

2024 秋季初三数学每日一题打卡 008

008 试题来源：2023 秋南通海安中学月考第 25 题

在平面直角坐标系中，设函数 $y = (x - a)(x - a - 5) + 4$ ，其中 a 为常数且 $a \neq 0$ 。

- (1) 若函数的图象经过点 $(3, 4)$ ，求函数表达式。
- (2) 若函数的图象同时经过点 (b, m) ， $(4 - b, m)$ ，求 a 的值。
- (3) 已知点 $(1, y_1)$ 和 $(2, y_2)$ 在函数的图象上，且 $y_1 < y_2$ ，求 a 的取值范围。

试题解析

在平面直角坐标系中,设函数 $y = (x-a)(x-a-5) + 4$, 其中 a 为常数且 $a \neq 0$.

(1) 若函数的图象经过点 $(3,4)$, 求函数表达式.

(2) 若函数的图象同时经过点 (b,m) , $(4-b,m)$, 求 a 的值.

(3) 已知点 $(1,y_1)$ 和 $(2,y_2)$ 在函数的图象上, 且 $y_1 < y_2$, 求 a 的取值范围.

【解答】解: (1) 函数 y_1 的图象经过点 $(3,4)$, 得

$$4 = (3-a)(3-a-5) + 4,$$

$$\text{解得 } a_1 = -2, a_2 = 3,$$

当 $a_1 = -2$ 时, 函数 y 的表达式 $y = (x+2)(x+2-5) + 4$, 化简, 得 $y = x^2 - x - 2$;

当 $a_1 = 3$ 时, 函数 y 的表达式 $y = (x-3)(x-3-5) + 4$, 化简得 $y = x^2 - 11x + 28$,

综上所述: 函数 y 的表达式 $y = x^2 - x - 2$ 或 $y = x^2 - 11x + 28$;

$$(2) \because y = (x-a)(x-a-5) + 4 = x^2 - (2a+5)x + a^2 + 5a + 4,$$

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为直线 } x = -\frac{-(2a+5)}{2} = \frac{2a+5}{2},$$

\because 函数的图象同时经过点 (b,m) , $(4-b,m)$,

$$\therefore \frac{2a+5}{2} = \frac{b+4-b}{2},$$

$$\text{解得: } a = -\frac{1}{2};$$

$$(3) \text{ 由 (2) 知对称轴为: } x = \frac{2a+5}{2},$$

\therefore 点 $(1,y_1)$ 和 $(2,y_2)$ 在函数的图象上, 且 $y_1 < y_2$,

\therefore 分为三种情况:

① 当 $\frac{2a+5}{2} \leq 1$, 即 $a \leq -\frac{3}{2}$ 时, 函数在 $1 \leq x \leq 2$ 时, y 随 x 的增大而增大, 此时, $y_1 < y_2$, 符合题意;

② 当 $1 < \frac{2a+5}{2} < 2$, 即 $-\frac{3}{2} < a < -\frac{1}{2}$ 时, 若 $y_1 < y_2$, 则 $\frac{2a+5}{2} - 1 < 2 - \frac{2a+5}{2}$, 解得 $a < -1$,

$$\therefore -\frac{3}{2} < a < -1;$$

③ 当 $\frac{2a+5}{2} \geq 2$, 即 $a > -\frac{1}{2}$ 时, 函数在 $1 \leq x \leq 2$ 时, y 随 x 的增大而减小, 此时, $y_1 > y_2$, 不符合题意;

综上所述: a 的取值范围 $a < -1$.

$$\text{解法二: } \because y_2 = (2-a)(2-a-5) + 4 = (2-a)(-3-a) + 4,$$

$$y_1 = (1-a)(1-a-5) + 4 = (1-a)(-4-a) + 4,$$

$$\text{又 } \because y_1 < y_2,$$

$$\therefore y_2 - y_1 = (2-a)(-3-a) + 4 - (1-a)(-4-a) - 4 = -6 + a + a^2 + 4 - 3a - a^2 = -2 - 2a > 0,$$

$$\therefore -2a > 2,$$

$$\therefore a < -1.$$