2024秋季初二数学每日一题打卡010

010试题来源：2023秋南京鼓楼区校级期中第24题

新定义：若一个凸四边形的一条对角线把该四边形分成两个等腰三角形，那么称这个凸四边形为“等腰四边形”，这条对角线称为“界线”.

(1) 如图1，四边形$ABCD$是“等腰四边形”，BD为“界线”，若$\angle BAD=120^{\circ}$，$\angle BCD=150^{\circ}$，则$\angle ABC=$________$^{\circ}$；

(2) 如图2，四边形$ABCD$中，$AB=AD$，$BC^2=2AB^2$，$\angle A=60^{\circ}$，$\angle D=150^{\circ}$，试说明四边形$ABCD$是“等腰四边形”；

(3) 若在“等腰四边形” $ABCD$中，$AB=BC=CD$，$\angle ABC=90^{\circ}$，且BD为“界线”，请你画出满足条件的图形，并直接写出$\angle ADC$的度数.

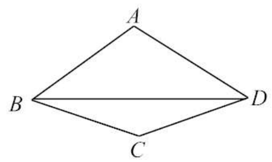

图1

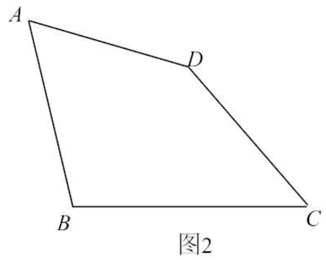

图2

试题解析

(1) 如图 1，四边形 $ABCD$ 是"等腰四边形"，BD 为"界线"，若 $\angle BAD=120^\circ$，$\angle BCD=150^\circ$，则 $\angle ABC=$ ___45___ $^\circ$；

(1) 解：如图 1，∵ 四边形 $ABCD$ 是"等腰四边形"，BD 为"界线"，∴ $AB=AD$，$CB=CD$，

∵ $\angle BAD=120^\circ$，$\angle BCD=150^\circ$，∴ $\angle ABD=\angle ADB=\frac{1}{2}\times(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$，

$\angle CBD=\angle CDB=\frac{1}{2}\times(180^\circ-150^\circ)=15^\circ$，∴ $\angle ABC=\angle ABD+\angle CBD=30^\circ+15^\circ=45^\circ$，

(2) 如图 2，四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$BC^2=2AB^2$，$\angle A=60^\circ$，$\angle D=150^\circ$，试说明四边形 $ABCD$ 是"等腰四边形"；

(2) 证明：如图 2，连接 BD，∵ $AB=AD$，$\angle A=60^\circ$，∴ ΔABD 是等边三角形，

∴ $\angle ADB=60^\circ$，$AB=BD$，∵ $\angle ADC=150^\circ$，∴ $\angle BDC=\angle ADC-\angle ADB=150^\circ-60^\circ=90^\circ$，

∵ $BC=\sqrt{2}AB$，∴ $BC=\sqrt{2}BD$，∴ $CD=\sqrt{BC^2-BD^2}=\sqrt{(\sqrt{2}BD)^2-BD^2}=BD$，

∴ $AB=AD$，$CD=BD$，∴ 四边形 $ABCD$ 是"等腰四边形".

(3) 若在"等腰四边形" $ABCD$ 中，$AB=BC=CD$，$\angle ABC=90^\circ$，且 BD 为"界线"，请你画出满足条件的图形，并直接写出 $\angle ADC$ 的度数.

【解答】(3) 解：如图 3，$AB=AD$，

根据题意得 $AB=BC=CD$，$\angle ABC=90^\circ$，

∵ $CB=CD$，$BD=BD$，∴ $\Delta ABD\cong\Delta CBD(SSS)$，

∴ $\angle ABD=\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC=45^\circ$，

∴ $\angle ADB=\angle ABD=45^\circ$，$\angle CDB=\angle CBD=45^\circ$，

∴ $\angle ADC=\angle ADB+\angle CDB=45^\circ+45^\circ=90^\circ$；

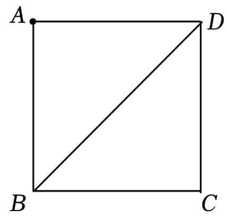

图3

如图 4，$AB=DB$，∵ $AB=BC=CD$，

∴ $DB=BC=CD$，∴ $\angle CBD=\angle BDC=60^\circ$，

∴ $\angle ABD=\angle ABC-\angle CBD=90^\circ-60^\circ=30^\circ$，

∴ $\angle BDA=\angle BAD=\frac{1}{2}\times(180^\circ-30^\circ)=75^\circ$，

∴ $\angle ADC=\angle BDC+\angle BDA=60^\circ+75^\circ=135^\circ$；

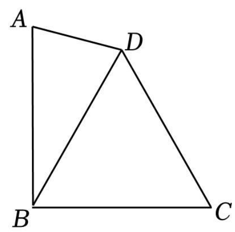

图4

如图 5，$AD=BD$，设 $AB=BC=CD=m$，

作 $DE\perp AB$ 于点 E，作点 C 关于直线 DE 的对称点 F，连接 CF 交 DE 于点 G，连接 DF，

∴ $AE=BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}m$，$DE$ 垂直平分 CF，∴ $FD=CD=m$，

∵ $\angle BED=\angle EBC=90^\circ$，∴ $\angle BED+\angle EBC=180^\circ$，∴ $BC\parallel ED$，

∵ $BE\perp ED$，$CG\perp ED$，∴ $CG=BE=\frac{1}{2}m$，

∴ $FG=CG=\frac{1}{2}m$，∴ $CF=CG+FG=\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}m=m$，

∴ $FD=CD=CF$，∴ $\angle CDF=60^\circ$，

∴ $\angle EDC=\frac{1}{2}\angle CDF=30^\circ$，

∵ $\angle BDE=\angle CBD$，$\angle CDB=\angle CBD$，

∴ $\angle BDE=\angle CDB=\frac{1}{2}\angle EDC=15^\circ$，

∴ $\angle ADE=\angle BDE=15^\circ$，

∴ $\angle ADC=\angle ADE+\angle BDE+\angle CDB=15^\circ+15^\circ+15^\circ=45^\circ$，

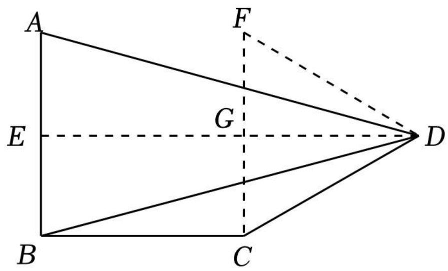

图5

综上所述，$\angle ADC$ 的度数为 90° 或 135° 或 45°.