

2024 秋季初三数学每日一题打卡 003

003 试题来源：2023 秋立达中学期中第 27 题

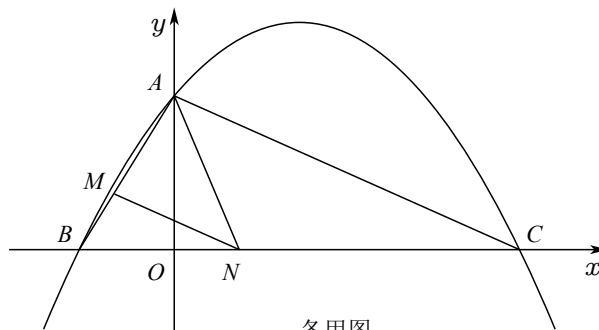
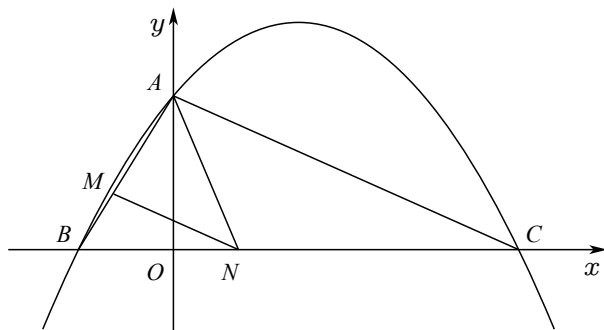
如图，已知二次函数 $y = ax^2 + \frac{3}{2}x + c$ 的图象与 y 轴交于点 $A(0, 4)$ ，与 x 轴交于点 B 、 C ，点 C 坐标为 $(8, 0)$ 。连接 AB 、 AC 。

(1) 请直接写出二次函数 $y = ax^2 + \frac{3}{2}x + c$ 的表达式；

(2) 若点 N 在线段 BC 上运动 (不与点 B 、 C 重合)，连接 AN 。

① 当以点 A 、 N 、 C 为顶点的三角形是等腰三角形时，请直接写出此时点 N 的坐标；

② 过点 N 作 $NM \parallel AC$ ，交 AB 于点 M ，求 $\triangle AMN$ 面积的取值范围。



备用图

试题解析

如图,已知二次函数 $y = ax^2 + \frac{3}{2}x + c$ 的图象与 y 轴交于点 $A(0,4)$,与 x 轴交于点 B 、 C ,点 C 坐标为 $(8,0)$. 连接 AB 、 AC .

(1) 请直接写出二次函数 $y = ax^2 + \frac{3}{2}x + c$ 的表达式;

解: (1) 此二次函数 $y = ax^2 + \frac{3}{2}x + c$ 的表达式是 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$;

(2) 若点 N 在线段 BC 上运动 (不与点 B 、 C 重合), 连接 AN .

① 当以点 A 、 N 、 C 为顶点的三角形是等腰三角形时, 请直接写出此时点 N 的坐标;

【分析】① 根据题意可分为两种情况, 一种情况是 $AN = CN$, 一种情况是 $CA = CN$, 然后根据已知可以分别求出两种情况下点 N 的坐标;

(2) ① N 点的坐标为 $(3,0)$ 或 $(8-4\sqrt{5},0)$;

理由: 设点 N 的坐标为 $(n,0)$,

\because 点 $A(0,4)$, 点 C 坐标为 $(8,0)$,

$\therefore OA = 4, OC = 8$,

当 $AN = CN$ 时, $\sqrt{4^2 + n^2} = 8 - n$, 得 $n = 3$,

当 $CA = CN$ 时, $\sqrt{4^2 + 8^2} = 8 - n$, 得 $n = 8 - 4\sqrt{5}$,

故点 N 的坐标为 $(3,0)$ 或 $(8-4\sqrt{5},0)$;

② 过点 N 作 $NM \parallel AC$, 交 AB 于点 M , 求 $\triangle AMN$ 面积的取值范围.

【分析】② 由题意可以作 $MD \perp x$ 轴于点 D , 然后根据三角形相似, 可以求得相应的边的长度, 从而可以求得 $\triangle AMN$ 面积的取值范围.

② 设点 N 的坐标为 $(n,0)$, 过点 M 作 $MD \perp x$ 轴于点 D , 如图所示,

$$\because y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4,$$

$$\therefore y = 0 \text{ 时, 得 } x_1 = -2, x_2 = 8,$$

即点 B 的坐标为 $(-2,0)$, 则 $BN = n + 2$,

$\because MD \perp x$ 轴, $AO \perp x$ 轴,

$\therefore \triangle BMD \sim \triangle BAO$,

$$\therefore \frac{BM}{BA} = \frac{MD}{AO},$$

$\because MN \parallel AC$

$$\therefore \frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC},$$

$$\therefore \frac{MD}{AO} = \frac{BN}{BC},$$

$\because OA = 4, BC = 10, BN = n + 2$,

$$\therefore MD = \frac{2}{5}(n + 2),$$

$$\therefore S_{\triangle AMN} = S_{\triangle ABN} - S_{\triangle BMN}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times (n + 2) - \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}(n + 2)(n + 2)$$

$$= -\frac{1}{5}n^2 + \frac{6}{5}n + \frac{16}{5}$$

$$= -\frac{1}{5}(n - 3)^2 + 5,$$

\therefore 当 $n = 3$ 时, $S_{\triangle AMN}$ 取得最大值 5,

即 $\triangle AMN$ 面积的取值范围是 $0 < S_{\triangle AMN} \leq 5$.

