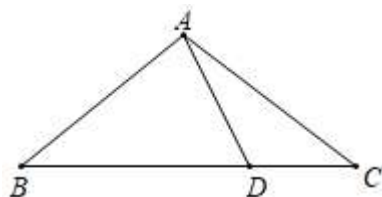


# 2024 年期中考试初二数学定心卷

## 参考答案与解析

1. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC = 5$ ,  $BC = 8$ ,  $D$  是线段  $BC$  上 (不含端点  $B, C$ ) 的动点. 若线段  $AD$  长为正整数, 则点  $D$  的个数共有 ( )



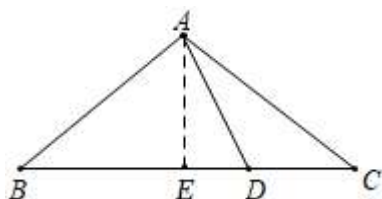
A. 5 个

B. 3 个

C. 2 个

D. 1 个

【解答】解: 过  $A$  作  $AE \perp BC$ ,



$\because AB = AC$ ,

$\therefore EC = BE = \frac{1}{2}BC = 4$ ,

$\therefore AE = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ ,

$\because D$  是线段  $BC$  上的动点 (不含端点  $B, C$ ).

$\therefore 3 \leq AD < 5$ ,

$\therefore AD = 3$  或  $4$ ,

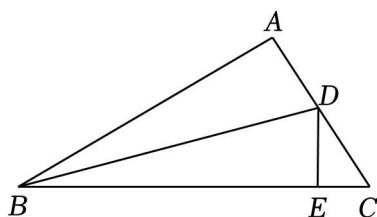
$\because$  线段  $AD$  长为正整数,

$\therefore AD$  的可以有 3 条, 长为  $4, 3, 4$ ,

$\therefore$  点  $D$  的个数共有 3 个,

故选: B.

2. 如图, 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $\angle ABC$  的角平分线交  $AC$  于点  $D$ ,  $DE \perp BC$  于点  $E$ , 若  $\triangle ABC$  与  $\triangle CDE$  的周长分别为 13 和 3, 则  $AB$  的长为 ( )



A. 10

B. 16

C. 8

D. 5

【解答】解:  $\because \angle BAC = 90^\circ$ ,  $BD$  平分  $\angle ABC$ ,  $DE \perp BC$ ,

$\therefore AD = DE$ ,

在  $Rt\triangle ABD$  和  $Rt\triangle EBD$  中,

$$\begin{cases} BD = BD \\ AD = ED \end{cases},$$

$\therefore Rt\triangle ABD \cong Rt\triangle EBD (HL)$ ,

$\therefore AB = BE$ ,

$\because \triangle ABC$  与  $\triangle CDE$  的周长分别为 13 和 3,

$\therefore AB + BC + AC = AB + AC + BE + EC = 13$ ,  $DE + EC + DC = AD + EC + DC = AC + EC = 3$ ,

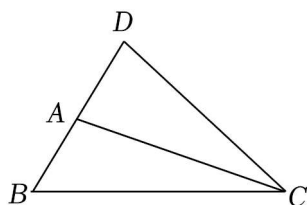
$$\therefore AB + BE = 10,$$

$$\therefore AB = BE = 5.$$

故选: D.

3. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,  $BC = 20$ , 点  $D$  在  $BA$  的延长线上,  $CA = CD$ ,  $BD = 12$ , 则  $AD$  的长为

( )



A. 6

B. 5

C. 4

D. 3

【解答】解: 过  $C$  作  $CH \perp AD$  于  $H$ ,

$$\because CD = CA,$$

$$\therefore DH = AH,$$

$$\because \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BCH = 90^\circ - \angle B = 30^\circ,$$

$$\because \angle BHC = 90^\circ,$$

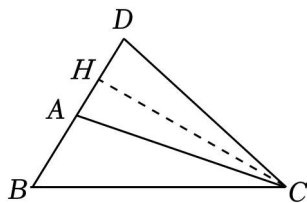
$$\therefore BH = \frac{1}{2}BC = 10,$$

$$\because BD = 12$$

$$\therefore DH = BD - BH = 12 - 10 = 2,$$

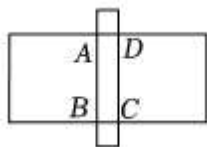
$$AD = 2DH = 4.$$

故选: C.



4. 某中学开展以“杭州亚运会”为主题的学科活动, 要求设计几何图形作品来表达对亚运会的祝福. 小冬以长方形  $ABCD$  的四条边为边分别向外作四个正方形, 设计出“中”字图案, 如图所示. 若长方形  $ABCD$  的相邻两边之差为 8, 且四个正方形的面积和为 160, 则长方形  $ABCD$  的面积是

( )



A. 7

B. 8

C. 9

D. 10

【解答】解: 由题意得:  $AB - BC = 8$ ,

$$\therefore (AB - BC)^2 = 64.$$

$$\therefore AB^2 - 2AB \cdot BC + BC^2 = 64.$$

$$\because \text{四个正方形的面积和为 } 160,$$

$$\therefore 2(AB^2 + BC^2) = 160,$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 = 80,$$

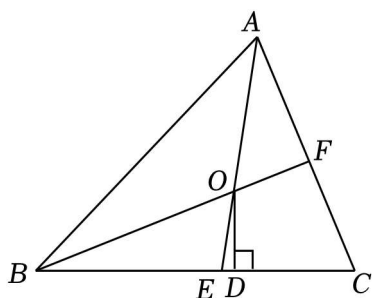
$$\therefore 80 - 2AB \cdot BC = 64,$$

$$\therefore AB \cdot BC = 8.$$

$$\therefore \text{长方形 } ABCD \text{ 的面积} = AB \cdot BC = 8.$$

故选: B.

5. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle BAC$  和  $\angle ABC$  的平分线  $AE$ ,  $BF$  相交于点  $O$ ,  $AE$  交  $BC$  于  $E$ ,  $BF$  交  $AC$  于  $F$ , 过点  $O$  作  $OD \perp BC$  于  $D$ , 下列三个结论: ①  $\angle AOB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C$ ; ② 当  $\angle C = 60^\circ$  时,  $AF + BE = AB$ ; ③ 若  $OD = a$ ,  $AB + BC + CA = 2b$ , 则  $S_{\triangle ABC} = ab$ . 其中正确的是 ( )



A. ①②

B. ②③

C. ①②③

D. ①③

【解答】解: ①  $\because \angle BAC$  和  $\angle ABC$  的平分线相交于点  $O$ ,

$$\therefore \angle OBA = \frac{1}{2}\angle CBA, \angle OAB = \frac{1}{2}\angle CAB,$$

$$\therefore \angle AOB = 180^\circ - \angle OBA - \angle OAB = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle CBA - \frac{1}{2}\angle CAB = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle C) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C, \text{ 故①正确;}$$

$$\text{② } \because \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle ABC = 120^\circ,$$

$\because AE, BF$  分别是  $\angle BAC$  与  $\angle ABC$  的平分线,

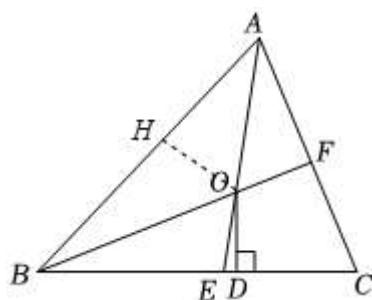
$$\therefore \angle OAB + \angle OBA = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AOF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BOE = 60^\circ,$$

如图, 在  $AB$  上取一点  $H$ , 使  $BH = BE$ , 连接  $OH$ ,



$\because BF$  是  $\angle ABC$  的角平分线,

$$\therefore \angle HBO = \angle EBO,$$

在  $\triangle HBO$  和  $\triangle EBO$  中,

$$\begin{cases} BH = BE \\ \angle HBO = \angle EBO, \\ BO = BO \end{cases}$$

$$\therefore \triangle HBO \cong \triangle EBO (SAS),$$

$$\therefore \angle BOH = \angle BOE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AOH = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AOH = \angle AOF,$$

在  $\triangle HAO$  和  $\triangle FAO$  中,

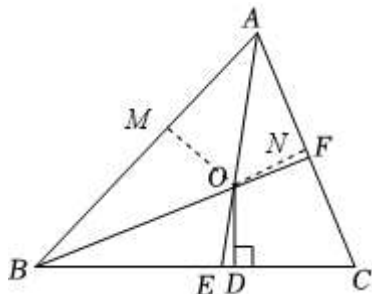
$$\begin{cases} \angle HAO = \angle FAO \\ AO = AO \\ \angle AOH = \angle AOF \end{cases},$$

$\therefore \triangle HAO \cong \triangle FAO (ASA),$

$\therefore AF = AH,$

$\therefore AB = BH + AH = BE + AF,$  故②正确;

③过  $O$  作  $ON \perp AC$  于点  $N$ ,  $OM \perp AB$  于点  $M$ ,



$\therefore \angle BAC$  和  $\angle ABC$  的平分线相交于点  $O$ ,

$\therefore$  点  $O$  在  $\angle C$  的平分线上,

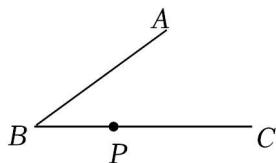
$\therefore ON = OM = OD = a,$

$\therefore AB + AC + BC = 2b$

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times OM + \frac{1}{2} \times AC \times ON + \frac{1}{2} \times BC \times OD = \frac{1}{2} (AB + AC + BC) \cdot a = ab,$  故③正确.

故选: C.

6. 如图, 点  $A$  是射线  $BC$  外一点, 连接  $AB$ , 若  $AB = 5\text{cm}$ , 点  $A$  到  $BC$  的距离为  $3\text{cm}$ , 动点  $P$  从点  $B$  出发沿射线  $BC$  以  $2\text{cm/s}$  的速度运动. 设运动的时间为  $t$  秒, 当  $t$  为 ( ) 秒时,  $\triangle ABP$  为直角三角形.



A.  $\frac{25}{4}$

B.  $\frac{24}{4}$

C. 2 或  $\frac{25}{4}$

D. 2 或  $\frac{25}{8}$

【解答】解: 如图 1, 过点  $A$  作  $AH \perp BC$  于点  $H$ ,

$\therefore$  点  $A$  到  $BC$  的距离为  $3\text{cm}$ ,

$\therefore AH = 3\text{cm}$ ,

在  $Rt\triangle AHB$  中, 由勾股定理得:  $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(\text{cm})$ ,

分两种情况:

①当  $\angle APB = 90^\circ$  时,

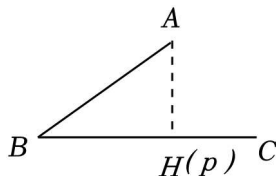


图 1

此时点  $P$  与点  $H$  重合,

由题意得:  $2t = 4$ ,

解得:  $t = 2$ ;

②如图 2, 当  $\angle BAP = 90^\circ$  时,

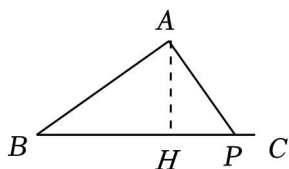


图 2

$\because AB = 5\text{cm}, BP = 2t\text{cm}, AH = 3\text{cm}, BH = 4\text{cm},$

$\therefore HP = (2t - 4)\text{cm},$

由勾股定理得:  $AP^2 = BP^2 - AB^2 = (2t)^2 - 25, AP^2 = AH^2 + HP^2 = 3^2 + (2t - 4)^2,$

$\therefore (2t)^2 - 25 = 3^2 + (2t - 4)^2,$

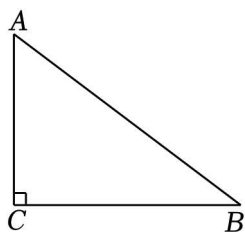
解得:  $t = \frac{25}{8},$

综上所述, 当  $t$  为  $(2 \text{ 或 } \frac{25}{8})$  秒时,  $\triangle ABP$  为直角三角形,

故选: D.

