

## 2024 初二数学期中每日一练 003

1. 下列说法正确的是 ( )

A. 1 的平方根是 1

B.  $\sqrt{81}$  的算术平方根是 3

C.  $(-6)^2$  没有平方根

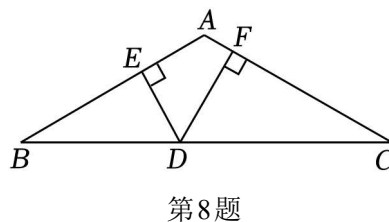
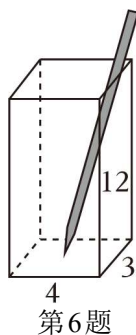
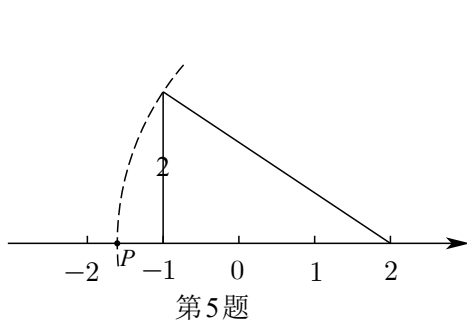
D. 在数轴上不存在表示  $-\sqrt{2}$  的点

2. 已知式子  $\frac{1}{\sqrt{x+3}}$  有意义, 则  $x$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

3. 如果一个直角三角形的两条边长分别为 8 和 15, 那么这个三角形的第三边长为 \_\_\_\_\_.

4. 等腰三角形一腰上的高与另一腰的夹角是  $46^\circ$ , 则它的底角度数是 \_\_\_\_\_.

5. 如图, 在数轴上点  $P$  表示的实数是 \_\_\_\_\_.



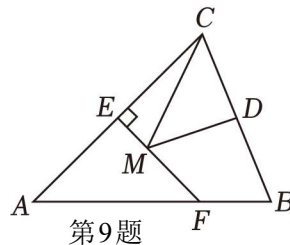
6. 如图, 一支长为 15cm 的铅笔放在长方体笔筒中, 已知笔筒的三边长度依次为 3cm, 4cm, 12cm, 那么这根铅笔露在笔筒外的部分长度  $x$  的范围是 ( )

A.  $2\text{cm} \leq x \leq 5\text{cm}$     B.  $2\text{cm} \leq x \leq 3\text{cm}$     C.  $4\text{cm} \leq x \leq 5\text{cm}$     D.  $9\text{cm} \leq x \leq 12\text{cm}$

7. 已知  $a = \sqrt{2023} - \sqrt{2022}$ ,  $b = \sqrt{2022} - \sqrt{2021}$ ,  $c = \sqrt{2021} - \sqrt{2020}$ , 那么  $a, b, c$  的大小关系是 \_\_\_\_\_.

8. 如图, 在等腰三角形  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ ,  $\angle A = 120^\circ$ , 点  $D$  为线段  $BC$  上一点,  $DE \perp AB$ ,  $DF \perp AC$ , 若  $BC = 8$ , 则  $DE + DF$  的值为 \_\_\_\_\_.

9. 如图, 等腰  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ ,  $BC = 8$ , 面积为 24. 点  $E$  在边  $AC$  上, 点  $F$  在边  $AB$  上, 且  $EF$  垂直平分  $AC$ , 点  $D$  是边  $BC$  的中点, 点  $M$  在线段  $EF$  上移动, 连接  $CM$ ,  $DM$ , 则  $\triangle CDM$  的周长的最小值为 \_\_\_\_\_.



10. 计算:

(1)  $\sqrt{18} - \sqrt{50} + 4\sqrt{\frac{1}{2}}$ ;

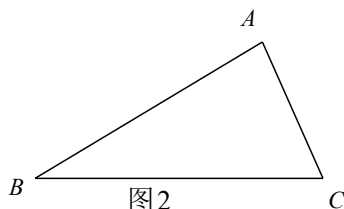
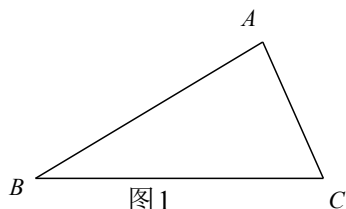
(2)  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - 1)^2$ .



