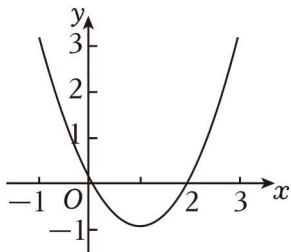


2024 年初三数学期中考试复习冲刺练习 (1)

参考答案与解析

1. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与 x 轴交于点 $(x_1, 0)$, $(2, 0)$, 其中 $0 < x_1 < 1$, 下列四个结论: ① $abc < 0$; ② $a + b + c > 0$; ③ $2b + 3c < 0$; ④ 不等式 $ax^2 + bx + c < -\frac{c}{2}x + c$ 的解集为 $0 < x < 2$. 其中正确结论的是

()



A. ①②

B. ②③

C. ①③④

D. ①④

【解析】解: 由题意可得, $a > 0$, $c > 0$, $-\frac{b}{2a} > 0$,

$$\therefore b < 0,$$

$\therefore abc < 0$, 故结论①正确, 符合题意;

由图可知, 当 $x = 1$ 时, $y < 0$,

$$\therefore a + b + c < 0,$$

故结论②不正确, 不符合题意; 将 $(2, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$,

$$\text{得 } 4a + 2b + c = 0,$$

$$\therefore b = -2a - \frac{1}{2}c, a = -\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}c,$$

$$\therefore a + b + c < 0,$$

$$\therefore a - 2a - \frac{1}{2}c + c < 0,$$

$$\therefore 2a - c > 0,$$

$$\therefore 2\left(-\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}c\right) - c > 0,$$

$$\therefore -b - \frac{3}{2}c > 0,$$

即 $2b + 3c < 0$, 故结论③正确, 符合题意;

$$\text{设 } y_1 = ax^2 + bx + c, y_2 = -\frac{c}{2}x + c,$$

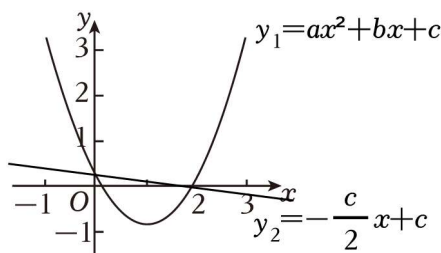
可知 $y_1 = ax^2 + bx + c$ 与 $y_2 = -\frac{c}{2}x + c$ 的图象都过点 $(0, c)$, $(2, 0)$, 如图,

由图可知, $y_1 < y_2$ 时, $0 < x < 2$,

\therefore 不等式 $ax^2 + bx + c < -\frac{c}{2}x + c$ 的解集为 $0 < x < 2$, 故结论④正确, 符合题意.

综上所述, 正确结论的是①③④.

故选: C.



2. 如图是抛物线 $C: y = ax^2 + bx + c$ 的部分图象, 其顶点坐标为 $(1, n)$, 且与 x 轴的一个交点在点 $(3, 0)$, $(4, 0)$ 之间. 则下列结论: ① $abc < 0$; ② $4a - 2b + c < 0$; ③ 一元二次方程 $ax^2 + bx + c - 1 = n$ 有两个不相等的实数根; ④ 若抛物线 C 与正比例函数 $y = kx$ 交点的横坐标分别为 x_1 和 x_2 , 且 $x_1 < x_2 < 1$, 则 $k > n$, 其中正确的结论有 ①②④.

【解析】解: \because 抛物线开口向下,

$$\therefore a < 0,$$

∴ 对称轴直线 $x = -\frac{b}{2a} = 1$,

∴ $b = -2a > 0$,

∴ 抛物线交 y 的正半轴,

∴ $c > 0$,

∴ $abc < 0$, 所以①结论符合题意;

∴ 抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = 1$, 与

抛物线的一个交点在 3, 4 之间,

∴ 另一个交点在 -2, -1 之间,

∴ 当 $x = -2$ 时, $y < 0$,

∴ $4a - 2b + c < 0$, 故②符合题意;

∴ 抛物线的开口向下, 顶点坐标为 $(1, n)$,

∴ 函数最大值为 $y = n$,

∴ 直线 $y = 1 + n$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 没有交点,

∴ 方程 $ax^2 + bx + c = 1 + n$ 没有实数根,

∴ 一元二次方程 $ax^2 + bx + c - 1 = n$ 没有实数根; 故③不符合题意;