7. 如图, 直角  $\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ, AC = 3, BC = 4$ , 将  $\triangle ABC$  沿  $AB$  折叠得  $\triangle ABD$ , 点  $C$  的对应点为点  $D$ , 则点  $D$  到  $BC$  的距离为 ( )

?



A.  $\frac{12}{5}$

B.  $\frac{24}{5}$

C.  $\frac{96}{25}$

D.  $\frac{12}{5}$  或  $\frac{24}{5}$

【解答】解: 连接  $CD$  交  $AB$  于  $E$ , 过  $D$  作  $DH \perp BC$  于  $H$ ,

$\because$  将  $\triangle ABC$  沿  $AB$  折叠得  $\triangle ABD$ ,

$\therefore CD \perp AB, CE = DE, BC = BD = 4,$

$\because \angle C = 90^\circ, AC = 3, BC = 4,$

$\therefore AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CE,$

$\therefore CE = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5},$

$\therefore CD = \frac{24}{5},$

$\because DH \perp BC,$

$\therefore \angle DHC = \angle DHB,$

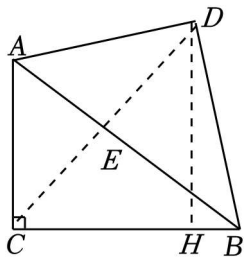
$\therefore CD^2 - CH^2 = BD^2 - BH^2,$

$\therefore \left(\frac{24}{5}\right)^2 - CH^2 = 4^2 - (4 - CH)^2,$

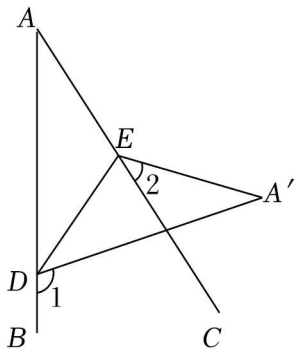
$\therefore CH = \frac{72}{25},$

$\therefore DH = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \frac{96}{25}.$

故选: C.



8. 如图: 已知点  $D$ 、 $E$  分别在  $AB$ 、 $AC$  边上, 将  $\triangle ADE$  沿  $DE$  折叠, 点  $A$  落在  $\angle BAC$  外部的点  $A'$  处, 则  $\angle 1:\angle 2:\angle A$  的比值可能为 ( )



- A. 6:4:1                      B. 6:4:2                      C. 6:4:3                      D. 6:4:4

【解答】解: 由折叠性质可知  $\angle AED = \angle A'ED$ ,  $\angle ADE = \angle A'DE$ ,

$$\therefore \angle 1 = 180^\circ - 2\angle ADE, \angle 2 = 2\angle AED - 180^\circ = 2(180^\circ - \angle DEC') - 180^\circ = 180^\circ - 2\angle DEC,$$

$$\because \angle ADE = \angle DEC - \angle A,$$

$$\therefore \angle 1 = 180^\circ - 2(\angle DEC - \angle A), \text{ 即 } 2\angle DEC = 180^\circ + 2\angle A - \angle 1,$$

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - (180^\circ + 2\angle A - \angle 1), \text{ 即 } \angle 1 - \angle 2 = 2\angle A,$$

若  $\angle 1:\angle 2:\angle A = 6:4:1$ , 设  $\angle A = x$ ,

$$\text{则 } \angle 1 = 6x, \angle 2 = 4x,$$

满足  $\angle 1 - \angle 2 = 2\angle A$ , 故 A 符合题意;

若  $\angle 1:\angle 2:\angle A = 6:4:2$

则不满足  $\angle 1 - \angle 2 = 2\angle A$ , 故 B 不符合题意;

若  $\angle 1:\angle 2:\angle A = 6:4:3$

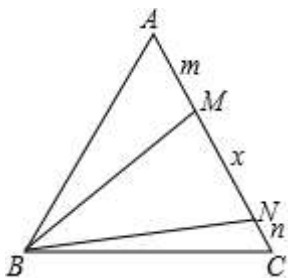
则不满足  $\angle 1 - \angle 2 = 2\angle A$ , 故 C 不符合题意;

若  $\angle 1:\angle 2:\angle A = 6:4:4$

则不满足  $\angle 1 - \angle 2 = 2\angle A$ , 故 D 不符合题意;

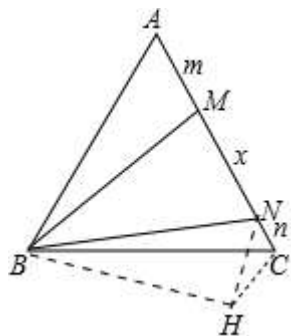
故选: A.

9. 如图, 在等边三角形  $ABC$  中, 在  $AC$  边上取两点  $M$ 、 $N$ , 使  $\angle MBN = 30^\circ$ . 若  $AM = m$ ,  $MN = x$ ,  $CN = n$ , 则以  $x, m, n$  为边长的三角形的形状为 ( )



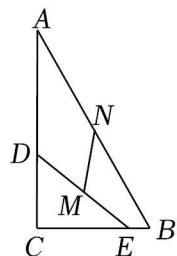
- A. 锐角三角形                      B. 直角三角形                      C. 钝角三角形                      D. 随  $x, m, n$  的值而定

【解答】解: 将  $\triangle ABM$  绕点  $B$  顺时针旋转  $60^\circ$  得到  $\triangle CBH$ . 连接  $HN$ .



