

## 2024 春季初二数学每日一题打卡 020

020 试题来源:连云港校级期中

定义:对于一个四边形,我们把依次连结它的各边中点得到的新四边形叫做原四边形的“中点四边形”,如果原四边形的中点四边形是个正方形,我们把这个原四边形叫做“中方四边形”.

概念理解:下列四边形中一定是“中方四边形”的是 \_\_\_\_\_.

- A. 平行四边形;      B. 矩形;      C. 菱形;      D. 正方形.

性质探究:如图 1,四边形  $ABCD$  是“中方四边形”,观察图形,写出关于四边形  $ABCD$  的两条结论:

① \_\_\_\_\_; ② \_\_\_\_\_.

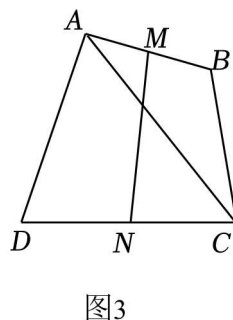
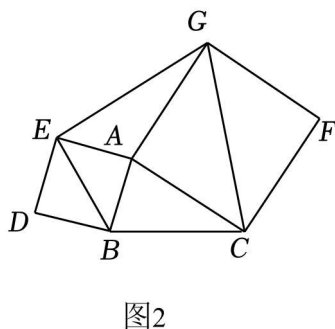
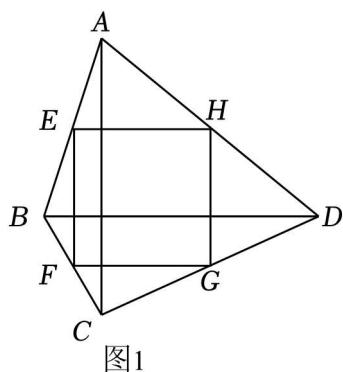
问题解决:如图 2,以锐角  $\triangle ABC$  的两边  $AB, AC$  为边长,分别向外侧作正方形  $ABDE$  和正方形  $ACFG$ ,连结  $BE, EG, GC$ .

(1) 求证:四边形  $BCGE$  是“中方四边形”:

拓展应用:如图 3,已知四边形  $ABCD$  是“中方四边形”, $M, N$  分别是  $AB, CD$  的中点.

(2) 试探索  $BD$  与  $MN$  的数量关系,并说明理由;

(3) 若  $AB + CD$  的最小值是 4,则  $BD$  的长度为 \_\_\_\_\_. (不需要解答过程)



## 试题解析

概念理解:下列四边形中一定是“中方四边形”的是 D.

A. 平行四边形; B. 矩形; C. 菱形; D. 正方形.

性质探究:如图1,四边形  $ABCD$  是“中方四边形”,观察图形,写出关于四边形  $ABCD$  的两条结论:

①  $AC=BD$ ; ②  $AC \perp BD$ .

【解答】概念理解:  $\because$  在平行四边形、矩形、菱形、正方形中,正方形的对角线相等且互相垂直,  $\therefore$  一定是“中方四边形”的是正方形;故答案为: D;

性质探究:解:  $\because$  四边形  $ABCD$  是“中方四边形”,

$\therefore$  四边形  $EFGH$  是正方形,

$\therefore EF=FG=HG=EH, \angle EFG=\angle FGH=\angle GHE=\angle HEF=90^\circ$ ,

$\because E, F, G, H$  分别是  $AB, BC, CD, AD$  的中点,

$\therefore EF=\frac{1}{2}AC, EF \parallel AC, FG=\frac{1}{2}BD, FG \parallel BD$ ,

$\therefore$  ①  $AC=BD$ , ②  $AC \perp BD$ ,

故答案为:  $AC=BD, AC \perp BD$ ;

问题解决:如图2,以锐角  $\triangle ABC$  的两边  $AB, AC$  为边长,分别向外侧作正方形  $ABDE$  和正方形  $ACFG$ ,连结  $BE, EG, GC$ .

