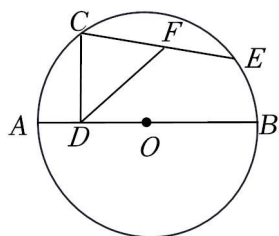


2024 春季初三数学每日一题 003

003 试题来源：2023 宜兴一模第 10 题

如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 在 $\odot O$ 上， $CD \perp AB$ ，垂足为 D ， $AD = 2$ ，点 E 是 $\odot O$ 上的动点（不与 C 重合），点 F 为 CE 的中点，若在 E 运动过程中 DF 的最大值为 4，则 CD 的值为（ ）



A. $2\sqrt{3}$

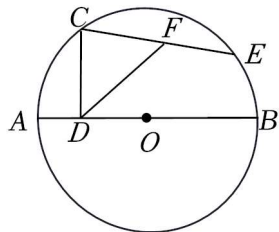
B. $2\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{2}$

D. $\frac{7}{2}$

试题解析

如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 在 $\odot O$ 上, $CD \perp AB$, 垂足为 D , $AD = 2$, 点 E 是 $\odot O$ 上的动点 (不与 C 重合), 点 F 为 CE 的中点, 若在 E 运动过程中 DF 的最大值为 4, 则 CD 的值为 ()



A. $2\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{2}$

D. $\frac{7}{2}$

【解答】解: 方法一、如图所示, 连接 OE 、 OC , 取 OC 的中点 M , 连接 MF 和 DM , 设 $\odot O$ 的半径为 r ,

\because 点 F 为 CE 的中点, $\therefore MF = \frac{1}{2}OE = \frac{r}{2}$,

\because 点 E 是 $\odot O$ 上的动点 (不与 C 重合), 点 C 为顶点,

\therefore 点 F 的运动轨迹是以点 M 为圆心, 以 MF 的长为半径的圆上,

则 $DF \leq DM + MF$,

\therefore 当点 D 、 M 、 F 三点共线时, DF 有最大值 4,

此时 $DF = DM + MF$, $\therefore DM = 4 - \frac{r}{2}$,

$\because CD \perp AB$, $\therefore \angle CDO = 90^\circ$,

\because 点 M 为 OC 的中点, $\therefore DM = \frac{1}{2}OC = \frac{r}{2}$,

$\therefore \frac{r}{2} = 4 - \frac{r}{2}$, 解得: $r = 4$, $\therefore OD = OA - AD = 2$,

在 $Rt\triangle CDO$ 中, $CD = \sqrt{OC^2 - OD^2} = 2\sqrt{3}$;

方法二、如图, 延长 CD 交 $\odot O$ 于 Q , 连接 QE , CO ,

$\because CD \perp AB$, AB 是直径, $\therefore CD = DQ$,

又 \because 点 F 是 CE 的中点, $\therefore QE = 2DF$,

当 QE 为直径时, DF 有最大值,

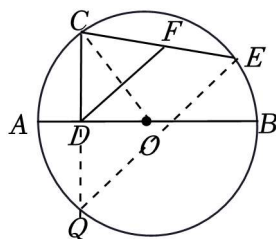
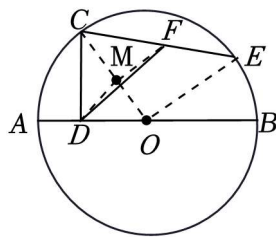
$\therefore QE = 2DF = 8$,

$\therefore AO = CO = 4$,

$\therefore DO = 2$,

在 $Rt\triangle CDO$ 中, $CD = \sqrt{OC^2 - OD^2} = 2\sqrt{3}$;

故选: A.



【点评】本题主要考查的是圆的动点综合题型, 解题关键是确定点 D 、 M 、 F 三点共线时, DF 有最大值 4.

感谢昆山张良老师提供新的解法：

初三003

【解答】解：如图所示，连接 OF , OC , 设 $\odot O$ 的半径为 r ,

\because 点 F 为 CE 的中点,

$\therefore OF \perp CE$,

$\because CD \perp AB$,

$\therefore \angle CDO + \angle CFO = 180^\circ$

\therefore 点 C 、 D 、 O 、 F 四点共圆,

当 $DF = OC$ 时最大

$\therefore r = 4$

$\therefore OD = OA - AD = 2$,

在 $Rt\triangle CDO$ 中, $CD = \sqrt{OC^2 - OD^2} = 2\sqrt{3}$;