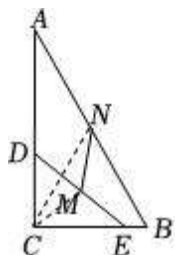
$\because \triangle ABC$  是等边三角形，  
 $\therefore \angle ABC = \angle ACB = \angle A = 60^\circ$ ，  
 $\therefore \angle MBN = 30^\circ$ ，  
 $\therefore \angle ABM + \angle CBN = 30^\circ$ ，  
 $\therefore \angle NBH = \angle CBH + \angle CBN = 30^\circ$ ，  
 $\therefore \angle NBM = \angle NBH$ ，  
 $\because BM = BH, BN = BN$ ，  
 $\therefore \triangle NBM \cong \triangle NBH$ ，  
 $\therefore MN = NH = x$ ，  
 $\because \angle BCH = \angle A = 60^\circ, CH = AM = m$ ，  
 $\therefore \angle NCH = 120^\circ$ ，  
 $\therefore x, m, n$  为边长的三角形  $\triangle NCH$  是钝角三角形，  
 故选：C.

10. 如图， $\triangle ABC$  中  $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $AC = 8$ ， $BC = 6$ ，线段  $DE$  的两个端点  $D, E$  分别在边  $AC, BC$  上滑动，且  $DE = 4$ ，若点  $M, N$  分别是  $DE, AB$  的中点，则  $MN$  的最小值为 ( )

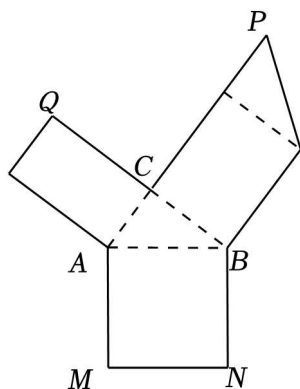


- A. 2                      B. 3                      C. 3.5                      D. 4

**【解答】**解：如图，连接  $CM, CN$ ，  
 $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $AC = 8$ ， $BC = 6$ ，  
 $\because DE = 4$ ，点  $M, N$  分别是  $DE, AB$  的中点，  
 $\therefore CN = \frac{1}{2}AB = 5, CM = \frac{1}{2}DE = 2$ ，  
 当  $C, M, N$  在同一直线上时， $MN$  取最小值，  
 $\therefore MN$  的最小值为： $5 - 2 = 3$ .  
 故选：B.



11. 直三棱柱的表面展开图如图所示,  $AC=3$ ,  $BC=4$ ,  $AB=5$ , 四边形  $AMNB$  是正方形, 将其折叠成直三棱柱后, 下列各点中, 与点  $C$  距离最大的是 ( )



- A. 点  $M$                       B. 点  $N$                       C. 点  $P$                       D. 点  $Q$

【解答】解:  $\because AC=3$ ,  $BC=4$ ,  $AB=5$ , 四边形  $AMNB$  是正方形, 立方体是直三棱柱,

$$\therefore CQ=5,$$

$$\therefore \text{折叠成直三棱柱后 } CM=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34},$$

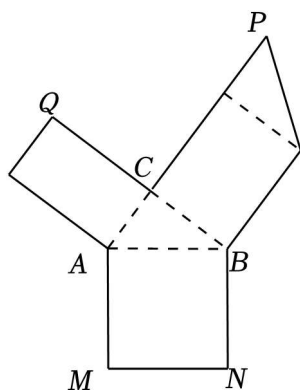
$$\text{折叠成直三棱柱后 } CP=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34},$$

$$\text{折叠成直三棱柱后 } CN=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41},$$

$$\therefore \sqrt{41} > \sqrt{34} > 5,$$

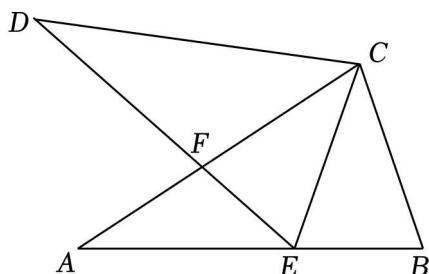
$\therefore$  与点  $C$  距离最大的是点  $N$ .

故选:  $B$ .



12. 如图, 点  $E$  在  $AB$  上,  $AC$  与  $DE$  相交于点  $F$ ,  $\triangle ABC \cong \triangle DEC$ ,  $\angle A=20^\circ$ ,  $\angle B=\angle CEB=65^\circ$ , 则  $\angle DFA$  的度数为 70 度.

?



【解答】解:  $\because \triangle ABC \cong \triangle DEC$ ,

$$\therefore \angle CED = \angle B = 65^\circ,$$

$$\because \angle B = \angle CEB = 65^\circ,$$

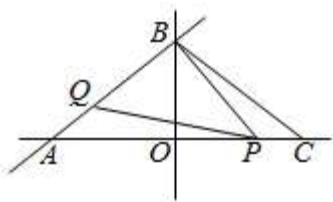
$$\therefore \angle AEF = 180^\circ - \angle CEB - \angle CED = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle DFA = \angle A + \angle AEF = 20^\circ + 50^\circ = 70^\circ.$$

? 故答案为: 70.



13. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $OA=4$ , $OB=3$ , $C$ 点与 $A$ 点关于直线 $OB$ 对称,动点 $P$ 、 $Q$ 分别在线段 $AC$ 、 $AB$ 上(点 $P$ 不与点 $A$ 、 $C$ 重合),满足 $\angle BPQ = \angle BAO$ . 当 $\triangle PQB$ 为等腰三角形时, $OP$ 的长度是 1或 $\frac{7}{8}$ .



