x = 0.5, \therefore BC = 13x = 6.5$ .



4. 如图, 抛物线  $y = ax^2 + c$  与直线  $y = mx + n$  交于  $A(2, p), B(-4, q)$  两点, 则不等式  $ax^2 - mx + c - n > 0$  的解集是  $-2 < x < 4$ .



**【分析】**根据图象中直线在抛物线上方的  $x$  的取值范围求解.

**【解答】**解:  $\because A(2, p), B(-4, q)$

$\therefore$  当  $-2 < x < 4$  时, 抛物线在直线上方,

$\therefore ax^2 + c > mx + n$  的解集为  $-2 < x < 4$ ,

即  $ax^2 - mx + c - n > 0$  的解集为  $-2 < x < 4$ ,

5. 如图, 直线  $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ , 且  $l_1$  与  $l_2$  的距离为 2,  $l_2$  与  $l_3$  的距离为 5, 把一块含有  $45^\circ$  角的直角三角形如图放置, 顶点  $A, B, C$  恰好分别落在三条直线上,  $AC$  与直线  $l_2$  交于点  $D$ , 则线段  $BD$  的长度为  $\frac{74}{7}$ .

【分析】过  $A$  作  $AF \perp l_3$  于点  $F$ , 过  $B$  作  $BE \perp l_3$  于点  $E$ , 过  $D$  作  $DG \perp l_3$  于点  $G$ , 证  $\triangle BCE \cong \triangle CAF$ , 得出  $CF, CE$  的长, 再由勾股定理求出  $AC$  的长, 然后证  $\triangle CDG \sim \triangle CAF$ , 得出  $CD$  的长, 即可解决问题.

【解答】解: 过  $A$  作  $AF \perp l_3$  于点  $F$ , 过  $B$  作  $BE \perp l_3$  于点  $E$ , 过  $D$  作  $DG \perp l_3$  于点  $G$ , 如图:

$\because \triangle ABC$  是等腰直角三角形,  $\therefore AC = BC, \angle ACB = 90^\circ$ ,

$\because \angle EBC + \angle BCE = 90^\circ, \angle BCE + \angle ACF = 90^\circ, \angle ACF + \angle CAF = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle EBC = \angle ACF, \angle BCE = \angle CAF$ ,

在  $\triangle BCE$  与  $\triangle CAF$  中,

$$\begin{cases} \angle EBC = \angle ACF \\ BC = AC \\ \angle BEC = \angle AFC \end{cases}, \therefore \triangle BCE \cong \triangle CAF (ASA), \therefore CF = BE, CE = AF,$$

$\because l_1$  与  $l_2$  的距离为 2,  $l_2$  与  $l_3$  的距离为 5,  $\therefore CF = BE = 5, CE = AF = 2 + 5 = 7$ ,

在  $Rt\triangle ACF$  中,  $AF = 7, CF = 5$ ,

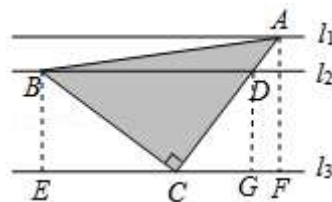
$$\therefore AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74},$$

$\because AF \perp l_3, DG \perp l_3, \therefore \triangle CDG \sim \triangle CAF, \therefore \frac{DG}{AF} = \frac{CD}{AC}$ ,

$$\text{即 } \frac{5}{7} = \frac{CD}{\sqrt{74}}, \therefore CD = \frac{5}{7}\sqrt{74},$$

在  $Rt\triangle BCD$  中,  $CD = \frac{5}{7}\sqrt{74}, BC = AC = \sqrt{74}$ ,

$$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{(\sqrt{74})^2 + \left(\frac{5}{7}\sqrt{74}\right)^2} = \frac{74}{7}.$$



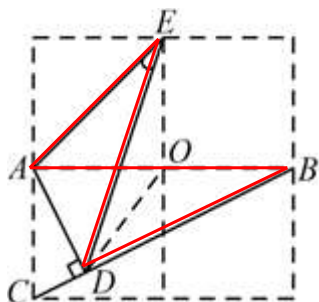
6. 如图, 边长为 1 的小正方形网格中, 点  $A, B, C, E$  在格点上, 连接  $AE, BC$ , 点  $D$  在  $BC$  上且满足  $AD \perp BC$ , 则  $\angle AED$  的正切值是  $\frac{1}{2}$ .