∴ 抛物线 C 与正比例函数 $y = kx$ 交点的横坐标分别为 x_1 和 x_2 , 且 $x_1 < x_2 < 1$,

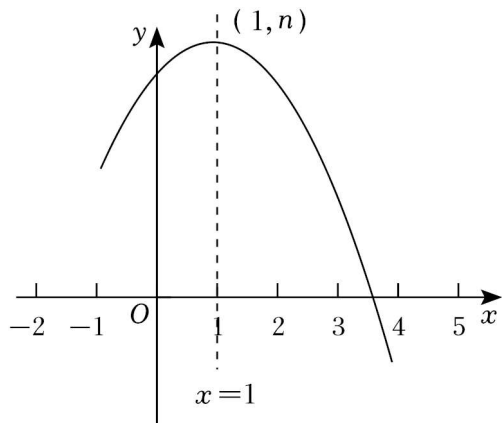
∴ 两个交点在对称轴的左侧,

此时函数 $y = kx$ 与对称轴的交点坐标为: $M(1, k)$,

∴ 顶点 $(1, n)$,

由图象可得: $k > n$; 故④符合题意;

故答案为: ①②④.



3. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a > 0$) 经过 $A(-3, 2)$ 、 $B(9, 2)$ 两点, 下列四个结论:

① 一元二次方程 $ax^2 + bx + c - 2 = 0$ 的根为 $x_1 = -3$, $x_2 = 9$;

② 若点 $C(5, y_1)$ 、 $D(\sqrt{3}, y_2)$ 在该抛物线上, 则 $y_1 < y_2$;

③ 对于任意实数 t , 总有 $at^2 - 9a \geq 3b - bt$;

④ 对于 a 的每一个确定值 ($a > 0$), 若一元二次方程 $ax^2 + bx + c = p$ (p 为常数) 有根, 则 $p \geq 2 - 36a$.

其中正确的结论是 ①③④. (填写序号)

【解析】解: ∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a > 0$) 经过 $A(-3, 2)$ 、 $B(9, 2)$ 两点,

∴ 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 2$ 的根为 $x_1 = -3$, $x_2 = 9$, 故①正确, 符合题意;

该抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{1}{2}(-3 + 9) = 3$, 函数图象开口向上,

若点 $C(5, y_1)$ 、 $D(\sqrt{3}, y_2)$ 在该抛物线上,

∴ 点 C 和对称轴的距离远, 故 $y_1 > y_2$, 故②错误, 不符合题意;

当 $x = 3$ 时, 函数取得最小值 $y = 4a + 2b + c$, 故对于任意实数 t ,

总有 $at^2 + bt + c \geq 9a + 3b + c$, 即对于任意实数 t , 总有 $at^2 + bt \geq 9a + 3b$, 故③正确;

∴ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a > 0$) 经过 $A(-3, 2)$ 、 $B(9, 2)$ 两点,

∴ $\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ 81a + 9b + c = 2 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} b = -6a \\ c = 2 - 27a \end{cases}$,

若一元二次方程 $ax^2 + bx + c = p$ (p 为常数) 有根, 则 $p \geq \frac{4ac - b^2}{4a}$, 即 $p \geq 2 - 36a$,

故④正确, 符合题意;

故答案为: ①③④.

4. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $0 < a < c$) 经过点 $(-1, 0)$, 下列结论:

① $b > 0$;

② 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根;

③当 $x < -1$ 时, y 随 x 的增大而减小;

④ m 为任意实数, 若 $c = 3a$, 则代数式 $am^2 + bm + c$ 的最小值是 $-a$.

其中正确的是 ①②④ (填写序号).

【解析】解: \because 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $(-1, 0)$,

$$\therefore a - b + c = 0.$$

$$\therefore b = a + c,$$

$\because a, b, c$ 是常数, $0 < a < c$,

$$\therefore b > 0. \Rightarrow \text{①的结论正确;}$$

令 $y = 0$, 则 $ax^2 + bx + c = 0$,

$$\therefore b = a + c,$$

$$\therefore ax^2 + (a + c)x + c = 0.$$

$$\therefore \Delta = (a + c)^2 - 4ac$$

$$= a^2 + 2ac + c^2 - 4ac$$

$$= a^2 - 2ac + c^2 = (a - c)^2,$$

又 $\because c > a > 0$,

$$\therefore \Delta > 0,$$

\therefore 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根. \Rightarrow ②的结论正确;

$$\therefore c > a > 0, b > 0,$$

\therefore 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的开口方向向上, 对称轴在 y 轴的左侧, 抛物线与 y 轴交于 y 轴的正半轴,

\therefore 当点 $(-1, 0)$ 在对称轴的左侧时, 当 $x < -1$ 时, y 随 x 的增大而减小,

当点 $(-1, 0)$ 在对称轴的右侧时, 当 $x < -1$ 时, y 随 x 的变化而变化是不确定的 \Rightarrow ③的说法不正确;

$$\therefore b = a + c, c = 3a,$$

$$\therefore b = 4a.$$

$$\therefore \text{代数式 } am^2 + bm + c$$

$$= am^2 + 4am + 3a = a(m + 2)^2 - a,$$

$$\therefore a > 0,$$

\therefore 当 $m = -2$ 时, 代数式 $am^2 + bm + c$ 有最小值为 $-a$. \Rightarrow ④说法正确.