【解答】解： $\because OA=4$ ,  $OB=3$ ,  $C$ 点与 $A$ 点关于直线 $OB$ 对称，

$$\therefore BC=AB=\sqrt{4^2+3^2}=5,$$

分为3种情况：

①当 $PB=PQ$ 时，

$\because C$ 点与 $A$ 点关于直线 $OB$ 对称，

$$\therefore \angle BAO = \angle BCO,$$

$$\therefore \angle BPQ = \angle BAO,$$

$$\therefore \angle BPQ = \angle BCO,$$

$$\therefore \angle APB = \angle APQ + \angle BPQ = \angle BCO + \angle CBP,$$

$$\therefore \angle APQ = \angle CBP,$$

在 $\triangle APQ$ 与 $\triangle CBP$ 中，

$$\begin{cases} \angle QAP = \angle PCB \\ \angle APQ = \angle CBP \\ QP = PB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle APQ \cong \triangle CBP (AAS),$$

$$\therefore PA = BC,$$

$$\text{此时 } OP = 5 - 4 = 1;$$

②当 $BQ=BP$ 时，

$$\angle BPQ = \angle BQP,$$

$$\therefore \angle BPQ = \angle BAO,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle BQP,$$

根据三角形外角性质得： $\angle BQP > \angle BAO$ ,

$\therefore$ 这种情况不存在；

③当 $QB=QP$ 时，

$$\angle QBP = \angle BPQ = \angle BAO,$$

$$\therefore PB = PA,$$

设 $OP=x$ , 则 $PB=PA=4-x$ ,

在 $Rt\triangle OBP$ 中, $PB^2=OP^2+OB^2$ ,

$$\therefore (4-x)^2 = x^2 + 3^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{7}{8};$$

$\because$ 点 $P$ 在 $AC$ 上，

$\therefore$ 点 $P$ 在点 $O$ 左边，

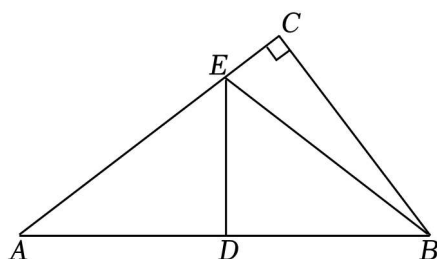
$$\text{此时 } OP = \frac{7}{8}.$$

$\therefore$ 当 $\triangle PQB$ 为等腰三角形时, $OP$ 的长度是1或 $\frac{7}{8}$ .

故答案为: 1或 $\frac{7}{8}$ .

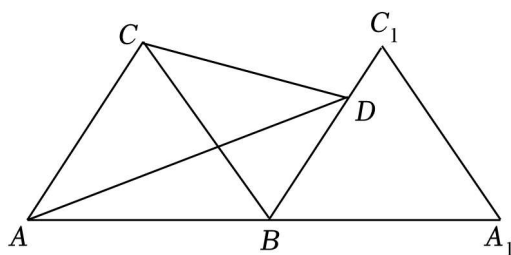
14. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=40^\circ$ , $\angle C=90^\circ$ ,线段 $AB$ 的垂直平分线交 $AB$ 于点 $D$ ,交 $AC$ 于点 $E$ ,则 $\angle EBC=$

\_\_\_\_\_  $10^\circ$  \_\_\_\_\_.

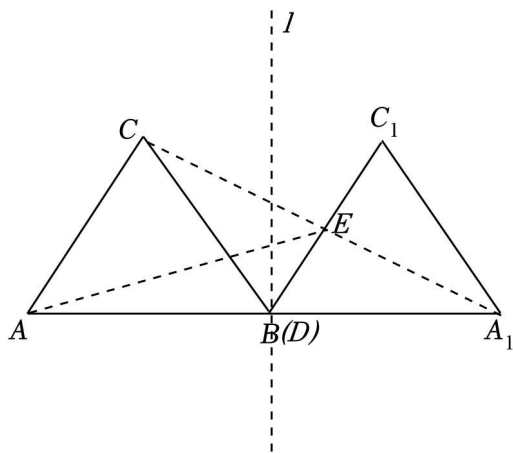


【解答】解： $\because \angle C = 90^\circ, \angle A = 40^\circ,$   
 $\therefore \angle ABC = 90^\circ - \angle A = 50^\circ,$   
 $\because DE$  是线段  $AB$  的垂直平分线，  
 $\therefore AE = BE,$   
 $\therefore \angle EBA = \angle A = 40^\circ,$   
 $\therefore \angle EBC = \angle ABC - \angle EBA = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ,$   
 故答案为： $10^\circ$ .

15. 如图， $\triangle ABC$  与  $\triangle A_1BC_1$  是全等的两个等边三角形， $A, B, A_1$  在同一条直线上， $D$  为线段  $BC_1$  上一动点，若  $AD + CD$  的最小值为 5，则等边三角形  $ABC$  的边长为 \_\_\_\_\_  $\frac{5}{2}$  \_\_\_\_\_.



【解答】解：连接  $CA_1$  交  $BC_1$  于点  $E$ ，过  $B$  点作直线  $l$  垂直  $AA_1$ ，  
 $\because$  直线  $l \perp AB$ ，且  $\triangle ABC$  与  $\triangle A_1BC_1$  关于直线  $l$  对称，  
 $\therefore A, B, A_1$  共线，  
 $\because \angle ABC = \angle A_1BC_1 = 60^\circ,$   
 $\therefore \angle CBC_1 = 60^\circ,$   
 $\therefore \angle C_1BA_1 = \angle C_1BC,$   
 $\because BA_1 = BC,$   
 $\therefore BD \perp CA_1, CD = DA_1,$   
 $\therefore C, A_1$  关于直线  $BC_1$  对称，  
 $\therefore$  当点  $D$  与  $B$  重合时， $AD + CD$  的值最小，最小值为线段  $AA_1$  的长  $= 5$ ，  
 $\therefore$  等边三角形  $ABC$  的边长为  $\frac{1}{2}AA' = \frac{5}{2},$   
 故答案为： $\frac{5}{2}$ .



16. 请同学们运用公式  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$  解决问题: 已知  $a, b, c$  满足  $a^2 + b^2 + c^2 = 6$ , 则  $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$  的最小值为 6.

【解答】解:  $\because (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = a^2 + b^2 + c^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2$ ,

$$\therefore (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 = 6 + (a+b+c)^2 \geq 6,$$

$\therefore$  当  $a+b+c=0$  时,  $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2$  的最小值为 6,

故答案为: 6.

17. 若  $x - 2y - 1 = 0$ , 则  $2^x \div 4^y \times 8$  等于 16.