【分析】连接  $OD$ , 核心是: 把求  $\angle AED$  的正切值转化为求  $\angle ABC$  的正切值.

直角三角形斜边中线等于斜边一半, 可得  $OD = AO = OB$ ,

故  $OD = OA = OE = OD$ . 结合等腰外角可得  $\angle EDB = 45^\circ = \angle EAB$ .

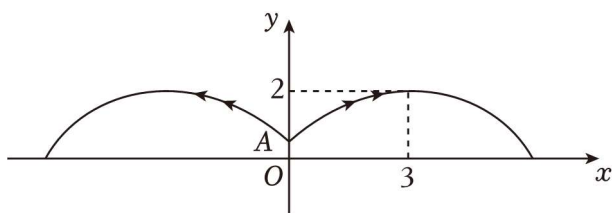
再用“8”字模型即可转化.  $\tan \angle AED = \tan \angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$ .



7. 某游乐场的圆形喷水池中心  $O$  有一喷水管  $OA$ , 从点  $A$  向四周喷水, 喷出的水柱为抛物线, 且形状相同. 如图, 以水平方向为  $x$  轴, 点  $O$  为原点建立平面直角坐标系 (单位长度为  $1m$ ), 点  $A$  在  $y$  轴上, 水柱所在的抛物线 (第一象限部分) 的函数表达式为  $y = -\frac{1}{6}(x-3)^2 + 2$ .

(1) 求喷水管高  $OA$ .

(2) 身高为  $1.7m$  的小明站在距离喷水管  $4m$  的地方, 他会被水喷到吗?



【分析】(1) 当  $x=0$  时, 代入求解即可;

(2) 令  $x=4$ , 得出  $y$  值, 与身高比较即可.

【解答】解: (1) 当  $x=0$  时,  $y = -\frac{1}{6} \times (0-3)^2 + 2 = \frac{1}{2}$ ,

$\therefore$  点  $A$  的坐标为  $(0, \frac{1}{2})$ ,

$\therefore$  喷水管高  $OA$  为  $\frac{1}{2}m$ .

(2) 对于  $y = -\frac{1}{6}(x-3)^2 + 2$ ,

令  $x=4$ , 则  $y = -(4-3)^2 + 2 = \frac{11}{6} > 1.7$ ,

$\therefore$  小明不会被水喷到.

【点评】题目主要考查二次函数的应用, 理解题意, 求出相应的函数值比较是解题关键.

8. 如图, 二次函数  $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$  的图象交  $x$  轴于  $A, B$  两点, 交  $y$  轴于点  $C$ , 点  $D$  是  $BC$  上方抛物线上的一点, 过  $D$  作  $AC$  的平行线, 交  $BC$  于点  $E$ .

(1) 求  $\triangle ABC$  的面积;

(1) 先令  $x=0$  求得点  $C$  的坐标, 再令  $y=0$  求得点  $A$  和点  $B$  的坐标, 然后求得  $\triangle ABC$  的面积;

解: (1) 当  $x=0$  时,  $y=3$ ,

$\therefore C(0, 3), OC=3$ ,

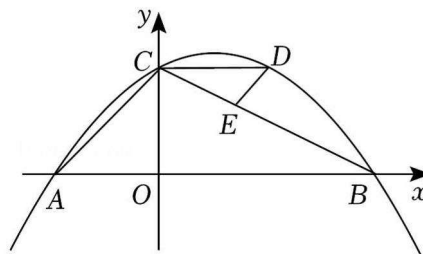
当  $y=0$  时,  $-\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 = 0$ ,

解得:  $x=-3$  或  $x=6$ ,

$\therefore A(-3, 0), B(6, 0)$ ,

$\therefore AB=9$ ,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot OC = \frac{1}{2} \times 9 \times 3 = \frac{27}{2}$ .



