

# 2024 年期中考试初三数学定心卷

## 参考答案与解析

1. A

【分析】根据二次函数  $y = -2(x+1)^2 - 4$  和二次函数的性质, 可以判断各个选项中的结论是否正确, 从而可以解答本题.

【详解】解:  $\because$  二次函数  $y = -2(x+1)^2 - 4$ ,

$\therefore a = -2$ , 该函数的图象开口向下, 故选项 A 正确;

对称轴是直线  $x = -1$ , 故选项 B 错误;

顶点坐标为  $(-1, -4)$ , 故选项 C 错误;

当  $x < -1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大, 故选项 D 错误;

故选: A.

【点睛】本题考查二次函数的性质, 解答本题的关键是明确题意, 利用二次函数的性质解答.

2. A

【分析】本题考查了求二次函数的函数值. 正确的计算是解题的关键.

分别将各个点坐标代入抛物线解析式, 计算求解, 然后比大小即可.

【详解】解: 将  $A(-2, y_1)$  代入  $y = -x^2 - 2x + 2$ , 得,  $y_1 = -(-2)^2 - 2 \times (-2) + 2 = 2$ ;

同理  $y_2 = -1$ ,  $y_3 = -6$ ,

$\therefore y_1 > y_2 > y_3$ ,

故选: A.

3. D

【分析】本题考查了二次函数的平移规律, 根据“左加右减, 上加下减”进行作答即可.

【详解】解:  $\because$  把抛物线  $y = (x+2)^2$  向下平移 2 个单位长度,

$\therefore y = (x+2)^2 - 2$

$\because$  再向右平移 1 个单位长度,

$\therefore y = (x+1)^2 - 2$

故选: D

4. A

【分析】由于  $y_1, y_2, y_3$  是抛物线上三个点的纵坐标, 所以根据抛物线开口向下, 在对称轴右边,  $y$  随  $x$  的增大而减小, 便可得出  $y_1, y_2, y_3$  的大小关系.

【详解】 $\because$  抛物线  $y = -x^2 - 4x + 5 = -(x+2)^2 + 9$ ,

$\therefore$  对称轴为  $x = -2$ ,

$\therefore$  在  $x = -2$  的右边  $y$  随  $x$  的增大而减小,

$\because$  点  $(-2, y_1), (3, y_2)$  与  $(4, y_3)$  为二次函数  $y = -x^2 - 4x + 5$  图象上的三点,

$\therefore y_3 < y_2 < y_1$ ,

故选: A.

【点睛】本题考查了二次函数图象的性质, 解题的关键掌握二次函数图象的性质.

5. C

【分析】把点  $(2, 0)$  代入即可求得  $a$  的值.

【详解】解:  $\because (2, 0)$  是二次函数  $y = x^2 - x - 2a$  图象上的一个点,

$\therefore 0 = 4 - 2 - 2a$ ,

$\therefore a = 1$ ,

故选:  $C$ .

【点睛】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征, 图象上点的坐标适合解析式是解题的关键.

6.  $B$

【分析】本题主要考查了抛物线与  $x$  轴的交点问题, 观察表中数据得到抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与  $x$  轴的一个交点在  $(1.1, 0)$  和点  $(1.2, 0)$  之间, 更靠近点  $(1.2, 0)$ , 然后根据抛物线与  $x$  轴的交点问题可得到方程  $ax^2 + bx + c = 0$  一个根的近似值. 掌握二次函数的图象与  $x$  轴的交点的横坐标与一元二次方程的根的关系, 是解题的关键.

【详解】解:  $\because x = 1.1$  时,  $y = ax^2 + bx + c = -0.49$ ;

$x = 1.2$  时,  $y = ax^2 + bx + c = 0.04$ ;

$\therefore$  抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与  $x$  轴的一个交点在  $(1.1, 0)$  和点  $(1.2, 0)$  之间,

$\therefore$  方程  $ax^2 + bx + c = 0$  有一个根约为 1.14.

故选:  $B$ .

7.  $B$

【分析】本题难度中等, 考查根据二次函数的图象确定二次函数的字母系数的取值范围, 先根据所给条件和图象特征, 判断出正确图形, 再根据图形特征求出  $a$  的值.

【详解】解: 因为前两个图象的对称轴是  $y$  轴, 所以  $-\frac{b}{2a} = 0$ , 又因为  $a \neq 0$ , 所以  $b = 0$ , 与  $b > 0$  矛盾;

第三个图的对称轴  $-\frac{b}{2a} > 0$ ,  $a > 0$ , 则  $b < 0$ , 与  $b > 0$  矛盾;

故第四个图正确.

由于第四个图过原点, 所以将  $(0, 0)$  代入解析式, 得:

$$a^2 - 1 = 0,$$

解得  $a = \pm 1$ ,

由于开口向下,

$$a = -1.$$

故选:  $B$ .

8.  $D$

【分析】先把关于  $x$  的一元二次方程  $a(x+1)(x-2) + b = 0$  ( $a \neq 0, b \neq 0$ ) 的解转化为直线和抛物线的交点, 再结合图形进行判断即可.

【详解】解: 关于  $x$  的一元二次方程  $a(x+1)(x-2) + b = 0$  ( $a \neq 0, b \neq 0$ ) 的解就是函数  $y = a(x+1)(x-2)$  与  $y = -b$  的交点的横坐标,

$$\because a < 0,$$

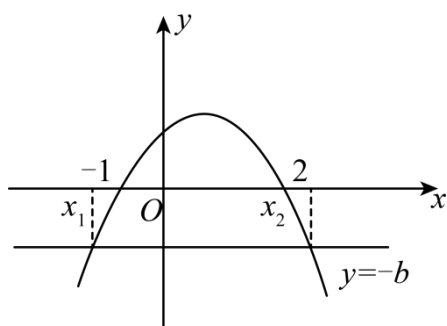
$\therefore$  抛物线开口向下,

$$\because b > 0,$$

$\therefore y = -b$  在  $x$  轴下方,

$$\because x_1 < x_2,$$

如图所示:



$$\therefore x_1 < -1 < 2 < x_2,$$

故选  $D$ .

【点睛】本题考查抛物线与  $x$  轴的交点，以及直线与抛物线的交点问题，解题关键是把一元二次方程的根转化为直线和抛物线的交点。

9. B

【分析】此题重点考查学生对二次函数的图象和性质的应用能力。根据二次函数的图象和性质结合三角形面积公式求解。

【详解】解：设点  $A, B$  横坐标为  $a$ ，则点  $A$  纵坐标为  $a^2$ ，点  $B$  的纵坐标为  $\frac{a^2}{9}$ ，

$\because BE \parallel x$  轴，

$\therefore$  点  $F$  纵坐标为  $\frac{a^2}{9}$ ，

$\because$  点  $F$  是抛物线  $y = x^2$  上的点，

$\therefore$  点  $F$  横坐标为  $x = \sqrt{y} = \frac{1}{3}a$ ，

$\because CD \parallel x$  轴，

$\therefore$  点  $D$  纵坐标为  $a^2$ ，

$\because$  点  $D$  是抛物线  $y = \frac{x^2}{9}$  上的点，

$\therefore$  点  $D$  横坐标为  $x = \sqrt{9y} = 3a$ ，

$\therefore AD = 2a, BF = \frac{2}{3}a, CE = \frac{8}{9}a^2, OE = \frac{1}{9}a^2$ ，

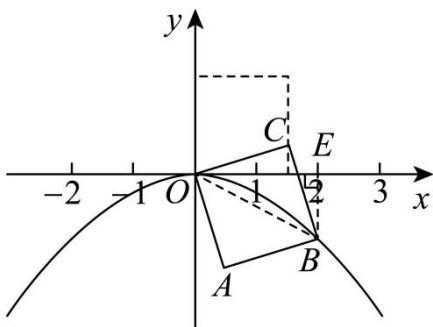
$$\therefore \frac{S_{\triangle OFB}}{S_{\triangle EAD}} = \frac{\frac{1}{2}BF \cdot OE}{\frac{1}{2}AD \cdot CE} = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{8}{9}} = \frac{1}{24}，$$

故选：B。

10. B

【分析】过点  $B$  向  $x$  轴引垂线，垂足为  $E$  点，连接  $OB$ ，可得  $OB$  的长度，进而得到点  $B$  的坐标，代入二次函数解析式即可求解。

【详解】如图，作  $BE \perp x$  轴于点  $E$ ，连接  $OB$ ，



$\because$  正方形  $OABC$  绕顶点  $O$  顺时针旋转  $75^\circ$ ，

$\therefore \angle AOE = 75^\circ$ ，

$\because \angle AOB = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle BOE = 30^\circ$ ，

$\therefore$  在  $Rt\triangle BOE$  中， $BE = \frac{1}{2}OB$ ，

$\because OA = 1$ ，

$\therefore OB = \sqrt{2}$ ，

$\therefore BE = \frac{1}{2}OB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$\therefore OE = \sqrt{OB^2 - BE^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，

∴ 点  $B$  坐标为  $(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ,

设抛物线解析式为  $y = ax^2 (a < 0)$

代入点  $B$  坐标  $(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ , 得  $a = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ ,

∴  $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}x^2$ ,

故选:  $B$ .

【点睛】本题考查正方形的性质, 旋转的性质, 含  $30^\circ$  角的直角三角形的性质, 用待定系数法求函数解析式和勾股定理的运用, 解题的关键是到点  $B$  的坐标.