11. 如图, 已知  $\triangle ABC$  ( $AC < AB < BC$ ), 请用无刻度的直尺和圆规, 完成下列作图 (不写作法, 保留作图痕迹).

(1) 如图 1, 在  $AB$  边上寻找一点  $M$ , 使  $\angle AMC = \angle ACB$ ;

(2) 如图 2, 在  $BC$  边上寻找一点  $N$ , 使得  $NA + NB = BC$ .



12. 我们将奇异三角形定义为两边平方和等于第三边平方的 2 倍的三角形.

【感知】

(1) 根据“奇异三角形”的定义, 小红得出命题: “等边三角形一定是奇异三角形”, 请判断小红提出的命题是否正确, 并填空 \_\_\_\_\_ (填“正确”或“不正确”);

(2) 若某三角形的三边长分别是  $3$ 、 $\sqrt{11}$ 、 $\sqrt{7}$ , 则  $\triangle ABC$  是奇异三角形吗? \_\_\_\_\_ (填“是”或“不是”);

【思考】

(1) 若  $Rt\triangle ABC$  是奇异三角形, 且其两边长分别为  $2$ 、 $2\sqrt{3}$ , 则第三边的边长为 \_\_\_\_\_; 且此直角三角形的三边之比为 \_\_\_\_\_ (请按从小到大排列);

(2) 如图 1, 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ , 且  $b > a$ , 若  $Rt\triangle ABC$  是奇异三角形, 求  $a:b:c$ ;

【运用】如图 2, 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ , 以  $AB$  为斜边作等腰直角  $\triangle ABD$ , 点  $E$  是  $AC$  下方的一点, 且满足  $AE = AD$ ,  $CE = CB$ .

(1) 求证:  $\triangle ACE$  是奇异三角形;

(2) 当  $\triangle ACE$  是直角三角形时, 记  $\triangle ABC$  的面积为  $S_1$ , 四边形  $ACBD$  的面积为  $S_2$ ,

则  $\frac{S_1}{S_2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

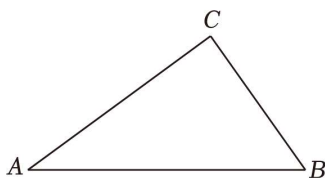


图1

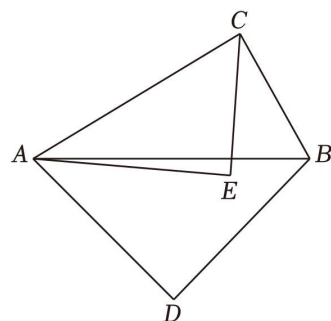


图2



## 2024 初二数学期中每日一练 003 参考答案

1. 下列说法正确的是 ( )

A. 1 的平方根是 1

B.  $\sqrt{81}$  的算术平方根是 3

C.  $(-6)^2$  没有平方根

D. 在数轴上不存在表示  $-\sqrt{2}$  的点

【答案】选项 A: 1 的平方根是  $\pm 1$ , 不符合题意;

选项 B:  $\sqrt{81} = 9$ , 9 的算术平方根是 3, 符合题意;

选项 C:  $(-6)^2 = 36$ , 36 平方根是  $\pm 6$ , 不符合题意;

选项 D: 在数轴可以表示无理数, 不符合题意;

故选: B.

【点评】本题考查了平方根和数轴的问题, 关键知道一个正数的平方根有两个, 一个正数的平方根有一个.

2. 已知式子  $\frac{1}{\sqrt{x+3}}$  有意义, 则  $x$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

【答案】由题意得:  $x+3 > 0$ , 解得:  $x > -3$ , 故答案为:  $x > -3$ .

【点评】本题考查的知识点为: 分式有意义, 分母不为 0; 二次根式的被开方数是非负数.

3. 如果一个直角三角形的两条边长分别为 8 和 15, 那么这个三角形的第三边长为 \_\_\_\_\_.

【答案】当 8 和 15 是两条直角边时, 第三边  $= \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ ,

当 8 和 15 分别是一斜边和一直角边时, 第三边  $= \sqrt{15^2 - 8^2} = \sqrt{161}$ ,

所以第三边可能为  $\sqrt{161}$  或 17. 故答案为:  $\sqrt{161}$  或 17.