(2) 连接  $CD$ , 当  $CD \parallel x$  轴时, 求  $\triangle CDE$  的面积;

(2) 先由  $CD \parallel x$  轴求得点  $D$  的坐标得到线段  $CD$  的长度, 然后结合  $DE \parallel AC$  得证  $\triangle CDE \sim \triangle BAC$ , 再利用相似三角形的性质得到  $\triangle CDE$  的面积;

(2)  $\because C(0, 3), CD \parallel x$  轴,

$\therefore D(3, 3), \angle DCE = \angle ABC$ ,

$\therefore CD=3$ ,

$\because DE \parallel AC$ ,

$\therefore \angle DEC = \angle ACB$ ,

$\therefore \triangle DEC \sim \triangle ACB$ ,

$\therefore \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{CD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{3}{9}\right)^2 = \frac{1}{9}$ ,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{27}{2}$ ,

$\therefore S_{\triangle DEC} = \frac{3}{2}$ .

(3) 求  $DE$  的最大值.

【分析】(3) 过点  $D$  作  $DF \parallel y$  轴交  $BC$  于点  $F$ , 过点  $E$  作  $EH \perp DF$  于点  $H$ , 然后由  $DE \parallel AC$  可知  $\angle DEF$  的度数不变, 由  $DF \parallel y$  轴可知  $\angle EFD$  的度数不变, 从而知道在点  $D$  的移动过程中  $\triangle DEF$  的形状保持不变, (形状不变, 代表  $\frac{DE}{DF}$  的比值不变)

即有当  $DF$  最大时,  $DE$  的长度也最大, 将  $DE$  的最值转化为铅锤线段  $DF$  的最值

(3) 如图, 过点  $D$  作  $DF \parallel y$  轴交  $BC$  于点  $F$ , 过点  $E$  作  $EH \perp DF$  于点  $H$ ,

$\because DE \parallel AC, DF \parallel y$  轴,

$\therefore \angle DEF$  的度数不变,  $\angle EFD$  的度数不变,

$\therefore$  在点  $D$  的移动过程中  $\triangle DEF$  的形状保持不变,

(既然形状不变, 后面可以单独把  $\frac{DE}{DF}$  的比值算出)

$\because$  在  $\triangle DEF$  中,  $\angle EDH = 45^\circ$ ,  $\tan \angle EFH = 2$ ,

设  $HF = t$ , 则  $EH = 2t, DH = 2t$ ,

$\therefore DE = 2\sqrt{2}t$ ,

$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,

$\therefore DE = \frac{2\sqrt{2}}{3}DF$ ,

$\therefore$  当  $DF$  最大时,  $DE$  的长度也最大,

设直线  $BC$  的解析式为  $y = kx + b$ , 则

$$\begin{cases} 6k + b = 0 \\ b = 3 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 3 \end{cases},$$

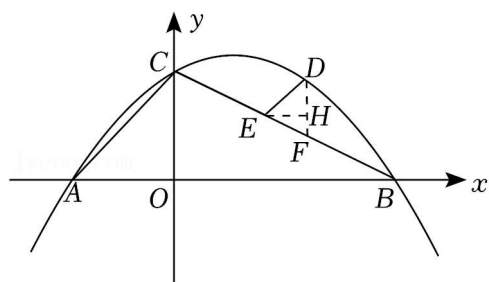
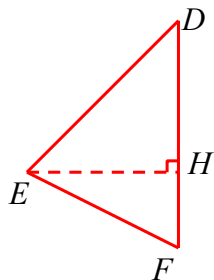
$\therefore$  直线  $BC$  的解析式为  $y = -\frac{1}{2}x + 3$ ,

设点  $D$  的坐标  $(x, -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + 3)$ , 则点  $F$  的坐标  $(x, -\frac{1}{2}x + 3)$ ,

$\therefore DF = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 - (-\frac{1}{2}x + 3) = -\frac{1}{6}x^2 + x = -\frac{1}{6}(x-3)^2 + \frac{3}{2}$ ,

$\therefore$  当  $x = 3$  时,  $DF$  有最大值, 最大值为  $\frac{3}{2}$ .

$\therefore DE_{\text{最大值}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}DF = \sqrt{2}$ .



【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征、相似三角形的判定与性质、两点间的距离公式, 解题的关键是会通过平行线的性质得到角度相等进而证明三角形相似.