11.  $A$

【分析】根据题意确定函数的解析式为  $2x * (x-1) = \begin{cases} 2x^2 + 2x & (x \leq -1) \\ -x^2 + 1 & (x > -1) \end{cases}$ , 画出函数的图象从图象上观察当关于  $x$

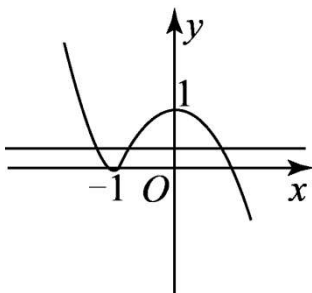
的方程为  $(2x+1) * (x-1) = t$  恰有三个互不相等的实数根时  $m$  的取值范围.

【详解】解: 由  $2x \leq x-1$  可得  $x \leq -1$ , 由  $2x > x-1$  可得  $x > -1$ .

∴ 根据题意得  $2x * (x-1) = \begin{cases} (2x)^2 - 2x(x-1) \\ (x-1)^2 - 2x(x-1) \end{cases}$ .

即  $2x * (x-1) = \begin{cases} 2x^2 + 2x & (x \leq -1) \\ -x^2 + 1 & (x > -1) \end{cases}$ ,

画出函数的图象如图,



观察函数的图象和直线  $y = t$  有三个不同的交点时,  $0 < t < 1$ ,

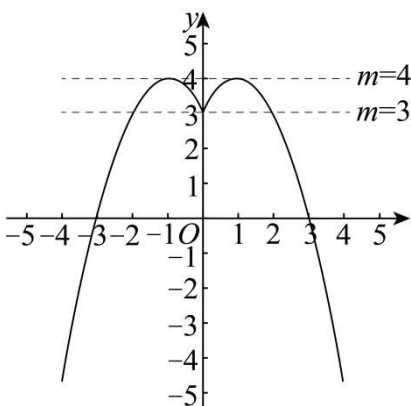
∴ 关于  $x$  的方程  $2x * (x-1) = t$  恰好有三个不相等的实数根, 则  $t$  的取值范围是  $0 < t < 1$ .

故选:  $A$ .

12.  $A$

【分析】本题考查二次函数的图象和性质, 先补全函数图象, 再根据图象逐项判断即可.

【详解】解: 当  $x < 0$  时,  $y = -x^2 + 2|x| + 3 = -x^2 - 2x + 3$ , 补全后的函数图象如下图所示:



由图可知, 函数图象关于  $y$  轴对称, 故①正确;

函数有最大值, 没有最小值, 故②错误;

当  $x < -1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大, 故③正确;

当  $3 < m < 4$  时, 直线  $y = m$  与函数图象有 4 个交点, 因此关于  $x$  的方程  $-x^2 + 2|x| + 3 = m$  有 4 个实数根, 故④正确;

综上所述, 正确的有①③④, 共 3 个,

故选 A

13.  $m \geq 1$

【分析】根据题意可得对称轴  $x \geq 1$ , 求解即可.

【详解】解:  $\because y = -x^2 + 2mx + m$ ,

$\therefore$  抛物线开口向下, 对称轴为直线  $x = -\frac{2m}{2 \times (-1)} = m$ ,

$\therefore$  当  $x < m$  时,  $y$  随  $x$  增大而增大,

$\therefore$  当  $-2 < x < 1$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大,

$\therefore m \geq 1$ ,

故答案为:  $m \geq 1$ .

14. -2

【分析】由抛物线  $y = x^2 - 2x - 1$  与  $x$  轴的交点坐标分别是  $(x_1, 0)$ ,  $(x_2, 0)$ , 得到  $x_1, x_2$  为方程  $x^2 - 2x - 1 = 0$  的两根, 利用根与系数的关系得到  $x_1 + x_2 = 2$ ,  $x_1 x_2 = -1$ , 将原式变形代入计算可得.

【详解】解:  $\because$  抛物线  $y = x^2 - 2x - 1$  与  $x$  轴的交点坐标分别是  $(x_1, 0)$ ,  $(x_2, 0)$ ,

$\therefore x_1, x_2$  为方程  $x^2 - 2x - 1 = 0$  的两根,

$\therefore x_1 + x_2 = 2$ ,  $x_1 x_2 = -1$ ,

$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2}{-1} = -2$ .

故答案为 -2.

15. -2

【分析】根据表格可求出该二次函数的对称轴为  $x = -1$ , 然后求出  $(1, y)$  关于  $x = -1$  的对称点坐标, 即可求出  $a + b + c$  的值.

【详解】解: 由表格可知:  $(-2, -5)$  与  $(0, -5)$  是关于对称轴对称的,

$\therefore$  该二次函数的对称轴为  $x = \frac{-2+0}{2} = -1$ ,

设二次函数图象上的点为  $(1, y)$ ,  $(x, y)$ ,

由对称性可知:  $\frac{1+x}{2} = -1$ ,

$\therefore x = -3$ ,

$\therefore (1, y)$  与  $(-3, y)$  关于  $x = -1$  对称,

由表格可知:  $x = -3$  时,  $y = -2$ ,

令  $x = 1$  代入  $y = ax^2 + bx + c$ ,

$\therefore y = a + b + c = -2$ .

故答案为: -2.

16. 11

【分析】本题考查二次函数和一次函数的应用, 解题的关键是明确题意, 利用一次函数和二次函数的性质解答. 根据题意, 写出  $y$  与  $x$  的函数关系式, 分别根据一次函数和二次函数的性质得到两种情况下获得的最大利润, 然后比较大小即可.

【详解】解: 由题意可得,

当  $0 \leq x \leq 10$  时,  $y = (240 - 120)x = 120x$ ,

当  $0 < x \leq 20$  时,  $y = [240 - 120 - 10(x - 10)]x = -10x^2 + 220x$ ,

由上可得,  $y$  与  $x$  的函数关系式为  $y = \begin{cases} 120x & (0 \leq x \leq 10) \\ -10x^2 + 220x & (10 < x \leq 20) \end{cases}$ ;

$\therefore$  当  $0 \leq x \leq 10$  时,  $y = 120x$ ,  $120 > 0$ ,

$\therefore y$  随  $x$  的增大而增大,

$\therefore$  当  $x = 10$  时,  $y$  取得最大值 1200,

$\therefore$  当  $10 < x \leq 20$  时,  $y = -10x^2 + 220x = -10(x - 11)^2 + 1210$ ,

$\therefore -10 < 0$ ,

$\therefore$  抛物线开口向下,

$\therefore$  当  $x = 11$  时,  $y$  取得最大值 1210,

$\therefore 1200 < 1210$ ,

$\therefore$  当  $x = 11$  时, 该鞋店获利最多,

答: 当顾客一次性购买 11 双时, 该网店从中获利最多.

故答案为: 11.

17.  $1 < n \leq 4$  或  $n = \frac{7}{8}$

【分析】分两种情况讨论: ①当抛物线向左平移  $h$  个单位, 则向上平移  $h$  个单位, 平移后的抛物线解析式为  $y = (x - 1 + h)^2 - 4 + h$ , 求出直线  $BA$  的解析式为  $y = x - 5$ , 联立方程组  $\begin{cases} y = x - 5 \\ y = (x - 1 + h)^2 - 4 + h \end{cases}$ , 由  $\Delta = 0$  时, 解得  $h = \frac{1}{8}$ ,

此时抛物线的顶点为  $(\frac{7}{8}, -\frac{31}{8})$ , 此时平移后的抛物线与射线  $BA$  只有一个公共点; ②当抛物线向右平移  $k$  个单位, 则向下平移  $k$  个单位, 平移后的抛物线解析式为  $y = (x - 1 - k)^2 - 4 - k$ , 当抛物线经过点  $B$  时, 此时抛物线的顶点坐标为  $(4, -7)$ , 此时平移后的抛物线与射线  $BA$  只有一个公共点; 当抛物线的顶点为  $(1, -4)$  时, 平移后的抛物线与射线  $BA$  有两个公共点, 由此可求解.

【详解】解:  $\because y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$ ,

$\therefore$  顶点  $A(1, -4)$ ,

令  $x = 0$ , 则  $y = -3$ ,

$\therefore C(0, -3)$ ,

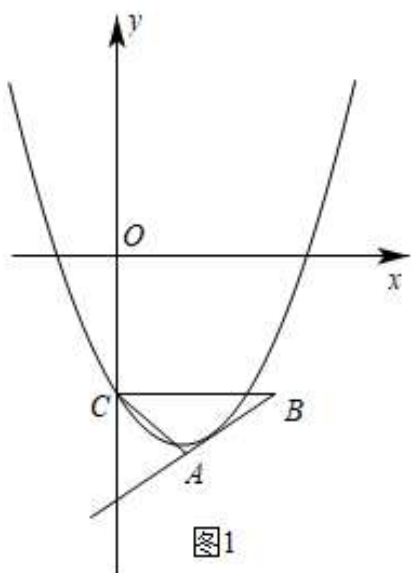
设直线  $AC$  的解析式为  $y = kx + b$ ,

$\therefore \begin{cases} k + b = -4 \\ b = -3 \end{cases}$ ,

解得  $\begin{cases} k = -1 \\ b = -3 \end{cases}$ ,

$\therefore y = -x - 3$ ,

①如图 1, 当抛物线向左平移  $h$  个单位, 则向上平移  $h$  个单位,



∴ 平移后的抛物线解析式为  $y = (x - 1 + h)^2 - 4 + h$ ,

设直线  $BA$  的解析式为  $y = k'x + b'$ ,

$$\therefore \begin{cases} 2k' + b' = -3 \\ k' + b' = -4 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k' = 1 \\ b' = -5 \end{cases},$$

$$\therefore y = x - 5,$$

$$\text{联立方程组} \begin{cases} y = x - 5 \\ y = (x - 1 + h)^2 - 4 + h \end{cases},$$