【点评】本题考查了勾股定理的知识, 题目中渗透着分类讨论的数学思想.

4. 等腰三角形一腰上的高与另一腰的夹角是  $46^\circ$ , 则它的底角度数是 \_\_\_\_\_.

【答案】分两种情况讨论:

①若  $\angle A < 90^\circ$ , 如图 1 所示:

$\because BD \perp AC, \therefore \angle A + \angle ABD = 90^\circ$ ,

$\because \angle ABD = 46^\circ, \therefore \angle A = 90^\circ - 46^\circ = 44^\circ$ ,

$\because AB = AC, \therefore \angle ABC = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - 44^\circ) = 68^\circ$ ;

②若  $\angle A > 90^\circ$ , 如图 2 所示:

同①可得:  $\angle DAB = 90^\circ - 46^\circ = 44^\circ$ ,

$\therefore \angle BAC = 180^\circ - 44^\circ = 136^\circ$ ,

$\because AB = AC, \therefore \angle ABC = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - 136^\circ) = 22^\circ$ ;

综上所述: 等腰三角形底角的度数为  $68^\circ$  或  $22^\circ$ .

故答案为:  $68^\circ$  或  $22^\circ$ .

【点评】本题考查了等腰三角形的性质以及余角和邻补角的定义;

注意分类讨论方法的运用, 避免漏解.

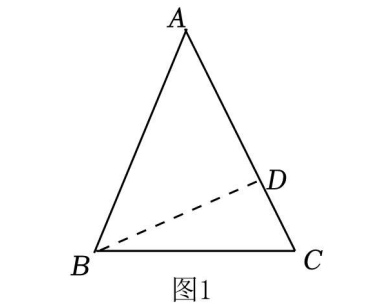


图1

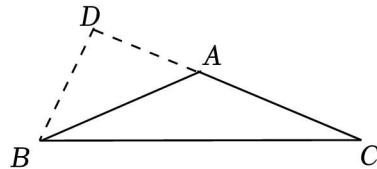
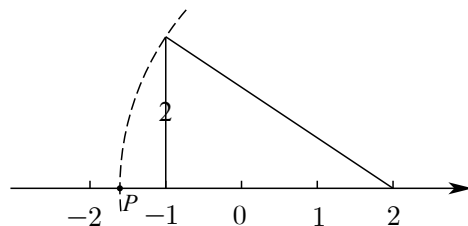


图2

5. 如图, 在数轴上点 P 表示的实数是  $2 - \sqrt{13}$ .

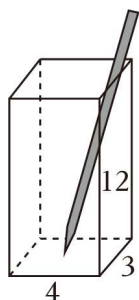
【答案】根据勾股定理得  $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$ ,

$\therefore$  点 P 表示的实数为  $2 - \sqrt{13}$ .





6. 如图,一支长为 15cm 的铅笔放在长方体笔筒中,已知笔筒的三边长度依次为 3cm, 4cm, 12cm, 那么这根铅笔露在笔筒外的部分长度  $x$  的范围是 ( )



- A.  $2\text{cm} \leq x \leq 5\text{cm}$     B.  $2\text{cm} \leq x \leq 3\text{cm}$     C.  $4\text{cm} \leq x \leq 5\text{cm}$     D.  $9\text{cm} \leq x \leq 12\text{cm}$

**【答案】**由题意知,当铅笔垂直于笔筒底部放置时,铅笔露在笔筒外的部分长度  $x$  最大,最大值为  $15 - 12 = 3(\text{cm})$ ,

由勾股定理得,长方体的对角线长为  $\sqrt{(4+3)^2 + 12^2} = 13$ ,

当铅笔沿着长方体的对角线放置时,铅笔露在笔筒外的部分长度  $x$  最小,最小值为  $15 - 13 = 2(\text{cm})$ ,

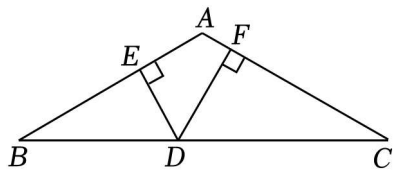
$\therefore$  这根铅笔露在笔筒外的部分长度  $x$  的范围是  $2\text{cm} \leq x \leq 3\text{cm}$ , 故选: B.