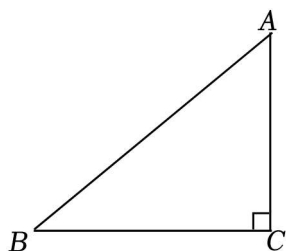
【解答】解:  $\because x - 2y - 1 = 0$ ,

$$\therefore x - 2y = 1,$$

$$\therefore 2^x \div 4^y \times 8 = 2^x \div 2^{2y} \times 8 = 2^{x-2y} \times 8 = 2 \times 8 = 16.$$

故答案为: 16.

18. 如图, 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AB = 5$ ,  $AC = 3$ , 点  $M, N$  分别为  $BC, AB$  上的动点, 则  $AM + MN$  的最小值为  $\frac{24}{5}$ .



【解答】解: 作  $A$  关于  $CB$  的对称点  $D$ , 连接  $DM, DN, BD$ ,

$$\therefore AM = MD, CD = AC = 3,$$

$$\therefore MN + MD \geq DN,$$

$$\therefore NM + AM \geq DN,$$

当  $DN \perp AB$  时,  $DN$  长最小,

$$\because \angle ACB = 90^\circ, AB = 5, AC = 3,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 4,$$

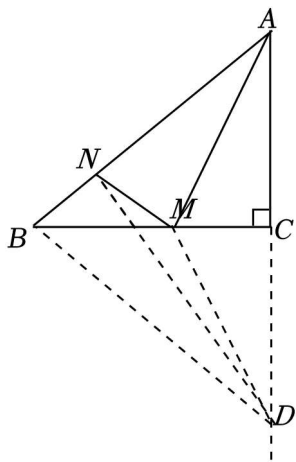
$$\therefore \triangle ABD \text{ 的面积} = \frac{1}{2} AB \cdot DN = \frac{1}{2} AD \cdot BC,$$

$$\therefore 5DN = 6 \times 4,$$

$$\therefore DN = \frac{24}{5}$$

$$\therefore AM + MN \text{ 的最小值是 } \frac{24}{5}.$$

故答案为： $\frac{24}{5}$ .



19. 课外兴趣小组活动时,老师提出了如下问题:如图1,  $\triangle ABC$  中,若  $AB=6$ ,  $AC=4$ ,求  $BC$  边上的中线  $AD$  的取值范围. 小明在组内经过合作交流,得到了如下的解决方法:如图1所示,延长  $AD$  到点  $E$ ,使  $DE=AD$ ,连接  $BE$ . 请根据小明的思路继续思考:

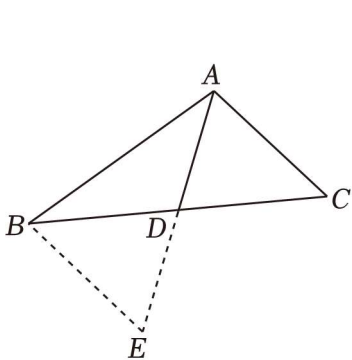


图1

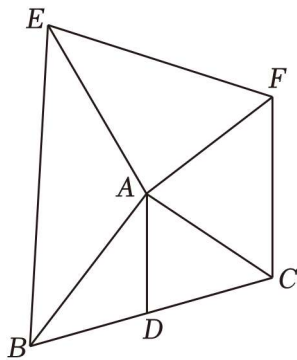


图2

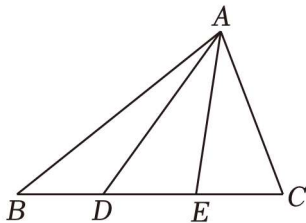


图3

(1) 由已知和作图能证得  $\triangle ADC \cong \triangle EDB$ ,得到  $BE=AC$ ,在  $\triangle ABE$  中求得  $2AD$  的取值范围,从而求得  $AD$  的取值范围是  $1 < AD < 5$ .

方法总结:上述方法我们称为“倍长中线法”. “倍长中线法”多用于构造全等三角形和证明边之间的关系.

(2) 如图2,  $AD$  是  $\triangle ABC$  的中线,  $AB=AE$ ,  $AC=AF$ ,  $\angle BAE + \angle CAF = 180^\circ$ ,试判断线段  $AD$  与  $EF$  的数量关系,并加以证明.

(3) 如图3,在  $\triangle ABC$  中,  $D, E$  是  $BC$  的三等分点. 求证:  $AB + AC > AD + AE$ .

【解答】(1) 解:在  $\triangle ADC$  和  $\triangle EDB$  中,

$$\begin{cases} BD=CD \\ \angle BDE=\angle CDA, \\ AD=DE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle EDB(SAS)$ ,

$\therefore AC=BE=4$ ,

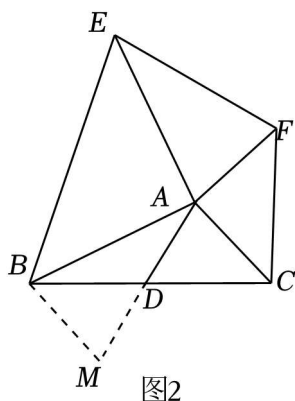
$\therefore AB-BE < AE < AB+BE$ ,

$\therefore 1 < AD < 5$ ,

故答案为:  $1 < AD < 5$ ;

(2) 解:  $EF=2AD$ ,

理由:如图2,延长  $AD$  到  $M$ ,使得  $DM=AD$ ,连接  $BM$ ,



由(1)知,  $\triangle BDM \cong \triangle CDA(SAS)$ ,

$$\therefore BM = AC,$$

$$\because AC = AF,$$

$$\therefore BM = AF,$$

由(2)知:  $AC \parallel BM$ ,

$$\therefore \angle BAC + \angle ABM = 180^\circ,$$

$$\because \angle BAE + \angle CAF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle EAF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABM = \angle EAF,$$