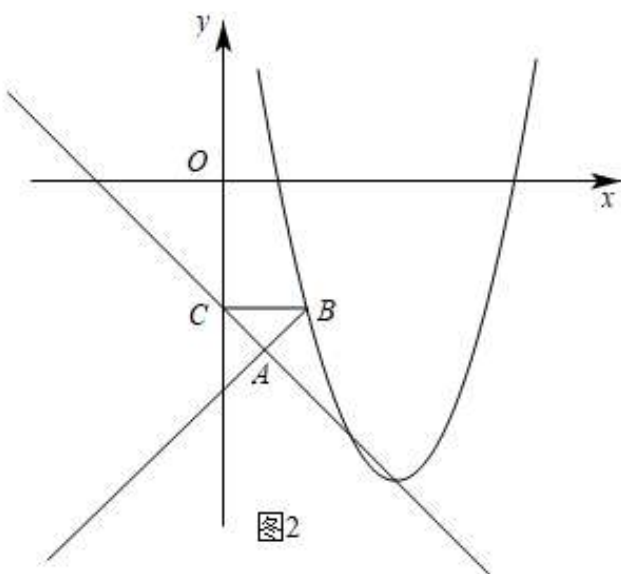
$$\text{整理得 } x^2 - (3 - 2h)x + h^2 - h + 2 = 0,$$

$$\text{当 } \Delta = 0 \text{ 时, } (3 - 2h)^2 - 4(h^2 - h + 2) = 0,$$

$$\text{解得 } h = \frac{1}{8},$$

此时抛物线的顶点为  $(\frac{7}{8}, -\frac{31}{8})$ , 此时平移后的抛物线与射线  $BA$  只有一个公共点;

②如图 2, 当抛物线向右平移  $k$  个单位, 则向下平移  $k$  个单位,



∴ 平移后的抛物线解析式为  $y = (x - 1 - k)^2 - 4 - k$ ,

当抛物线经过点  $B$  时,  $(2 - 1 - k)^2 - 4 - k = -3$ ,

解得  $k=0$ (舍) 或  $k=3$ ,

此时抛物线的顶点坐标为  $(4, -7)$ , 此时平移后的抛物线与射线  $BA$  只有一个公共点,

当抛物线的顶点为  $(1, -4)$  时, 平移后的抛物线与射线  $BA$  有两个公共点,

$\therefore$  综上所述:  $1 < n \leq 4$  或  $n = \frac{7}{8}$ .

故答案为:  $1 < n \leq 4$  或  $n = \frac{7}{8}$ .

18.  $-2 \leq m \leq -\frac{1}{2}$

【分析】将一般式化成顶点式, 得到当  $x = -\frac{1}{2}$  时, 函数有最小值为:  $-\frac{5}{4}$ , 再根据当  $x = 1$  时:  $y = 1$ , 利用抛物线的对称性得到当  $x = -2$  时,  $y = 1$ , 根据  $m \leq x \leq 1$  时, 函数的最大值是 1, 最小值是  $-\frac{5}{4}$ , 可知,  $m$  在  $-\frac{1}{2}$  和  $-2$  之间, 包括两个端点, 即可得解;

【详解】解:  $y = x^2 + x - 1 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$ ,

$\therefore a = 1 > 0$

$\therefore$  当  $x = -\frac{1}{2}$  时, 函数有最小值为:  $-\frac{5}{4}$ ,

当  $x = 1$  时:  $y = 1 + 1 - 1 = 1$ ,

由抛物线的对称性可知: 当  $x = -2$  时,  $y = 1$ ,

$\therefore$  函数  $y = x^2 + x - 1$  在  $m \leq x \leq 1$  的最大值是 1, 最小值是  $-\frac{5}{4}$ ,

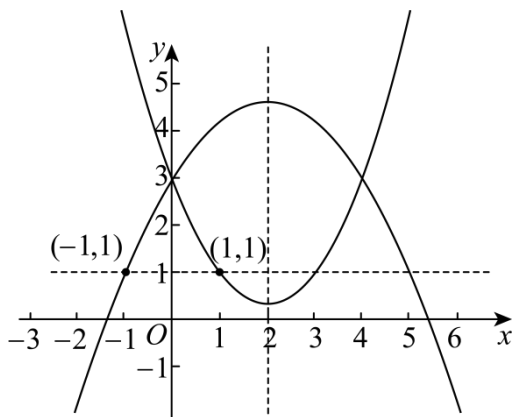
$\therefore -2 \leq m \leq -\frac{1}{2}$ ;

故答案为:  $-2 \leq m \leq -\frac{1}{2}$ .

19.  $a > \frac{2}{3}$  或  $a < -\frac{2}{5}$

【分析】本题考查二次函数的图象和性质, 先确定抛物线的对称轴, 根据开口的大小与  $a$  的关系, 即开口向上时,  $a > 0$ , 且  $a$  越大开口越小, 开口向下时,  $a < 0$ , 且  $a$  越大, 开口越大, 从而确定  $a$  的范围.

【详解】+: 如图,



抛物线  $y = ax^2 - 4ax + 3 (a \neq 0)$  的对称轴为: 直线  $x = -\frac{-4a}{2a} = 2$ ,

设抛物线与直线  $l$  交点 (靠近  $y$  轴) 坐标为  $(m, 1)$ ,

$\therefore |m| < 1$ ,

$\therefore -1 < m < 1$ ,

当  $a > 0$  时, 若抛物线经过点  $(1, 1)$  时, 开口最大, 此时  $a$  值最小,

将点  $(1, 1)$  代入  $y = ax^2 - 4ax + 3$ , 得:  $a - 4a + 3 = 1$ ,

解得  $a = \frac{2}{3}$ ,



$$\therefore a > \frac{2}{3};$$

当  $a < 0$  时, 若抛物线经过点  $(-1, 1)$  时, 开口最大, 此时  $a$  值最大,

将点  $(-1, 1)$  代入  $y = ax^2 - 4ax + 3$ , 得:  $a + 4a + 3 = 1$ ,

$$\text{解得 } a = -\frac{2}{5},$$

$$\therefore a < -\frac{2}{5},$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围是 } a > \frac{2}{3} \text{ 或 } a < -\frac{2}{5}.$$

$$\text{故答案为: } a > \frac{2}{3} \text{ 或 } a < -\frac{2}{5}.$$

$$20. \frac{9}{10}/0.9$$

【分析】本题考查了二次函数和一次函数综合, 先得出  $A(1, 0), B(5, 0), C(0, 5a)$ , 再根据过点  $M(3, 1)$  的直线将  $\triangle ABC$  分成两个面积相等的三角形, 得出过点  $M$  的直线为  $\triangle ABC$  中线, 然后进行分类讨论: 分别求出各条中线的函数解析式, 将点  $M$  的坐标代入, 求出  $a$  的值, 即可. ①当该直线为  $BC$  边上的中线时, ②当该直线为  $AB$  边上的中线时, ③当该直线为  $AC$  边上的中线时.

$$\text{【详解】解: } \because y = ax^2 - 6ax + 5a = a(x^2 - 6x + 5) = a(x-1)(x-5),$$

$$\therefore \text{当 } y = 0 \text{ 时, } x_1 = 1, x_2 = 5,$$

$$\therefore A(1, 0), B(5, 0),$$

$$\text{把 } x = 0 \text{ 代入得: } y = 5a,$$

$$\therefore C(0, 5a),$$

$\therefore$  过点  $M(3, 1)$  的直线将  $\triangle ABC$  分成两个面积相等的三角形,

$\therefore$  过点  $M$  的直线为  $\triangle ABC$  中线,

①当该直线为  $BC$  边上的中线时,

令  $BC$  中点为点  $D$ ,

$$\therefore B(5, 0), C(0, 5a),$$

$$\therefore D\left(\frac{5}{2}, \frac{5a}{2}\right),$$

设直线  $AD$  的函数解析式为  $y = kx + b$ ,

把  $A(1, 0), D\left(\frac{5}{2}, \frac{5a}{2}\right)$  代入得:

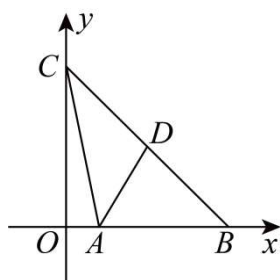
$$\begin{cases} 0 = k + b \\ \frac{5a}{2} = \frac{5}{2}k + b \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = \frac{5a}{3} \\ b = -\frac{5a}{3} \end{cases},$$

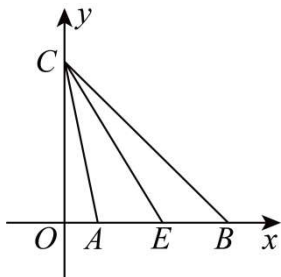
$$\therefore \text{直线 } AD \text{ 的函数解析式为 } y = \frac{5a}{3}x - \frac{5}{3}a,$$

$$\text{把 } M(3, 1) \text{ 代入的: } 1 = 5a - \frac{5}{3}a = \frac{10}{3}a,$$

$$\text{解得: } a = \frac{3}{10} < \frac{1}{2}, \text{ 不符合题意, 舍去;}$$



②当该直线为  $AB$  边上的中线时，  
 令  $AB$  中点为点  $E$ ，  
 $\because A(1,0), B(5,0)$ ，  
 $\therefore E(3,0)$ ，  
 $\because M(3,1)$ ，  
 $\therefore ME \parallel y$  轴，不符合题意，舍去；