**【点评】**本题考查了勾股定理的应用. 解题的关键在于对知识的熟练掌握.

7. 已知  $a = \sqrt{2023} - \sqrt{2022}$ ,  $b = \sqrt{2022} - \sqrt{2021}$ ,  $c = \sqrt{2021} - \sqrt{2020}$ , 那么  $a, b, c$  的大小关系是  $a < b < c$ .

**【答案】** $\because \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{2023} - \sqrt{2022}} = \sqrt{2023} + \sqrt{2022}$ ,  $\frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{2022} - \sqrt{2021}} = \sqrt{2022} + \sqrt{2021}$ ,  
 $\frac{1}{c} = \frac{1}{\sqrt{2021} - \sqrt{2020}} = \sqrt{2021} + \sqrt{2020}$ ,  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$ ,  $\therefore a < b < c$ .

8. 如图,在等腰三角形  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ ,  $\angle A = 120^\circ$ , 点  $D$  为线段  $BC$  上一点,  $DE \perp AB$ ,  $DF \perp AC$ , 若  $BC = 8$ , 则  $DE + DF$  的值为 4.



**【答案】** $\because AB = AC$ ,  $\angle A = 120^\circ$ ,  $\therefore \angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$ ,

$\because DE \perp AB$ ,  $DF \perp AC$ ,  $\therefore \triangle BED$  和  $\triangle CFD$  是直角三角形,

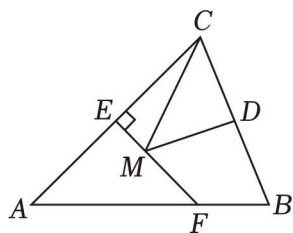
$\therefore DE = \frac{1}{2}BD$ ,  $DF = \frac{1}{2}CD$ ,  $\therefore DE + DF = \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}(BD + CD) = \frac{1}{2}BC = 4$ ,

故答案为: 4.

**【结论】**等腰三角形底边上任意一点到两腰的距离之和等于腰上的高.

9. 如图,等腰  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ ,  $BC = 8$ , 面积为 24. 点  $E$  在边  $AC$  上, 点  $F$  在边  $AB$  上, 且  $EF$  垂直平分  $AC$ , 点  $D$  是边  $BC$  的中点, 点  $M$  在线段  $EF$  上移动, 连接  $CM$ ,  $DM$ , 则  $\triangle CDM$  的周长的最小值为 \_\_\_\_\_.





【解析】连接  $AD$ ，由  $AB = AC$ ，点  $D$  是  $BC$  边的中点可得  $AD \perp BC$ ，再根据三角形的面积公式求出  $AD$  的长，再判断出点  $M$  在  $AD$  上时， $AM + CM$  最小，由此即可得出结论。

【答案】连接  $AD$ ， $AM$ ，

$\because AB = AC$ ，点  $D$  是  $BC$  边的中点，

$\therefore AD \perp BC$ ，

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \times 8 \times AD = 24$ ，

解得  $AD = 6$ ，

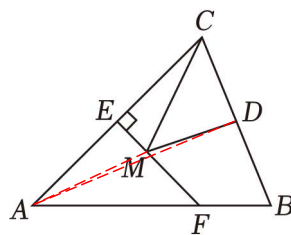
$\because EF$  是线段  $AC$  的垂直平分线， $\therefore AM = CM$ ，

当点  $M$  在  $AD$  上时， $CM + MD$  最小，最小值为  $AD$ ，

$\therefore \triangle CDM$  的周长最短  $= (CM + MD) + CD = AD + \frac{1}{2} BC = 6 + \frac{1}{2} \times 8 = 10$ 。

故答案为：10。

【点评】本题考查的是轴对称—最短路线问题，等腰三角形的性质，垂直平分线的性质，熟知等腰三角形三线合一的性质是解答此题的关键。



10. 计算：

$$(1) \sqrt{18} - \sqrt{50} + 4\sqrt{\frac{1}{2}};$$

$$(2) (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - 1)^2.$$

【答案】(1)  $\sqrt{18} - \sqrt{50} + 4\sqrt{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 0$ ;

