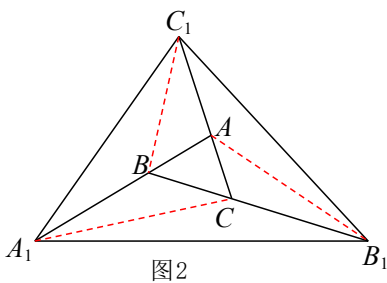
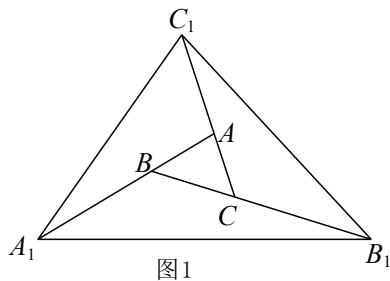


2024 春季初一数学每日一题打卡 020

阅读下面资料：

小明遇到这样一个问题：如图 1，对面积为  $a$  的  $\triangle ABC$  逐次进行以下操作：分别延长  $AB$ 、 $BC$ 、 $CA$  至  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$ ，使得  $A_1B = 2AB$ ， $B_1C = 2BC$ ， $C_1A = 2CA$ ，顺次连接  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$ ，得到  $\triangle A_1B_1C_1$ ，记其面积为  $S_1$ ，求  $S_1$  的值。

小明是这样思考和解决这个问题的：如图 2，连接  $A_1C$ 、 $B_1A$ 、 $C_1B$ ，因为  $A_1B = 2AB$ ， $B_1C = 2BC$ ， $C_1A = 2CA$ ，根据等高两三角形的面积比等于底之比，所以  $S_{\triangle A_1BC} = S_{\triangle B_1CA} = S_{\triangle C_1AB} = S_{\triangle C_1AB} = 2S_{\triangle ABC} = 2a$ ，由此继续推理，从而解决了这个问题。

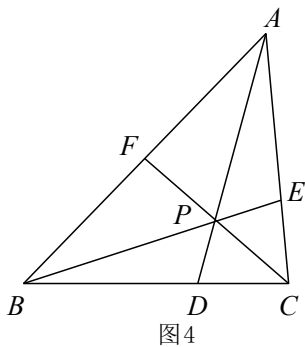
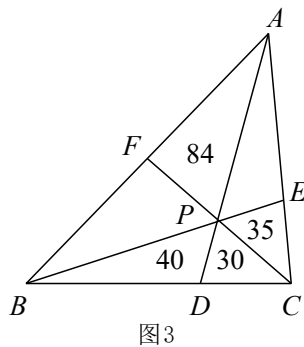


(1) 直接写出  $S_1 = \underline{\hspace{2cm}}$  (用含字母  $a$  的式子表示)。

请参考小明同学思考问题的方法，解决下列问题：

(2) 如图 3， $P$  为  $\triangle ABC$  内一点，连接  $AP$ 、 $BP$ 、 $CP$  并延长分别交边  $BC$ 、 $AC$ 、 $AB$  于点  $D$ 、 $E$ 、 $F$ ，则把  $\triangle ABC$  分成六个小三角形，其中四个小三角形面积已在图上标明，求  $\triangle ABC$  的面积。

(3) 如图 4，若点  $P$  为  $\triangle ABC$  的边  $AB$  上的中线  $CF$  的中点，求  $S_{\triangle APE}$  与  $S_{\triangle BPF}$  的比值。



## 试题解析

阅读下面资料：

小明遇到这样一个问题：如图1，对面积为 $a$ 的 $\triangle ABC$ 逐次进行以下操作：分别延长 $AB$ 、 $BC$ 、 $CA$ 至 $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$ ，使得 $A_1B=2AB$ ， $B_1C=2BC$ ， $C_1A=2CA$ ，顺次连接 $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$ ，得到 $\triangle A_1B_1C_1$ ，记其面积为 $S_1$ ，求 $S_1$ 的值。

小明是这样思考和解决这个问题的：如图2，连接 $A_1C$ 、 $B_1A$ 、 $C_1B$ ，因为 $A_1B=2AB$ ， $B_1C=2BC$ ， $C_1A=2CA$ ，根据等高两三角形的面积比等于底之比，所以 $S_{\triangle A_1BC}=S_{\triangle B_1CA}=S_{\triangle A_1BC}=S_{\triangle C_1AB}=2S_{\triangle ABC}=2a$ ，由此继续推理，从而解决了这个问题。