在  $\triangle ABM$  和  $\triangle EAF$  中,

$$\begin{cases} AB = EA \\ \angle ABM = \angle EAF, \\ BM = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle EAF(SAS),$$

$$\therefore AM = EF,$$

$$\because AD = DM,$$

$$\therefore AM = 2AD,$$

$$\because AM = EF,$$

$$\therefore EF = 2AD,$$

$$\text{即: } EF = 2AD.$$

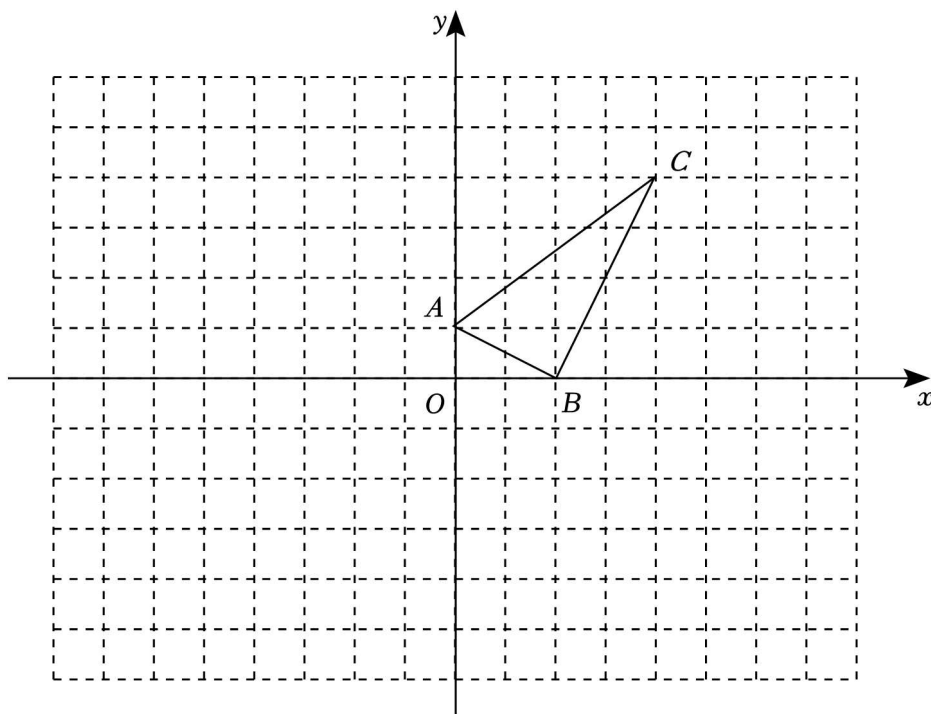
(3) 证明: 由题知  $E$  为  $CD$  的中点, 同理(1)知  $AC + AD > 2AE$  ①,

又  $\because D$  是  $BE$  的中点, 同理(1)知  $AB + AE > 2AD$  ②,

$$\text{①} + \text{②} \text{ 得 } AC + AD + AB + AE > 2AE + 2AD,$$

$$\text{即 } AB + AC > AD + AE.$$

20. 如图, 在平面直角坐标系中,  $\triangle ABC$  的顶点  $A(0, 1)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(4, 4)$  均在正方形网格的格点上.



- (1) 画出  $\triangle ABC$  关于  $x$  轴对称的图形  $\triangle A_1B_1C_1$ , 并写出顶点  $A_1, B_1, C_1$  的坐标;  
 (2) 求  $\triangle ABC$  的面积;  
 (3) 在  $x$  轴上找一点  $P$ , 使得  $\triangle PAC$  的周长最小 (保留作图痕迹).

【解答】解: (1) 如图 1 所示,  $\triangle A_1B_1C_1$  即为所求,

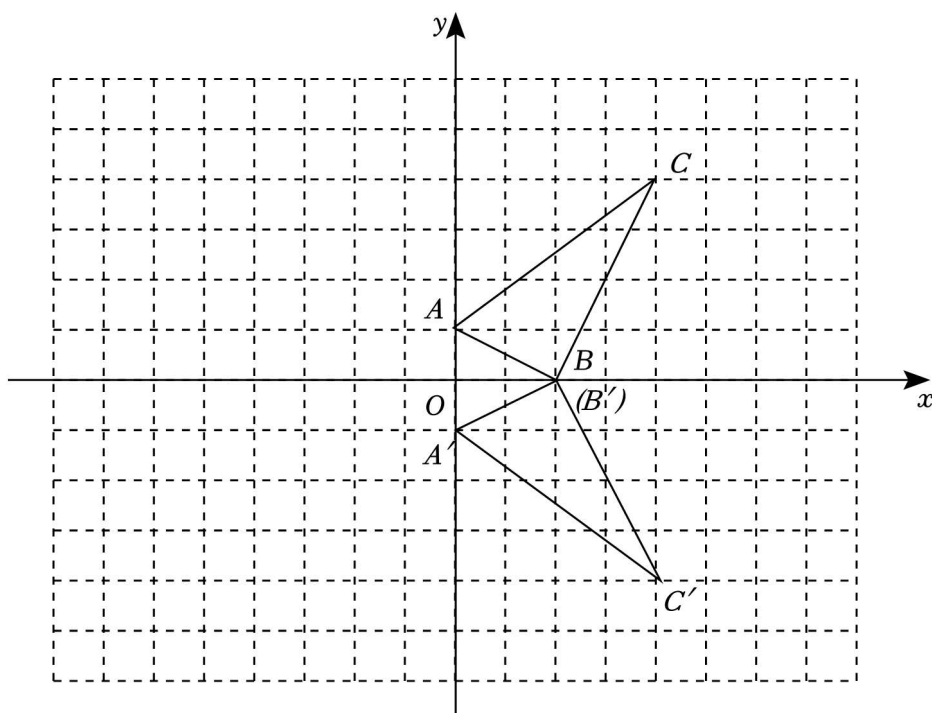


图1

顶点  $A_1, B_1, C_1$  的坐标分别为  $A_1(0, -1), B_1(2, 0), C_1(4, -4)$ ;

(2)  $S_{\triangle ABC} = 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 5$ ;