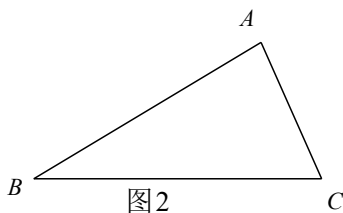
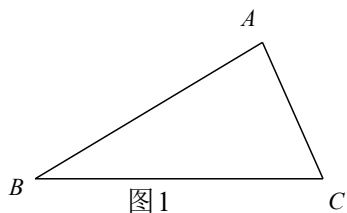
$$\begin{aligned} (2) & (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - 1)^2 \\ &= (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} + 1^2 \\ &= 3 - 2 + 5 - 2\sqrt{5} + 1 \\ &= 7 - 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

【点评】此题考查了二次根式的混合运算，熟练掌握二次根式的运算法则和乘法公式是解题的关键。

11. 如图，已知  $\triangle ABC$  ( $AC < AB < BC$ )，请用无刻度的直尺和圆规，完成下列作图 (不写作法，保留作图痕迹)。

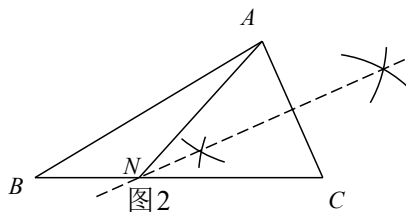
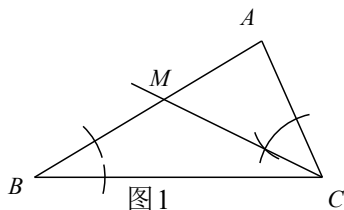
(1) 如图 1，在  $AB$  边上寻找一点  $M$ ，使  $\angle AMC = \angle ACB$ ；

(2) 如图 2，在  $BC$  边上寻找一点  $N$ ，使得  $NA + NB = BC$ 。





【答案】(1) 如图1, 点  $M$  为所作; (2) 如图2, 点  $N$  为所作.



【点评】本题考查了作图—复杂作图: 复杂作图是在五种基本作图的基础上进行作图, 一般是结合了几何图形的性质和基本作图方法. 解决此类题目的关键是熟悉基本几何图形的性质, 结合几何图形的基本性质把复杂作图拆解成基本作图, 逐步操作.

12. 我们将奇异三角形定义为两边平方和等于第三边平方的2倍的三角形.

【感知】

(1) 根据“奇异三角形”的定义, 小红得出命题: “等边三角形一定是奇异三角形”, 请判断小红提出的命题是否正确, 并填空 \_\_\_\_\_ (填“正确”或“不正确”);

(2) 若某三角形的三边长分别是  $3$ 、 $\sqrt{11}$ 、 $\sqrt{7}$ , 则  $\triangle ABC$  是奇异三角形吗? \_\_\_\_\_ (填“是”或“不是”);

【思考】

(1) 若  $Rt\triangle ABC$  是奇异三角形, 且其两边长分别为  $2$ 、 $2\sqrt{3}$ , 则第三边的边长为 \_\_\_\_\_; 且此直角三角形的三边之比为 \_\_\_\_\_ (请按从小到大排列);

(2) 如图1, 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ , 且  $b > a$ , 若  $Rt\triangle ABC$  是奇异三角形, 求  $a:b:c$ ;

【运用】如图2, 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ , 以  $AB$  为斜边作等腰直角  $\triangle ABD$ , 点  $E$  是  $AC$  下方的一点, 且满足  $AE = AD$ ,  $CE = CB$ .

(1) 求证:  $\triangle ACE$  是奇异三角形;

(2) 当  $\triangle ACE$  是直角三角形时, 记  $\triangle ABC$  的面积为  $S_1$ ,

四边形  $ACBD$  的面积为  $S_2$ , 则  $\frac{S_1}{S_2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

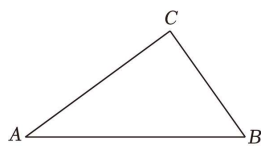


图1

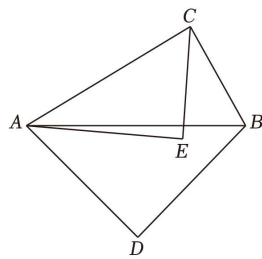


图2

【解析】【感知】(1) 根据“奇异三角形”的定义与等边三角形的性质, 求证即可;

(2) 根据奇异三角形的定义即可求解;