③当该直线为  $AC$  边上的中线时，  
 令  $AC$  中点为点  $F$ ，  
 $\because A(1,0), C(0,5a)$ ，  
 $\therefore F(\frac{1}{2}, \frac{5a}{2})$ ，  
 设直线  $BF$  的函数解析式为  $y = kx + b$ ，  
 把  $B(5,0), F(\frac{1}{2}, \frac{5a}{2})$  代入得：

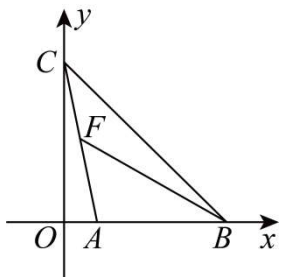
$$\begin{cases} 0 = 5k + b \\ \frac{5a}{2} = \frac{1}{2}k + b \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{5}{9}a \\ b = \frac{25}{9}a \end{cases}$$

$\therefore$  直线  $BF$  的函数解析式为  $y = -\frac{5a}{9}x + \frac{25}{9}a$ ，

把  $M(3,1)$  代入的： $1 = -\frac{5a}{9} \times 3 + \frac{25}{9}a$ ，

解得： $a = \frac{9}{10}$ ；



故答案为： $\frac{9}{10}$ 。

21.  $2\sqrt{2}$

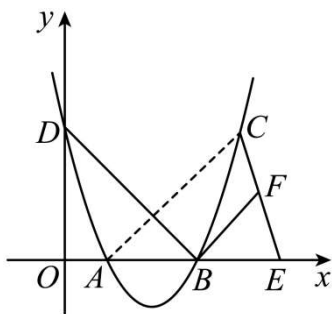
**【分析】**根据题意  $A, B$  关于对称轴对称， $C, D$  关于对称轴对称得到  $AC = BD = 4\sqrt{2}$ ，连接  $AC$ ，由中位线定理得  $AC = 2BF$ ，求出  $AC$  长即可得解。

**【详解】解：** $\because$  点  $C$  在抛物线上，且与点  $D$  的纵坐标相等， $D(0,4), B(4,0)$ ，

$$\therefore BD = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}，$$

$\because A, B$  关于对称轴对称， $C, D$  关于对称轴对称，

$$\therefore AC = BD = 4\sqrt{2}，$$



连  $AC$ ,  $BE = AB$ ,  $CE$  的中点是  $F$ ,

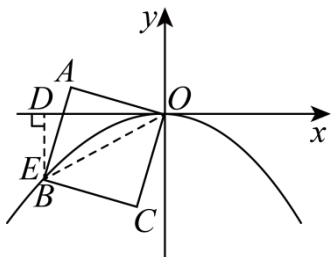
$$\therefore BF = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{2}.$$

故答案为:  $2\sqrt{2}$ .

22.  $-\frac{\sqrt{2}}{12}$

【分析】本题主要考查了正方形的性质、直角三角形的性质以及用待定系数法确定函数解析式的方法, 连接  $OB$ , 过  $B$  作  $BD \perp x$  轴于  $D$ , 若  $OA$  与  $x$  轴负半轴的夹角为  $15^\circ$ , 那么  $\angle BOD = 30^\circ$ ; 在正方形  $OABC$  中, 已知了边长, 易求得对角线  $OB$  的长, 进而可在  $Rt\triangle OBD$  中求得  $BD$ 、 $OD$  的值, 也就得到了  $B$  点的坐标, 然后将其代入抛物线的解析式中, 即可求得待定系数  $a$  的值.

【详解】解: 如图, 连接  $OB$ , 过  $B$  作  $BD \perp x$  轴于  $D$ ;



则  $\angle BOA = 45^\circ$ ,  $\angle BOD = 30^\circ$ ;

已知正方形的边长为 4, 则  $OB = 4\sqrt{2}$ ;

$Rt\triangle OBD$  中,  $OB = 4\sqrt{2}$ ,  $\angle BOD = 30^\circ$ ,

则  $BD = \frac{1}{2}OB = 2\sqrt{2}$ ,  $OD = \sqrt{OB^2 - BD^2} = 2\sqrt{6}$ ;

故  $B(-2\sqrt{6}, -2\sqrt{2})$ ,

代入抛物线的解析式中, 得:  $(2\sqrt{6})^2 a = -2\sqrt{2}$ ,

解得  $a = -\frac{\sqrt{2}}{12}$ ,

故答案为:  $-\frac{\sqrt{2}}{12}$

23. (1)  $18 - 2x$

(2) 4 米或 8 米

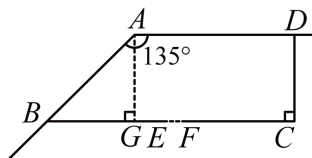
(3)  $CD$  的长为 6 米时储料场的面积最大, 最大面积为 54 平方米

【分析】(1) 作  $AG \perp BC$  于点  $G$ , 证明四边形  $AGCD$  是矩形,  $\triangle ABG$  是等腰直角三角形, 则  $BG = AG = x$ , 结合新建墙  $BE - FC - CD$  总长即可求解;

(2) 利用梯形面积公式列方程, 即可求解;

(3) 设储料场的面积为  $S$ , 列  $S$  关于  $x$  的二次函数, 化为顶点式, 即可求出最值.

【详解】(1) 解: 如图, 作  $AG \perp BC$  于点  $G$ ,



$\because BC \parallel CD, \angle C = 90^\circ, AG \perp BC,$

$\therefore \angle C = \angle D = \angle AGC = 90^\circ,$

$\therefore$  四边形  $AGCD$  是矩形,

$\therefore AE = CD = x$

$\because BC \parallel CD, \angle BAD = 135^\circ,$

$\therefore \angle B = 180^\circ - \angle BAD = 45^\circ,$

$\therefore \triangle ABG$  是等腰直角三角形,

$\therefore BG = AG = x,$

$\because BE - FC - CD$  总长为 16 米,  $EF = 2,$

$\therefore CG = 16 - CD - BG + EF = 16 - x - x + 2 = 18 - 2x$

$\therefore AD = CG = 18 - 2x;$

(2) 解: 由题意知  $BC = 16 - CD + EF = 16 - x + 2 = 18 - x,$

当储料场的面积为 48 平方米时,  $\frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CD = 48,$

即  $\frac{1}{2}(18 - 2x + 18 - x) \cdot x = 48,$

解得  $x = 4$  或  $x = 8,$

即  $CD$  的长为 4 米或 8 米;

(3) 解: 设储料场的面积为  $S,$

则  $S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CD = \frac{1}{2}(18 - 2x + 18 - x) \cdot x = -\frac{3}{2}x^2 + 18x = -\frac{3}{2}(x - 6)^2 + 54,$

因此当  $x = 6$  时,  $S$  取最大值 54,

即  $CD$  的长为 6 米时储料场的面积最大, 最大面积为 54 平方米.

24. (1)  $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

(2) 水池的半径至少为 1 米

【分析】本题考查了待定系数法求解析式, 二次函数的实际应用.

(1) 根据抛物线的顶点式求解即可.

(2) 令  $y = 0$  得到  $-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$  求得抛物线与  $x$  轴正半轴的交点坐标, 其横坐标就是所求.

【详解】(1)  $\because$  水流的最高点到  $OA$  的水平距离是  $\frac{1}{4}m$ , 最高点离水面是  $\frac{9}{16}m, OA = \frac{1}{2}m,$

$\therefore$  抛物线的顶点坐标为  $(\frac{1}{4}, \frac{9}{16}), A(0, \frac{1}{2}),$

故设抛物线的解析式为  $y = a(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{9}{16},$

$\therefore \frac{1}{2} = a(0 - \frac{1}{4})^2 + \frac{9}{16},$

解得  $a = -1,$

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = -(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{9}{16},$

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$

(2) 令  $y = 0$  得到  $-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0,$

解得  $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$  (舍去),

故水池的半径至少为 1 米.

25. (1) 第 30 天的利润最大, 最大利润是 5600 元

(2)  $0 < a < 6$

【分析】(1) 根据每天售出的件数  $\times$  每件盈利 = 利润即可得到的  $W$  与  $x$  之间的函数关系式, 由函数的性质即可求出其最大利润以及其哪一天所获得的;

(2) 根据题意可以列出相应的不等式, 从而可以解答本题.

【详解】(1) 设销售利润为  $w$  元, 销售时间为  $x$  天,

由题意可知,  $w = (110 - x - 40)(4x + 20)$ ,

$$= -4x^2 + 260x + 1400$$

$$= -4(x - 32.5)^2 + 5625,$$

$$\because a = -4 < 0,$$

$\therefore$  函数有最大值,

$\therefore$  当  $x = 30$  时,  $w$  取最大值为  $w = -4 \times 30^2 + 260 \times 30 + 1400 = 5600$  元,

$\therefore$  第 30 天的利润最大, 最大利润是 5600 元;

(2) 设未来 30 天每天获得的利润为  $y$ , 时间为  $t$  天, 根据题意,

$$\text{得 } y = (110 - 40 - t)(20 + 4t) - (20 + 4t)a,$$

$$\text{化简, 得 } y = -4t^2 + (260 - 4a)t + 1400 - 20a,$$

每天缴纳电商平台推广费用后的利润随天数  $t$  ( $t$  为正整数) 的增大而增大,

$$\therefore -\frac{260 - 4a}{2 \times (-4)} > 29.5,$$

解得,  $a < 6$ ,

又  $\because a > 0$ ,

即  $a$  的取值范围是:  $0 < a < 6$ .

