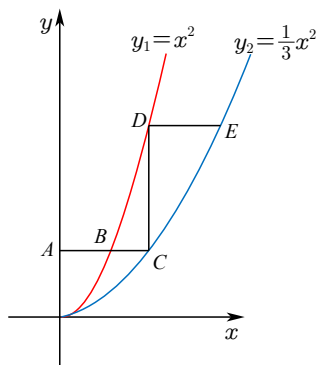


2024 秋季初三数学每日一题打卡 005

(1) 若抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴只有一个交点, 且过点 $A(m, n)$, $B(m+6, n)$, 则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

试题来源: 2023 秋季姑苏区校级期中改编题

(2) 如图, 平行于 x 轴的直线 AC 分别交函数 $y_1 = x^2 (x \geq 0)$ 与 $y_2 = \frac{x^2}{3} (x \geq 0)$ 的图象于 B 、 C 两点, 过点 C 作 y 轴的平行线交 y_1 的图象于点 D , 直线 $DE \parallel AC$, 交 y_2 的图象于点 E , 则 $\frac{DE}{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$.



试题解析:

(1) 若抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴只有一个交点, 且过点 $A(m, n)$, $B(m+6, n)$, 则 $n = \underline{9}$.

【考察】考察二次函数对称性.

【解答】解: 法一: \because 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴只有一个交点, 且过点 $A(m, n)$, $B(m+6, n)$,

\therefore 该抛物线的对称轴是: $x = m+3$, \therefore 设抛物线解析式为 $y = (x-m-3)^2$,

把 $A(m, n)$ 代入, 得 $n = (m-m-3)^2$, 解得 $n = 9$. 故答案为: 9.

法二: 还可利用对称点式: \because 过点 $A(m, n)$, $B(m+6, n)$,

\therefore 抛物线可设为 $y = (x-m)(x-m-6) + n = x^2 - (2m+6)x + m(m+6) + n$

\because 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴只有一个交点,

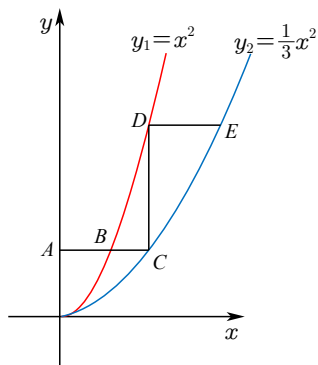
$\therefore (2m+6)^2 - 4m(m+6) - 4n = 0$, 解得 $n = 9$.

最强王者法三: 既然要求 n , 说明答案与 m 取值无关, m 取 -3 , 则 $A(-3, n)$, $B(3, n)$

\therefore 抛物线可设为 $y = (x+3)(x-3) + n = x^2 - 9 + n$

\because 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴只有一个交点, $\therefore n = 9$.

(2) 如图, 平行于 x 轴的直线 AC 分别交函数 $y_1 = x^2 (x \geq 0)$ 与 $y_2 = \frac{x^2}{3} (x \geq 0)$ 的图象于 B 、 C 两点, 过点 C 作 y 轴的平行线交 y_1 的图象于点 D , 直线 $DE \parallel AC$, 交 y_2 的图象于点 E , 则 $\frac{DE}{AB} = \underline{3 - \sqrt{3}}$.



【考察】代数推导, 妥妥的特值法的题目.

【解答】解: 设 A 点坐标为 $(0, a)$, $(a > 0)$, 则 $x^2 = a$, 解得 $x = \sqrt{a}$,

\therefore 点 $B(\sqrt{a}, a)$,

$\frac{x^2}{3} = a$, 则 $x = \sqrt{3a}$, \therefore 点 $C(\sqrt{3a}, a)$,

$\because CD \parallel y$ 轴, \therefore 点 D 的横坐标与点 C 的横坐标相同, 为 $\sqrt{3a}$,

$\therefore y_1 = (\sqrt{3a})^2 = 3a$, \therefore 点 D 的坐标为 $(\sqrt{3a}, 3a)$,

$\because DE \parallel AC$, \therefore 点 E 的纵坐标为 $3a$, $\therefore \frac{x^2}{3} = 3a$,

$\therefore x = 3\sqrt{a}$, \therefore 点 E 的坐标为 $(3\sqrt{a}, 3a)$,

$\therefore DE = 3\sqrt{a} - \sqrt{3a}$, $\frac{DE}{AB} = \frac{3\sqrt{a} - \sqrt{3a}}{\sqrt{a}} = 3 - \sqrt{3}$.

故答案为: $3 - \sqrt{3}$.

【点评】本题是二次函数综合题型, 主要利用了二次函数图象上点的坐标特征, 根据平行于 x 轴的点的纵坐标相同, 平行于 y 轴的点的横坐标相同, 求出用点 A 的纵坐标表示出各点的坐标是解题的关键.