

2024 秋季初三数学每日一题打卡 004

004 试题来源:2023 秋季姑苏区校级期中

对于一个函数,如果它的自变量 x 与函数值 y 满足:当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $-1 \leq y \leq 1$,则称这个函数为“闭函数”. 例如: $y = x$, $y = -x$ 均是“闭函数”. 已知 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 是“闭函数”,且抛物线经过点 $A(1, -1)$ 和点 $B(-1, 1)$,则 a 的取值范围是 _____.

试题解析:

对于一个函数,如果它的自变量 x 与函数值 y 满足:当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $-1 \leq y \leq 1$,则称这个函数为“闭函数”. 例如: $y=x$, $y=-x$ 均是“闭函数”. 已知 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$) 是“闭函数”,且抛物线经过点 $A(1, -1)$ 和点 $B(-1, 1)$,则 a 的取值范围是 $0 < a \leq \frac{1}{2}$.

【分析】先由抛物线经过 $(1, -1)$, $(-1, 1)$ 得出 $y=ax^2-x-a$,进而求出抛物线对称轴为直线 $x=\frac{1}{2a}$, 分类讨论 $\frac{1}{2a} \geq 1$ 与 $0 < \frac{1}{2a} < 1$ 两种情况的函数最值,进而求解.

【解答】解:把 $(1, -1)$, $(-1, 1)$ 代入 $y=ax^2+bx+c$ 得 $\begin{cases} a+b+c=-1 \text{ ①} \\ a-b+c=1 \text{ ②} \end{cases}$,

由①+②得 $a+c=0$,①-②得 $b=-1$,

$\therefore y=ax^2-x-a$, \therefore 抛物线对称轴为直线 $x=\frac{1}{2a}$,

$\because a>0$, \therefore 抛物线开口向上,

当 $\frac{1}{2a} \geq 1$, 即 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $x=1$ 时 y 取最小值为 $-x=-1$,

$x=-1$ 时, y 取最大值为 $y=1$,

当 $0 < \frac{1}{2a} < 1$ 时, $x=\frac{1}{2a}$ 时 y 取最小值 $a(\frac{1}{2a})^2 - \frac{1}{2a} - a = -1$,

解得 $a=\frac{1}{2}$,

\therefore 抛物线对称轴为直线 $x=1$,

当 $x=-1$ 时, y 取最大值为 1 满足题意.

故答案为: $0 < a \leq \frac{1}{2}$.

【点评】本题考查求二次函数最值问题,解题关键是掌握二次函数图象的性质,通过分类讨论求解.