26. (1)  $4m$

$$(2) P\left(\frac{8}{3}, \frac{11}{9}\right)$$

$$(3) \frac{16}{9}$$

【分析】(1) 令  $y = 0$ , 则  $-x^2 + 2mx + 3m^2 = 0$ , 进行计算得即可求出  $A$ 、 $B$  的坐标, 即可得;

(2) 根据题意和二次函数的性质依次求出点  $C$ 、 $D$ 、 $A$ 、 $B$  的坐标, 即可得  $\angle ABC = 45^\circ$ , 过点  $D$  作  $DH \perp x$  轴交于点  $H$ , 得  $DH = 3$ ,  $AH = 3$ , 即可得  $\angle DAH = 45^\circ$ , 可得  $BC \perp AD$ ,

根据  $\triangle CQK$  是等腰直角三角形可求出点  $Q$  的坐标, 根据  $C$  点关于  $AD$  的对称点  $G(2, 1)$ , 即可得  $AD$  平分  $\angle CAG$ ,

设直线  $AP$  的解析式为  $y = kx + b$ , 即可得  $\begin{cases} -k + b = 0 \\ 2k + b = 1 \end{cases}$ , 进行计算得出一次函数的解析式为  $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ , 联立方程

$$\text{组 } \begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases}, \text{ 进行计算即可得:}$$

(3) 令  $x = 0$ , 则  $y = 3m^2$ , 求出点  $C$  的坐标, 令  $y = 0$ , 则  $-x^2 + 2mx + 3m^2 = 0$ ,

解得  $x = -m$  或  $x = 3m$ , 即可得点  $A$ 、 $B$  的坐标, 设直线  $BC$  的解析式为  $y = kx + b$ ,

即可得  $\begin{cases} 3mk + b = 0 \\ b = 3m^2 \end{cases}$ , 进行计算即可得一次函数的解析式为  $y = -mx + 3m^2$ , 过点  $P$  作  $PQ \parallel y$  轴交  $BC$  于点  $Q$ , 过

点  $A$  作  $AF \parallel y$  轴交  $BC$  于点  $F$ , 设  $P(t, -t^2 + 2mt + 3m^2)$ , 则  $F(-m, 4m^2)$ ,  $Q(t, -mt + 3m^2)$ , 由  $PQ \parallel AF$  得  $\frac{AE}{PE}$

$= \frac{AF}{PQ} = \frac{4m^2}{-t^2 + 3mt}$ , 当  $PQ$  最大时,  $\frac{AE}{PE}$  有最小值,  $PQ = -t^2 + 3mt = -\left(t - \frac{3}{2}m\right)^2 + \frac{9}{4}m^2$ , 当  $t = \frac{3}{2}m$  时,  $PQ$  有最大值  $\frac{9}{4}m^2$ , 即可得.

【详解】(1) 解: 令  $y = 0$ , 则  $-x^2 + 2mx + 3m^2 = 0$ ,

$$x^2 - 2mx - 3m^2 = 0$$

$$(x - 3m)(x + m) = 0$$



$$\text{联立方程组 } \begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = -1 \text{ (舍)} \\ y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = \frac{11}{9} \end{cases},$$

$$\therefore P\left(\frac{8}{3}, \frac{11}{9}\right);$$

$$(3) \text{ 解: 令 } x = 0, \text{ 则 } y = 3m^2,$$

$$\therefore C(0, 3m^2),$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 则 } -x^2 + 2mx + 3m^2 = 0,$$

$$\text{解得 } x = -m \text{ 或 } x = 3m,$$

$$\therefore B(3m, 0), A(-m, 0),$$

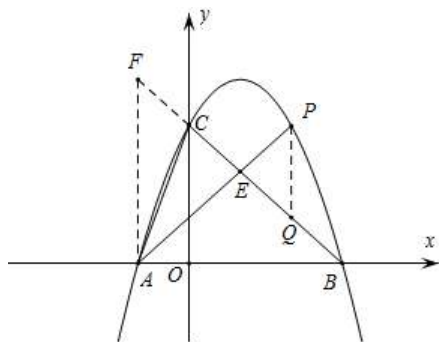
设直线  $BC$  的解析式为  $y = kx + b$ ,

$$\therefore \begin{cases} 3mk + b = 0 \\ b = 3m^2 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = -m \\ b = 3m^2 \end{cases},$$

$$\therefore y = -mx + 3m^2,$$

如图所示, 过点  $P$  作  $PQ \parallel y$  轴交  $BC$  于点  $Q$ , 过点  $A$  作  $AF \parallel y$  轴交  $BC$  于点  $F$ ,



$$\text{设 } P(t, -t^2 + 2mt + 3m^2),$$

$$\therefore F(-m, 4m^2), Q(t, -mt + 3m^2),$$

$$\therefore PQ = -t^2 + 2mt + 3m^2 + mt - 3m^2 = -t^2 + 3mt, FA = 5m^2,$$

$$\therefore PQ \parallel AF,$$

$$\therefore \frac{AE}{PE} = \frac{AF}{PQ} = \frac{4m^2}{-t^2 + 3mt},$$

当  $PQ$  最大时,  $\frac{AE}{PE}$  有最小值,

$$\therefore PQ = -t^2 + 3mt = -\left(t - \frac{3}{2}m\right)^2 + \frac{9}{4}m^2,$$

$$\text{当 } t = \frac{3}{2}m \text{ 时, } PQ \text{ 有最大值 } \frac{9}{4}m^2,$$

$$\therefore \frac{AE}{PE} \text{ 的最小值是: } \frac{4m^2}{-\left(\frac{3m}{2}\right)^2 + 3m \times \frac{3m}{2}} = \frac{4m^2}{-\frac{9m^2}{4} + \frac{9m^2}{2}} = \frac{4m^2}{\frac{9m^2}{4}} = \frac{16}{9}.$$

$$27. (1) AB = \frac{4}{7}\sqrt{7}$$

$$(2) y = -x^2 + 2x + 3$$

(3)  $PQ$  没有最小值

【分析】(1) 将抛物线的解析式由一般式变为顶点式, 再用参数表示出抛物线的顶点  $M$ , 根据  $OC = \frac{3}{4}MD$  可列出  $c$  与  $a$  的等量关系, 再结合根与系数的关系求解即可;

(2) 由  $a < 0$ , 可知函数图象开口向下, 函数的对称轴为:  $x = -\frac{-2a}{2a} = 1$ , 画出函数图象, 连接  $AC, BC$ , 过  $A$  作  $AH \perp BC$  交于点  $H$ ,  $AH$  与  $y$  轴交于点  $E$ , 设  $CH = n$ , 根据  $\tan \angle ACB = 2$ , 则  $AH = CH \cdot \tan \angle ACB = 2n$ , 由  $OC = OB$ ,  $\angle COB = 90^\circ$ , 可知  $\triangle COB$  为等腰直角三角形, 进而可以推理出  $\triangle EHC$  为等腰直角三角形, 则  $EH = CH = n$ , 则  $CE = \sqrt{n^2 + n^2} = \sqrt{2}n$ , 且  $EA = EH = n$ , 根据对顶角相等可以推出  $\triangle AOE$  为等腰直角三角形, 则  $OE = OA = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot n^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}n$ , 则  $OB = OC = \frac{\sqrt{2}}{2}n + \sqrt{2}n = \frac{3\sqrt{2}}{2}n$ , 则  $A(-\frac{\sqrt{2}}{2}n, 0)$ ,  $B(\frac{3\sqrt{2}}{2}n, 0)$ , 由二次函数的对称轴为  $x = 1$ , 则  $A, B$  的中点为  $(1, 0)$ , 则  $\frac{1}{2} \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}n + \frac{3\sqrt{2}}{2}n) = 1$ , 解得:  $n = \sqrt{2}$ , 则  $A(-1, 0)$ ,  $B(3, 0)$ ,  $C(0, 3)$ , 由三点坐标可以推出函数解析式:

(3) 根据  $PQ \parallel AC$ , 则  $P$  为抛物线第一象限的点, 根据题意画出图象, 分析可知  $P$  点越接近  $B$  点或  $C$  点时,  $PQ$  的长度越小, 则  $PQ$  的长度可以无限接近于 0, 但不会等于 0, 则  $PQ$  没有最小值.