综上, 正确的是: ①②④.

故答案为: ①②④.

5. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数) 的图象对称轴为直线 $x = 1$, 部分 x 与 y 对应值如表:

x	-2	0	3
y	m	-1	n

当 $m > 3$ 时, 下列结论中一定正确的是 ①③④. (填序号即可)

① $b < 0$; ② $abc < \frac{1}{2}$; ③ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c + 1$ 与 x 轴的交点横坐标分别为 0 和 2;

④ 当 $n \leq 2$ 时, $(m + 1)(n + 1)$ 的值始终不会超过 30.

【解析】解: \because 当 $x = 0$ 时, $y = -1$, 则 $-1 = 0 + 0 + c$, 即: $c = -1$,

又 \because 对称轴为直线 $x = 1$,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 1,$$

$$\therefore b = -2a,$$

$$\therefore y = ax^2 - 2ax - 1,$$

$$\therefore \text{当 } x = -2 \text{ 时, } y = 4a + 4a - 1 = 8a - 1 = m > 3,$$

$$\text{即有 } a > \frac{1}{2} > 0,$$

$\therefore b = -2a < 0$, 故①正确;

$\because c = -1$,

$\therefore abc = 2a^2 > \frac{1}{2}$, 故②错误;

$\because b = -2a < 0, c = -1, a > \frac{1}{2} > 0$,

$\therefore y = ax^2 + bx + c + 1 = ax^2 - 2ax = ax(x - 2)$,

即当 $ax^2 + bx + c + 1 = 0$ 时, 方程的解为 0 和 2,

即抛物线 $y = ax^2 + bx + c + 1$ 与 x 轴的交点横坐标分别为 0 或 2, 故③正确;

当 $x = -2$ 时, $y = 4a + 4a - 1 = 8a - 1 = m$,

当 $x = 3$ 时, $y = 9a - 6a - 1 = 3a - 1 = n \leq 2$, 即 $a \leq 1$,

则 $(m+1)(n+1) = (8a-1+1)(3a-1+1) = 24a^2$,

$\because 1 \geq a > \frac{1}{2} > 0$,

$\therefore (m+1)(n+1) = 24a^2 \leq 24$,

$\therefore (m+1)(n+1)$ 的值始终不会超过 30, 故④正确;

综上所述, 正确的是①③④,

故答案为: ①③④.

6. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上部分点的横坐标 x 和纵坐标 y 的对应值如表:

x	\cdots	0	2	3	\cdots
y	\cdots	-1	-1	m	\cdots

其中 $m > 0$, 下列四个结论:

① $a > 0, b < 0, c = -1$; ② $3a > 1$; ③ 若点 $A(s, t)$ 在抛物线上, 且 $-1 < t < m$, 则 $2 < s < 3$;

④ 若点 P 为抛物线上一动点, 过点 P 作 $PQ \perp y$ 轴, 垂足为 Q , 当点 P 从 $(0, -1)$ 运动到 $(3, m)$ 时, 则点 Q 运动的路径长为 $\frac{5}{3}m + \frac{5}{3}$.

其中正确的是 ①②④ (填写序号).

【解析】解: 如图, 由题意, 观察图象可知, $a > 0, c = -1$,

\therefore 对称轴是直线 $x = -\frac{b}{2a} = 1$,

$\therefore b = -2a < 0$, 故①正确,

\therefore 抛物线的解析式为 $y = ax^2 - 2ax - 1$,

$\therefore x = -1$ 时, $y > 0$,

$\therefore 3a - 1 > 0$,

$\therefore 3a > 1$, 故②正确,

若点 $A(s, t)$ 在抛物线上, 且 $-1 < t < m$,

则 $2 < s < 3$ 或 $-1 < s < 0$, 故③错误,

若点 P 为抛物线上一动点, 过点 P 作 $PQ \perp y$ 轴, 垂足为 Q , 当点 P 从 $(0, -1)$ 运动到 $(3, m)$ 时,

$\therefore x = 3$ 时, $y = m$,

$\therefore m = 3a - 1$,

$\therefore a = \frac{m+1}{3}$,

$\therefore y = a(x-1)^2 - 1 - a$,

\therefore 抛物线的顶点 $(1, \frac{-m-4}{3})$

则点 Q 运动的路径长为 $2(-1 - \frac{-m-4}{3}) + m + 1 = \frac{5}{3}m + \frac{5}{3}$, 故④正确,

故答案为: ①②④.