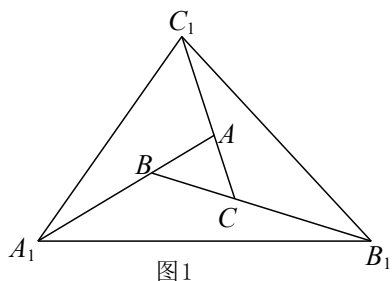


图1

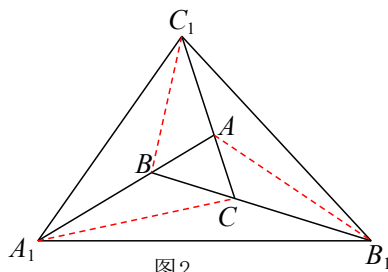


图2

(1) 直接写出 $S_1 = \underline{\quad 19a \quad}$  (用含字母 $a$ 的式子表示)。

请参考小明同学思考问题的方法，解决下列问题：

**【解答】解：**(1) 连接 $A_1C$ 、 $B_1A$ 、 $C_1B$ ，

$$\because B_1C=2BC, A_1B=2AB,$$

$$\therefore S_{\triangle BCA_1}=2S_{\triangle ABC}=2a, S_{\triangle BCA_1}=2S_{\triangle ABC}=2a, S_{\triangle A_1B_1C}=2S_{\triangle BCA_1},$$

$$\therefore S_{\triangle A_1B_1C}=4S_{\triangle ABC}=4a,$$

$$\therefore S_{\triangle A_1B_1B}=6S_{\triangle ABC}=6a,$$

$$\text{同理可得出：} S_{\triangle A_1AC_1}=S_{\triangle CB_1C_1}=6a,$$

$$\therefore S_1=6a+6a+6a+a=19a;$$

故答案为 $19a$ ；

(2) 如图3， $P$ 为 $\triangle ABC$ 内一点，连接 $AP$ 、 $BP$ 、 $CP$ 并延长分别交边 $BC$ 、 $AC$ 、 $AB$ 于点 $D$ 、 $E$ 、 $F$ ，则把 $\triangle ABC$ 分成六个小三角形，其中四个小三角形面积已在图上标明，求 $\triangle ABC$ 的面积。

(2) 过点 $C$ 作 $CG \perp BE$ 于点 $G$ ，

$$\text{设 } S_{\triangle BPF}=x, S_{\triangle APE}=y,$$

$$\because S_{\triangle BPC}=\frac{1}{2}BP \cdot CG=70, S_{\triangle PCE}=\frac{1}{2}PE \cdot CG=35,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BPC}}{S_{\triangle PCE}}=\frac{\frac{1}{2}BP \cdot CG}{\frac{1}{2}PE \cdot CG}=\frac{70}{35}=2,$$

$$\therefore \frac{BP}{EP}=2, \text{即 } BP=2EP; \text{同理, } \frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle APE}}=\frac{BP}{PE},$$

$$\therefore S_{\triangle APB}=2S_{\triangle APE}.$$

$$\therefore x+84=2y. \quad \text{①}$$

$$\because \frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle BPD}}=\frac{AP}{PD}=\frac{x+84}{40}, \frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle PCD}}=\frac{AP}{PD}=\frac{y+35}{30},$$

$$\therefore \frac{x+84}{40}=\frac{y+35}{30}. \quad \text{②}$$

$$\text{由①②, 得 } \begin{cases} x=56 \\ y=70 \end{cases},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=315;$$

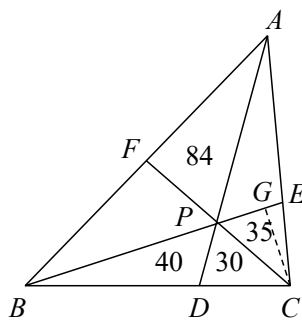


图3

(3) 如图4,若点  $P$  为  $\triangle ABC$  的边  $AB$  上的中线  $CF$  的中点,求  $S_{\triangle APE}$  与  $S_{\triangle BPF}$  的比值.

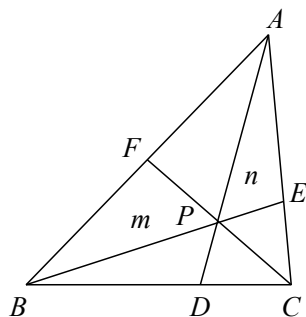


图4

(3) 设  $S_{\triangle BPF} = m$ ,  $S_{\triangle APE} = n$ , 如图所示.

依题意,得  $S_{\triangle APF} = S_{\triangle APC} = m$ ,  $S_{\triangle BPC} = S_{\triangle BPF} = m$ ,

$$\therefore S_{\triangle PCE} = m - n,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle APE}} = \frac{S_{\triangle BPC}}{S_{\triangle PCE}} = \frac{BP}{PE},$$

$$\therefore \frac{2m}{n} = \frac{m}{m-n},$$

$$\therefore 2m(m-n) = mn,$$

$$\therefore m \neq 0,$$

$$\therefore 2m - 2n = n,$$

$$\therefore \frac{n}{m} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle APE}}{S_{\triangle BPF}} = \frac{2}{3}.$$

【点评】(2) 的关键是设出未知三角形的面积,然后根据等高不等底的三角形的面积的比等于底边的比列式求解.