【详解】(1) 解: 抛物线  $y = ax^2 - 2ax + c = a(x-1)^2 + c - a$ ,

顶点  $M$  为  $(1, c-a)$ ,

$$\because OC = \frac{3}{4}MD,$$

$$\therefore c = \frac{3}{4}(a - c),$$

$$\therefore c = \frac{3}{7}a,$$

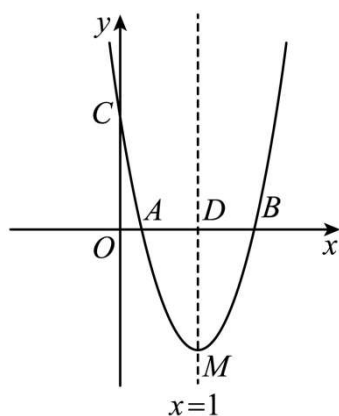
$$\therefore \text{抛物线为 } y = ax^2 - 2ax + \frac{3}{7}a,$$

$$\text{令 } y = ax^2 - 2ax + \frac{3}{7}a = 0,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{7},$$

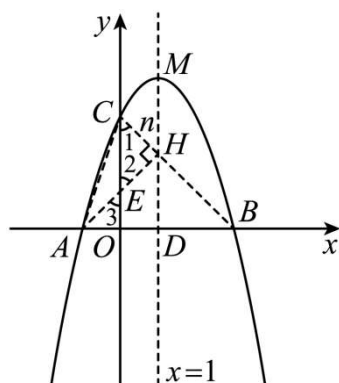
$$\therefore (x_1 - x_2)^2 = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{4 - 4 \times \frac{3}{7}} = \frac{4}{7}\sqrt{7},$$

$$\text{故 } AB = \frac{4}{7}\sqrt{7};$$



(2) 解: 由  $a < 0$ , 可知函数图象开口向下, 函数的对称轴为:  $x = -\frac{-2a}{2a} = 1$ ,

画出函数图形如下图所示:





连接  $AC, BC$ , 过  $A$  作  $AH \perp BC$  交于点  $H$ ,  $AH$  与  $y$  轴交于点  $E$ ,

设  $CH = n$ ,

$$\because \tan \angle ACB = 2,$$

$$\therefore AH = CH \cdot \tan \angle ACB = 2n,$$

$$\because OC = OB, \angle COB = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle COB$  为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle 1 = 45^\circ, \text{ 且 } \angle AHC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle EHC$  为等腰直角三角形,

$$\therefore EH = CH = n,$$

$$\therefore CE = \sqrt{n^2 + n^2} = \sqrt{2}n, \text{ 且 } EA = EH = n,$$

$$\because \angle 3 = \angle 2 = 45^\circ, \angle AOC = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle AOE$  为等腰直角三角形,

$$\therefore OE = OA = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot n^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}n,$$

$$\therefore OB = OC = \frac{\sqrt{2}}{2}n + \sqrt{2}n = \frac{3}{2}\sqrt{2}n$$

$$\therefore A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}n, 0\right), B\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}n, 0\right),$$

$$\because \text{二次函数的对称轴为 } x = 1,$$

$$\therefore A, B \text{ 的中点为 } (1, 0),$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}n + \frac{3\sqrt{2}}{2}n\right) = 1,$$

$$\text{解得: } n = \sqrt{2},$$

$$\therefore A(-1, 0), B(3, 0), C(0, 3),$$

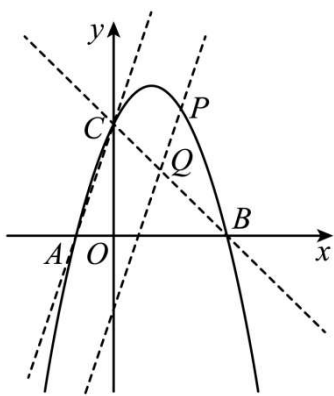
将  $A, C$  两点坐标代入  $y = ax^2 - 2ax + c$  中,

$$\text{得 } \begin{cases} c = 3 \\ 0 = a + 2a + c \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} c = 3 \\ a = -1 \end{cases},$$

则函数解析式为:  $y = -x^2 + 2x + 3$ .

(3) 解: 根据题意作出图象, 如下图所示,



$$\because PQ \parallel AC,$$

$\therefore P$  为抛物线在第一象限的点,

$P$  点越接近  $B$  点或  $C$  点时,  $PQ$  的长度越小,

且  $P$  点在第一象限, 则  $P$  点不会与  $B$  点,  $C$  点重合,

$\therefore PQ$  的长度可以无限接近于 0, 但不会等于 0,

$\therefore PQ$  没有最小值.

28. (1) 函数  $y = 2x + 1$  的图象上存在“等值点”为  $(-1, -1)$ ; 函数  $y = x^2 - x + 2$  的图象上不存在个“等值点”

(2)  $b$  的值为  $3 + \sqrt{33}$  或  $3 - \sqrt{33}$

(3)  $m < -\frac{17}{8}$  或  $\frac{1-\sqrt{17}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{17}}{2}$

【分析】(1) 根据“等值点”的定义建立方程求解即可得出答案;

(2) 先根据“等值点”的定义求出函数  $y = \frac{9}{x} (x > 0)$  的图象上“等值点”  $A(3, 3)$ , 同理求出  $B(\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}b)$ , 根据  $\triangle ABC$  的面积为 3 可得  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}|b| \times |3 - \frac{1}{2}b| = 3$ , 求解即可;

(3) 先求出函数  $y = x^2 - 4$  的图象上有两个“等值点”  $(\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2})$ ,  $(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2})$ , 再利用翻折的性质分类讨论即可.

【详解】(1) 在  $y = 2x + 1$  中, 令  $x = 2x + 1$ , 得  $x = -1$ ,

$\therefore$  函数  $y = 2x + 1$  的图象上存在“等值点”为  $(-1, -1)$ ;

在  $y = x^2 - x + 2$  中, 令  $x = x^2 - x + 2$ , 此时  $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$ , 方程无解,

$\therefore$  函数  $y = x^2 - x + 2$  的图象上不存在个“等值点”;

(2) 在函数  $y = \frac{9}{x} (x > 0)$  中, 令  $x = \frac{9}{x}$ ,

解得:  $x = 3$ ,

$\therefore A(3, 3)$ ,

在函数  $y = -x + b$  中, 令  $x = -x + b$ ,

解得:  $x = \frac{1}{2}b$ ,

$\therefore B(\frac{1}{2}b, \frac{1}{2}b)$ ,

$\therefore BC \perp x$  轴,

$\therefore B(\frac{1}{2}b, 0)$ ,

$\therefore BC = \frac{1}{2}|b|$ ,

$\therefore \triangle ABC$  的面积为 3,

$\therefore \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}|b| \times |3 - \frac{1}{2}b| = 3$ ,

当  $b < 0$  时,  $b^2 - 6b - 24 = 0$ ,

解得  $b = 3 - \sqrt{33}$ ,

当  $0 \leq b < 6$  时,  $b^2 - 6b + 24 = 0$ ,

$\therefore \Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 24 = -60 < 0$ ,

$\therefore$  方程  $b^2 - 6b + 24 = 0$  没有实数根,

当  $b \geq 6$  时,  $b^2 - 6b - 24 = 0$ ,

解得:  $b = 3 + \sqrt{33}$ ,

综上所述,  $b$  的值为  $3 + \sqrt{33}$  或  $3 - \sqrt{33}$ ;

(3) 令  $x = x^2 - 4$ ,

解得:  $x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ ,

$\therefore$  函数  $y = x^2 - 4$  的图象上有两个“等值点”  $(\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2})$ ,  $(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2})$ ,

① 当  $m < \frac{1-\sqrt{17}}{2}$  时,  $W_1, W_2$  两部分组成的图象上必有 2 个“等值点”  $(\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2})$ ,

$(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2})$ ,

将函数  $y = x^2 - 4 (x \geq m)$  的图像沿直线  $x = m$  翻折后为:  $y = (x - 2m)^2 - 4 (x < m)$ ,

令  $x = (x - 2m)^2 - 4$ ,

整理得:  $x^2 - (4m+1)x + 4m^2 - 4 = 0$ ,

$\therefore W_2$  的图象上不存在“等值点”,

$\therefore \Delta < 0$ ,

$\therefore (4m+1)^2 - 4(4m^2 - 4) < 0$ ,

$\therefore m < -\frac{17}{8}$ ,

②当  $m = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$  时, 有 3 个“等值点”  $(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1-\sqrt{17}}{2}), (\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2}), (\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2})$ ,

③当  $\frac{1-\sqrt{17}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{17}}{2}$  时,  $W_1, W_2$  两部分组成的图象上恰有 2 个“等值点”,

④当  $m = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$  时,  $W_1, W_2$  两部分组成的图象上恰有 1 个“等值点”  $(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2})$ ,

⑤当  $m > \frac{1+\sqrt{17}}{2}$  时,  $W_1, W_2$  两部分组成的图象上没有“等值点”,

综上所述, 当  $W_1, W_2$  两部分组成的图象上恰有 2 个“等值点”时,  $m < -\frac{17}{8}$  或  $\frac{1-\sqrt{17}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ .

29. (1)5

(2) $y_1 = -x^2 + 3x + 4$

(3)10

【分析】(1) 根据题干中对于“L 型距离”的定义, 即可求解;

(2) 根据二次函数  $y_1$  经过点 A、B、C 三点, 所以只要求出 C 点坐标即可: 根据点 C 在直线  $x=3$  上运动, 所以可设点  $C(3, m)$ , 根据  $L(B, C) \leq BC$  列方程求解出  $m$  的值, 利用待定系数法列方程组即可求出抛物线  $y_1$  的表达式;

(3) 根据  $\triangle CDE$  的一边  $DE$  长度固定等于 4, 所以只要求出顶点 C 到  $DE$  的最大距离即可: 由  $DE$  所在的直线  $y_2 = 2tx$  过固定点  $O(0, 0)$ , 故直线  $y_2$  的图像是绕点  $O(0, 0)$  旋转的直线, 当  $OC \perp$  直线  $y_2$  时, 点 C 到  $DE$  的距离最大, 此时就是  $\triangle CDE$  的最大面积, 根据三角形面积公式求解即可.