(1) 求证:四边形  $BCGE$  是“中方四边形”:

问题解决:(1) 证明:如图2,设四边形  $BCGE$  的边  $BC, CG, GE, BE$  的中点分别为  $M, N, R, L$ ,连接  $CE$  交  $AB$  于  $P$ ,连接  $BG$  交  $CE$  于  $K$ ,

$\because$  四边形  $BCGE$  各边中点分别为  $M, N, R, L$ ,

$\therefore MN, NR, RL, LM$  分别是  $\triangle BCG, \triangle CEG, \triangle BGE, \triangle CEB$  的中位线,

$\therefore MN \parallel \frac{1}{2}BG, RL \parallel \frac{1}{2}BG, RN \parallel \frac{1}{2}CE, ML \parallel \frac{1}{2}CE$ ,

$\therefore MN \parallel RL, MN=RL, RN \parallel CE \parallel ML, RN=ML$ ,

$\therefore$  四边形  $MNRL$  是平行四边形,

$\because$  四边形  $ABDE$  和四边形  $ACFG$  都是正方形,

$\therefore AE=AB, AG=AC, \angle EAB=\angle GAC=90^\circ$ ,

$\therefore \angle EAC=\angle BAG$ ,

$\therefore \triangle EAC \cong \triangle BAG(SAS)$ ,

$\therefore CE=BG, \angle AEC=\angle ABG$ ,

又  $\because RL=\frac{1}{2}BG, RN=\frac{1}{2}CE, \therefore RL=RN$ ,

$\therefore$  平行四边形  $MNRL$  是菱形,

$\because \angle EAB=90^\circ$ ,

$\therefore \angle AEP+\angle APE=90^\circ$ .

又  $\because \angle AEC=\angle ABG, \angle APE=\angle BPK$ ,

$\therefore \angle ABG+\angle BPK=90^\circ$ ,

$\therefore \angle BKP=90^\circ$ ,

又  $\because MN \parallel BG, ML \parallel CE$ ,

$\therefore \angle LMN=90^\circ$ .

$\therefore$  菱形  $MNRL$  是正方形,即原四边形  $BCGE$  是“中方四边形”.

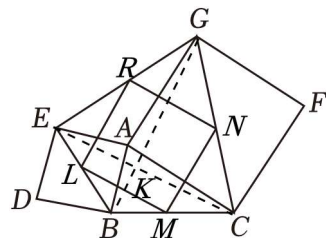


图 2

拓展应用:如图3,已知四边形  $ABCD$  是“中方四边形”,  $M, N$  分别是  $AB, CD$  的中点.

(2) 试探索  $BD$  与  $MN$  的数量关系,并说明理由;

拓展应用: (2) 解:  $MN = \frac{\sqrt{2}}{2} BD$ ; 理由如下:

如图3,记  $AD, BC$  的中点分别为  $E, F$ , 连接  $BD$ ,

$\because$  四边形  $ABCD$  是“中方四边形”,

$M, N$  分别是  $AB, CD$  的中点,

$\therefore$  四边形  $ENFM$  是正方形,

$\therefore FM = FN, \angle MFN = 90^\circ$ ,

$\therefore MN = \sqrt{FM^2 + FN^2} = \sqrt{2} FN$ ,

$\because N, F$  分别是  $DC, BC$  的中点,

$\therefore FN = \frac{1}{2} BD$ ,

$\therefore MN = \frac{\sqrt{2}}{2} BD$ ;

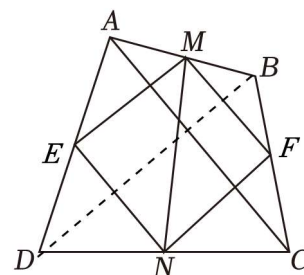


图 3

(3) 若  $AB + CD$  的最小值是 4, 则  $BD$  的长度为  $2\sqrt{2}$ . (不需要解答过程)

(3) 解: 如图4, 连接  $BD$  交  $AC$  于  $O$ , 连接  $OM, ON$ ,

当点  $O$  在  $MN$  上 (即  $M, O, N$  共线) 时,  $OM + ON$  最小, 最小值为  $MN$  的长,

$\therefore 2(OM + ON)$  的最小值  $= 2MN$ ,

由性质探究性质探究知:  $AC \perp BD$ ,

又  $\because M, N$  分别是  $AB, CD$  的中点,

$\therefore AB = 2OM, CD = 2ON$ ,

$\therefore 2(OM + ON) = AB + CD$ ,

$\therefore AB + CD$  的最小值  $= 2MN$ ,

由拓展应用 (2) 知:  $MN = \frac{\sqrt{2}}{2} BD$ ;

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} BD \times 2 = 4$ ;

$\therefore BD = 2\sqrt{2}$ ,

故答案为:  $2\sqrt{2}$ .

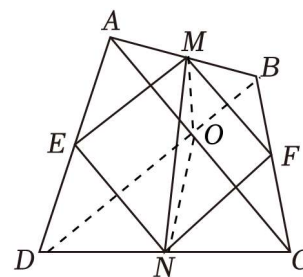


图 3