【思考】(1) 根据直角三角形、奇异三角形的性质, 分情况讨论即可得到第三边的边长, 进一步即可求解;

(2) 根据勾股定理与奇异三角形的性质, 可得  $a^2 + b^2 = c^2$  与  $a^2 + c^2 = 2b^2$ , 用  $a$  表示出  $b$  与  $c$ , 即可求得答案;

【运用】(1) 由勾股定理得  $AC^2 + BC^2 = AB^2$ ,  $AD^2 + BD^2 = AB^2$ , 再由  $AE = AD$ ,  $CB = CE$ , 可得  $AC^2 + CE^2 = 2AE^2$ , 据此即可得解;

(2) 利用【思考】(2) 中的结论  $AC:AE:CE = 1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ , 设  $CE = CB = a$ , 则  $AE = AD = BD$



$=\sqrt{2}a$ ,  $AC=\sqrt{3}a$ , 根据  $S_1=\frac{1}{2}AC\cdot BC$ ,  $S_2=S_1+S_{\triangle ABD}$  求解即可.

【答案】【感知】解: (1) 设等边三角形的一边为  $a$ , 则  $a^2+a^2=2a^2$ ,

$\therefore$  符合奇异三角形”的定义; 故答案为: 正确;

(2)  $\because (\sqrt{11})^2+(\sqrt{7})^2=18=2\times 3^2$ ,  $\therefore$  符合奇异三角形”的定义,

$\therefore$  三边长分别是  $3, \sqrt{11}, \sqrt{7}$  的  $\triangle ABC$  是奇异三角形, 故答案为: 是;

【思考】解: (1)  $\because 2^2=4$ ,  $(2\sqrt{3})^2=12$ ,

①当  $2, 2\sqrt{3}$  为三角形直角边时, 斜边  $=\sqrt{4+12}=4$ , 此时  $Rt\triangle ABC$  不是奇异三角形;

②当  $2\sqrt{3}$  为三角形斜边时, 另一直角边  $=\sqrt{12-4}=2\sqrt{2}$ ,

$\because 2^2+(2\sqrt{2})^2=2\times (2\sqrt{2})^2$ , 此时  $Rt\triangle ABC$  不是奇异三角形,  $\therefore$  第三边的边长为  $2\sqrt{2}$ ,

$\therefore$  此直角三角形的三边之比为  $2:2\sqrt{2}:2\sqrt{3}=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ , 故答案为:  $2\sqrt{2}, 1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ ;

(2)  $\because \angle ACB=90^\circ$ , 则  $a^2+b^2=c^2$  ①,

$\because Rt\triangle ABC$  是奇异三角形, 且  $b>a$ ,  $\therefore a^2+c^2=2b^2$  ②,

由①②得:  $b=\sqrt{2}a$ ,  $c=\sqrt{3}a$ ,  $\therefore a:b:c=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ ;

【运用】(1) 证明:  $\because \angle ACB=\angle ADB=90^\circ$ ,  $\therefore AC^2+BC^2=AB^2$ ,  $AD^2+BD^2=AB^2$ ,

$\therefore AD=BD$ ,  $\therefore 2AD^2=AB^2$ ,

$\because AE=AD$ ,  $CB=CE$ ,  $\therefore AC^2+CE^2=2AE^2$ ,  $\therefore \triangle ACE$  是奇异三角形;

(2) 解: 由【思考】(2) 得,  $Rt\triangle ACE$  是奇异三角形, 则  $CE:AE:AC=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ ,

设  $CE=CB=a$ , 则  $AE=AD=BD=\sqrt{2}a$ ,  $AC=\sqrt{3}a$ ,

$\therefore \triangle ABC$  的面积为  $S_1$ , 四边形  $ACBD$  的面积为  $S_2$ ,

$$\therefore S_1=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}a\cdot a=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2, S_2=S_1+S_{\triangle ABD}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2+\frac{1}{2}AD\cdot BD=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2+a^2=\frac{\sqrt{3}+2}{2}a^2,$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}{\frac{\sqrt{3}+2}{2}a^2}=2\sqrt{3}-3,$$

故答案为:  $2\sqrt{3}-3$ .

【点评】此题是四边形综合题, 考查了新定义的知识, 勾股定理以及三角形面积等知识. 解题的关键是理解题意, 抓住数形结合思想的应用.