【详解】(1)  $\because A(-1, 0), B(0, 4)$ ,

$\therefore L(A, B) = |-1-0| + |0-4| = 1+4=5$ ;

(2)  $\because$  点 C 在直线  $x=3$  上运动,

$\therefore$  设点  $C(3, m)$ , 且  $B(0, 4)$

由平面上两点间距离, 利用勾股定理得:

$\therefore BC^2 = (3-0)^2 + (4-m)^2 = 9 + (4-m)^2$

$\therefore L(B, C) = |0-3| + |4-m| = 3 + |4-m|$

$\therefore L^2(B, C) = (3+|4-m|)^2 = 3^2 + 6|4-m| + (4-m)^2$

$\because 0 \leq L(B, C) \leq BC$

$\therefore L^2(B, C) \leq BC^2$

即  $3^2 + 6|4-m| + (4-m)^2 \leq 9 + (4-m)^2$

$\therefore 6|4-m| \leq 0$ ,

又  $\because |4-m| \geq 0$

$\therefore 4-m=0$

$\therefore m=4$

$\therefore C(3, 4)$

$\therefore$  二次函数  $y_1$  的图像经过  $A(-1, 0), B(0, 4), C(3, 4)$ ,

$\therefore$  设  $y_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$

$\therefore$  代入解析式得:

$$\begin{cases} a_1 - b_1 + c_1 = 0 \\ c_1 = 4 \\ 9a_1 + 3b_1 + c_1 = 4 \end{cases}$$

$$\text{解方程组得: } \begin{cases} a_1 = -1 \\ b_1 = 3 \\ c_1 = 4 \end{cases}$$

∴ 抛物线  $y_1$  的表达式为  $y_1 = -x^2 + 3x + 4$ ;

$$(3) \because y_2 = 2tx$$

令  $x = 0$  时,  $y_2 = 0$

∴ 直线  $y_2$  恒过定点  $O(0,0)$

∴ 直线  $y_2$  的图像是绕点  $O(0,0)$  旋转的直线,

∴ 当  $OC \perp$  直线  $y_2$  时, 点  $C$  到  $DE$  的距离最大,  $\triangle CDE$  面积也最大, 即  $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot OC$ ,

$$\because OC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, DE = 4$$

$$\therefore \triangle CDE \text{ 面积最大值为 } \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10.$$

$$30. (1) y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 8, \text{ 顶点 } C \text{ 的坐标为 } (2, \frac{32}{3})$$

$$(2) \text{ 存在, } P_1(4, 8), P_2(3 + \sqrt{17}, \frac{-4\sqrt{17}-4}{3}), P_3(3 - \sqrt{17}, \frac{4\sqrt{17}-4}{3})$$

$$(3) \text{ 存在, } M(\frac{25}{2}, \frac{3}{2})$$

【分析】(1) 利用待定系数法, 将  $A(-2,0)$ 、 $B(6,0)$ 、 $D(0,8)$  代入抛物线表达式, 即可求出抛物线解析式, 再将解析式化为顶点式即可求出顶点坐标;

(2) 利用待定系数法求出直线  $BD$  的解析式, 由  $S_{\triangle CBD} = S_{\triangle CDK} + S_{\triangle CKB}$  求得  $\triangle CBD$  的面积, 根据同底等高的三角形面积相等及平行线的性质, 过点  $C$  作  $BD$  的平行线与抛物线相交于点  $P_1$ , 则  $S_{\triangle BDP_1} = S_{\triangle CBD}$ , 待定系数法求出直线

$CP_1$  的解析式  $y = -\frac{4}{3}x + \frac{40}{3}$ , 根据直线  $CP_1$  与抛物线相交, 列方程组即可求出直线  $CP_1$  与抛物线的交点  $P_1$  的坐标,

将直线  $CP_1$  的解析式转化为  $y = -\frac{4}{3}x + 8 + \frac{16}{3}$ , 即可得到直线  $CP_1$  是由直线  $BD: y = -\frac{4}{3}x + 8$  向上平移  $\frac{16}{3}$

个单位所得, 将直线  $BD: y = -\frac{4}{3}x + 8$  向下平移  $\frac{16}{3}$  个单位得直线  $l: y = -\frac{4}{3}x + 8 - \frac{16}{3} = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$ , 则直线  $l$  与

抛物线的交点为点  $P$ , 满足  $S_{\triangle PBD} = S_{\triangle CBD}$ , 求出直线  $l$  与抛物线的交点即可;

(3) 如图, 令原抛物线的对称轴与  $x$  轴的交点为点  $H$ , 则点  $H$  坐标为  $(2,0)$ , 连接  $BC$ ,  $BE$ , 过点  $E$  作  $EQ \perp x$  轴, 垂足为点  $Q$ , 连接  $BG$ , 将  $BG$  逆时针旋转  $90^\circ$  得点  $G'$  在原抛物线上, 过点  $B$  作  $y$  轴的平行线  $BR$ , 过点  $G'$  作  $G'R \perp BR$ , 点  $R$  为垂足, 通过构造全等三角形  $\triangle CHB \cong \triangle BQE$ , 求出点  $E$  的坐标为  $(\frac{50}{3}, 4)$ , 同理得  $\triangle OBG \cong \triangle RBG'$ , 求

出点  $G'$  的纵坐标, 代入原抛物线解析式  $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 8$ , 即可得出点  $G'$  坐标, 进而求出点  $G$  的坐标为  $(0,$

$-1)$ , 由题意可设旋转后的抛物线解析式为  $x = ay^2 + by + c$ , 将点  $G$ ,  $E$ ,  $B$  的坐标代入抛物线解析式, 求解即可得

抛物线的解析式为  $x = -\frac{2}{3}y^2 + \frac{16}{3}y + 6$ , 再根据  $S_{\text{四边形 } CGME} = S_{\triangle CGE} + S_{\triangle GEM}$ , 可得当  $S_{\triangle GEM}$  最大时,  $S_{\text{四边形 } CGME}$  有

最大值, 即当与  $GE$  平行的直线与旋转后的抛物线相切时, 切点为  $M$ ,  $S_{\triangle GEM}$  最大, 已知点  $G$ ,  $E$  的坐标, 利用待定

系数法, 求得直线  $GE$  的解析式为  $y = \frac{3}{10}x - 1$ , 可设与  $GE$  平行的切线解析式为  $y = \frac{3}{10}x - 1 + m$ , 利用切线与抛

物线只有一个交点, 联立抛物线与切线解析式得方程  $-\frac{2}{3}y^2 + \frac{16}{3}y + 6 = \frac{10}{3}y + \frac{10}{3} - \frac{10}{3}m$  有两个相等的实数根,

根据  $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1)(4 + 5m) = 0$ , 求得  $m = -\frac{5}{4}$ , 即可得到切线解析式, 联立抛物线与切线解析式得  $-\frac{2}{3}y^2 +$

$\frac{16}{3}y + 6 = \frac{10}{3}y - \frac{9}{4}$ , 求出点  $M$  的坐标, 再验证点  $M$  是否在  $EG$  之间即可.

【详解】(1) 解: 将  $A(-2,0)$ 、 $B(6,0)$ 、 $D(0,8)$  代入抛物线表达式  $y = ax^2 + bx + c$ ,

$$\text{得: } \begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ 36a + 6b + c = 0 \\ c = 8 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{8}{3} \\ c = 8 \end{cases}$$

∴ 抛物线表达式为  $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 8$ ,

将抛物线表达式化为顶点式得:  $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 8 = -\frac{2}{3}(x-2)^2 + \frac{32}{3}$ ,

∴ 顶点  $C$  的坐标为  $(2, \frac{32}{3})$ .

(2) 解: 设直线  $BD$  的解析式为  $y = kx + b$ ,

将  $B(6, 0)$ 、 $D(0, 8)$  代入直线  $BD$  的解析式  $y = kx + b$ ,

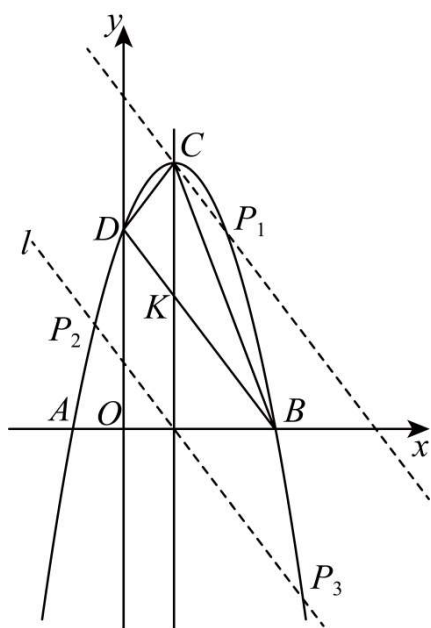
$$\text{得} \begin{cases} 6k + b = 0 \\ b = 8 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = -\frac{4}{3} \\ b = 8 \end{cases},$$

∴ 直线  $BD$  的解析式  $y = -\frac{4}{3}x + 8$ ,

∴ 抛物线的顶点  $C(2, \frac{32}{3})$ ,

∴ 抛物线的对称轴是  $x = 2$ ,

如图, 令对称轴与  $BD$  的交点为  $K$ ,



则由题意得  $\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + 8 \\ x = 2 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{16}{3} \end{cases}$ ,

∴  $K(2, \frac{16}{3})$ ,

∴  $S_{\triangle CBD} = S_{\triangle CDK} + S_{\triangle CKB}$

$$= \frac{1}{2}CK \cdot x_C + \frac{1}{2}CK(x_B - x_C)$$

$$= \frac{1}{2}CK \cdot x_B$$

$$= \frac{1}{2}(y_C - y_K) \cdot x_B$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{32}{3} - \frac{16}{3}\right) \times 6$$

$$= 16,$$

过点  $C$  作  $BD$  的平行线与抛物线相交于点  $P_1$ , 则  $S_{\triangle BDP_1} = S_{\triangle CBD}$ ,

设直线  $CP_1$  的解析式为  $y = -\frac{4}{3}x + b$ ,

将点  $C(2, \frac{32}{3})$  代入直线  $CP_1$  的解析式  $y = -\frac{4}{3}x + b$ ,

$$\text{得} -\frac{4}{3} \times 2 + b = \frac{32}{3}, \text{解得} b = \frac{40}{3},$$

∴ 直线  $CP_1$  的解析式为  $y = -\frac{4}{3}x + \frac{40}{3}$ ,

∴ 得方程组  $\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + \frac{40}{3} \\ y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 8 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{32}{3} \end{cases}$  (舍去),  $\begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases}$ ,

∴  $P_1(4, 8)$ ,

∴ 直线  $CP_1$  的解析式为  $y = -\frac{4}{3}x + \frac{40}{3} = -\frac{4}{3}x + 8 + \frac{16}{3}$ ,

∴ 直线  $CP_1$  是由直线  $BD: y = -\frac{4}{3}x + 8$  向上平移  $\frac{16}{3}$  个单位所得,

将直线  $BD: y = -\frac{4}{3}x + 8$  向下平移  $\frac{16}{3}$  个单位得到直线  $l: y = -\frac{4}{3}x + 8 - \frac{16}{3} = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$ ,

则直线  $l$  与抛物线的交点为点  $P$ , 满足  $S_{\triangle PBD} = S_{\triangle CBD}$ ,

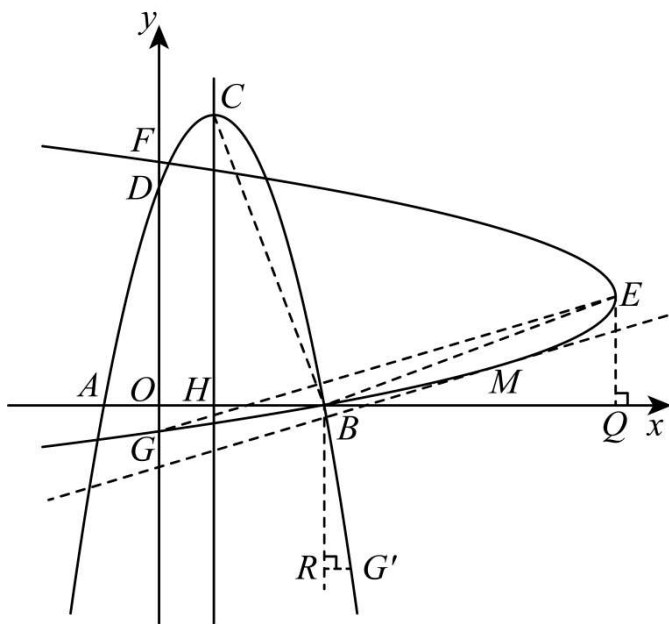
∴ 得方程组  $\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3} \\ y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 8 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} x = 3 + \sqrt{17} \\ y = \frac{-4\sqrt{17}-4}{3} \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x = 3 - \sqrt{17} \\ y = \frac{4\sqrt{17}-4}{3} \end{cases}$ ,

∴  $P_2(3 + \sqrt{17}, \frac{-4\sqrt{17}-4}{3})$ ,  $P_3(3 - \sqrt{17}, \frac{4\sqrt{17}-4}{3})$ ,

综上所述得, 抛物线上存在一点  $P$ , 使得  $S_{\triangle PBD} = S_{\triangle CBD}$ , 点  $P$  的坐标为  $P_1(4, 8)$ ,  $P_2(3 + \sqrt{17}, \frac{-4\sqrt{17}-4}{3})$ ,

$P_3(3 - \sqrt{17}, \frac{4\sqrt{17}-4}{3})$ .

(3) 解: 如图, 令原抛物线的对称轴与  $x$  轴的交点为点  $H$ , 则点  $H$  坐标为  $(2, 0)$ , 连接  $BC$ ,  $BE$ , 过点  $E$  作  $EQ \perp x$  轴, 垂足为点  $Q$ , 连接  $BG$ , 将  $BG$  逆时针旋转  $90^\circ$  得点  $G'$  在原抛物线上, 过点  $B$  作  $y$  轴的平行线  $BR$ , 过点  $G'$  作  $G'R \perp BR$ , 点  $R$  为垂足,



∴ 原抛物线绕点  $B$  顺时针旋转  $90^\circ$ , 顶点  $C$  旋转至

点  $E$ ,

∴  $\angle CBE = 90^\circ$ ,  $BE = BC$ ,

∴  $\angle CHB = 90^\circ$ ,  $\angle BQE = 90^\circ$ ,

∴  $\angle HCB + \angle HBC = 90^\circ$ ,  $\angle HBC + \angle QBE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ,

∴  $\angle HCB = \angle QBE$ ,

在  $\triangle CHB$  和  $\triangle BQE$  中,  $\begin{cases} \angle HCB = \angle QBE \\ \angle CHB = \angle BQE \\ BC = BE \end{cases}$ ,

∴  $\triangle CHB \cong \triangle BQE$ ,

又 ∵  $C(2, \frac{32}{3})$ ,  $B(6, 0)$ ,  $H(2, 0)$

$$\therefore BQ = CH = \frac{32}{3}, EQ = BH = 6 - 2 = 4,$$

$$\therefore x_E = OB + BQ = 6 + \frac{32}{3} = \frac{50}{3}, y_E = 4, \text{即 } E\left(\frac{50}{3}, 4\right),$$

$$\therefore \angle OBG + \angle GBR = 90^\circ, \angle G'BR + \angle GBR = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OBG = \angle RBG',$$

$$\text{又} \because BG = BG', \angle BOG = \angle BRG' = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle OBG \cong \triangle RBG',$$

$$\therefore RG' = OG, BR = BO = 6,$$

$$\therefore y_{G'} = -6,$$

$\therefore$  点  $G'$  在原抛物线上,

$$\text{将 } y_{G'} = -6, \text{ 代入 } y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 8,$$

$$\text{得 } -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 8 = -6, \text{ 解得 } x_1 = -4 (\text{舍去}), x_2 = 7,$$

$$\therefore G'(7, -6),$$

$$\therefore RG' = x_{G'} - x_B = 7 - 6 = 1,$$

$$\therefore OG = RG' = 1,$$

$$\therefore G(0, -1),$$

根据题意设旋转后的抛物线解析式为:  $x = ay^2 + by + c$ ,

$$\text{将 } E\left(\frac{50}{3}, 4\right), B(6, 0), G(0, -1) \text{ 代入抛物线解析式 } x = ay^2 + by + c,$$

$$\text{得 } \begin{cases} 16a + 4b + c = \frac{50}{3} \\ c = 6 \\ a - b + c = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{16}{3} \\ c = 6 \end{cases},$$

$$\therefore \text{旋转后的抛物线解析式为: } x = -\frac{2}{3}y^2 + \frac{16}{3}y + 6,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}CGME} = S_{\triangle CGE} + S_{\triangle GEM}, S_{\triangle CGE} \text{ 的值固定},$$

$$\therefore \text{当 } S_{\triangle GEM} \text{ 最大时, } S_{\text{四边形}CGME} \text{ 有最大值},$$

当与  $GE$  平行的直线与旋转后的抛物线相切时, 切点为  $M$ ,  $S_{\triangle GEM}$  最大,

设直线  $GE$  的解析式为:  $y = kx + b$ ,

$$\text{将 } E\left(\frac{50}{3}, 4\right), G(0, -1) \text{ 代入解析式 } y = kx + b,$$

$$\text{得 } \begin{cases} \frac{50}{3}k + b = 4 \\ b = -1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = \frac{3}{10} \\ b = -1 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } GE \text{ 的解析式为: } y = \frac{3}{10}x - 1,$$

$$\text{设与 } GE \text{ 平行且与旋转后的抛物线相切的切线解析式为: } y = \frac{3}{10}x - 1 + m, \text{ 转化为 } x = \frac{10}{3}y + \frac{10}{3} - \frac{10m}{3},$$

当直线与抛物线相切时只有一个交点,

$$\therefore \text{联立抛物线与切线解析式得 } -\frac{2}{3}y^2 + \frac{16}{3}y + 6 = \frac{10}{3}y + \frac{10}{3} - \frac{10}{3}m,$$

$$\text{去分母, 合并同类项得 } -y^2 + 3y + 4 + 5m = 0,$$

$\therefore$  方程有两个相等实数根,

$$\therefore \Delta = 3^2 - 4 \times (-1)(4 + 5m) = 0,$$

$$\text{解得 } m = -\frac{5}{4},$$

$$\therefore \text{切线的解析式为 } y = \frac{3}{10}x - 1 - \frac{5}{4} = \frac{3}{10}x - \frac{9}{4},$$

$$\text{联立抛物线与切线解析式得 } -\frac{2}{3}y^2 + \frac{16}{3}y + 6 = \frac{10}{3}y - \frac{9}{4}, \text{ 解得 } y = \frac{3}{2},$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3}y^2 + \frac{16}{3}y + 6 = -\frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{16}{3} \times \frac{3}{2} + 6 = \frac{25}{2},$$

$$\therefore \text{切点 } M \text{ 坐标为 } \left(\frac{25}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\because 0 < \frac{25}{2} < \frac{50}{3}, -1 < \frac{3}{2} < 4,$$

$$\therefore M\left(\frac{25}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ 在旋转后的抛物线上 } EG \text{ 之间}$$

故在旋转后抛物线上  $EG$  之间, 存在一点  $M$ , 使得四边形  $CGME$  面积最大, 坐标为  $M\left(\frac{25}{2}, \frac{3}{2}\right)$ .