(3) 如图 2 所示, 点  $P$  即为所求.



$$\therefore \angle ADF + \angle AEC = \angle ADF + \angle ADB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE + \angle DFE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BFC + \angle DFE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BFC = \angle DAE = \angle BAC.$$

(2) 当点  $D$  在  $\triangle ABC$  的内部时, 如图 2 甲, 延长  $BD$  交  $CE$  于点  $F$ ,

$$\therefore AB = AC, AD = AE, \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BFC = \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = 62^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BFC + \angle DCE = 90^\circ + 62^\circ = 152^\circ;$$

当点  $D$  在  $\triangle ABC$  的外部时, 如图 2 乙,  $BD$  交  $CE$  于点  $F$ , 交  $AC$  于点  $G$ ,

$$\therefore \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE = 90^\circ + \angle CAD,$$

在  $\triangle BAD$  和  $\triangle CAE$  中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE (SAS),$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle CGD = \angle AGB,$$

$$\therefore \angle ACE + \angle CGD = \angle ABD + \angle AGB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BFC - \angle DCE = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ,$$

综上所述,  $\angle BDC = 152^\circ$  或  $\angle BDC = 28^\circ$ .

(3) 如图 3, 连接  $AC$ 、 $BD$  交于点  $F$ ,

$$\therefore OA = OB, OC = OD, \angle AOB = \angle COD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BFC = \angle COD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle AFD = \angle CFD = 90^\circ,$$

$$\therefore AD^2 = FA^2 + FD^2, BC^2 = FB^2 + FC^2, AB^2 = FA^2 + FB^2, CD^2 = FC^2 + FD^2,$$

$$\therefore AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2 = FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2,$$

$$\therefore AB = 6, BC = 4, CD = 5,$$

$$\therefore AD^2 + 4^2 = 6^2 + 5^2,$$

$$\therefore AD = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore AD \text{ 的长为 } 3\sqrt{5}.$$

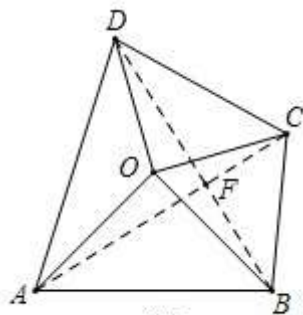


图3



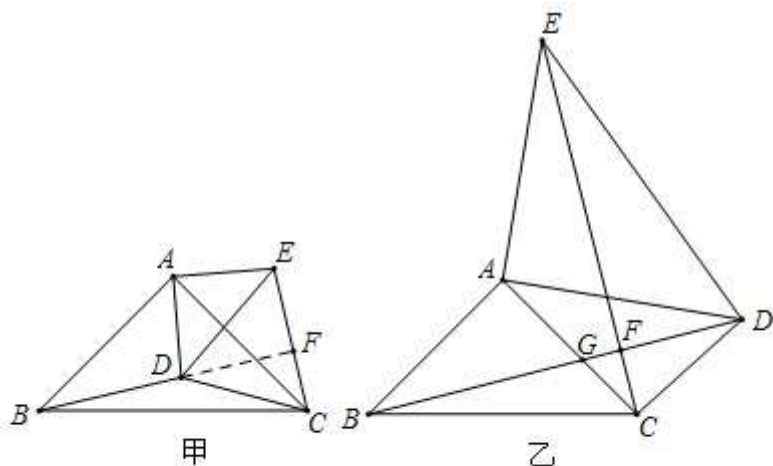


图2

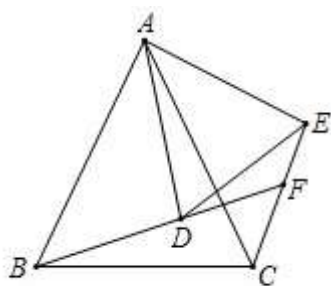


图1

22. 课堂上学习了勾股定理后知道：直角三角形三边长是整数时我们称之为“勾股数”。王老师给出一组数让学生观察：3、4、5；5、12、13；7、24、25；9、40、41；…，学生发现这些勾股数的勾都是奇数，且从3起就没有间断过，于是王老师提出以下问题让学生解决。

若两直角边为  $a, b (a < b)$ ，斜边为  $c$ 。

(1) 请你根据上述的规律写出下一组勾股数：11、60、61；

(2) 当  $a = n (n \text{ 为奇数, 且 } n \geq 3)$  时，若  $b = \frac{n^2-1}{2}$ ， $c = \frac{n^2+1}{2}$  时可以构造出勾股数 (用含  $n$  的代数式表示)；并证明你的猜想；

(3) 当  $a = n (n \text{ 为偶数, 且 } n > 4)$  时，若  $b = \frac{n^2}{4} - 1$ ， $c = \frac{n^2}{4} + 1$  时可以构造出勾股数 (用含  $n$  的代数式表示)；

(4) 构造勾股数的方法很多，请你寻找当  $a = 20$  时， $c = \frac{n^2}{4} + 1$ 。

【解答】解：(1)  $\because 3, 4, 5; 5, 12, 13; 7, 24, 25; 9, 40, 41; \dots$ ,

$\therefore 11, 60, 61$ ;

故答案为：60, 61。

(2) 观察发现：当  $a = n (n \text{ 为奇数, 且 } n \geq 3)$  时，则股是勾的平方减去1的二分之一，弦是勾的平方加1的二分之一；

则用含  $n$  的代数式表示每组第二个数和第三个数分别为： $\frac{n^2-1}{2}, \frac{n^2+1}{2}$ ；

证明如下：

$$\because n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \frac{n^4+2n^2+1}{4}, \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 = \frac{n^4+2n^2+1}{4},$$

$$\therefore n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2,$$

又  $\because n$  为奇数，且  $n \geq 3$ ，

$\therefore n, \frac{n^2-1}{2}, \frac{n^2+1}{2}$  三个数组成的数是勾股数。

(3) 观察发现：当  $a = n (n \text{ 为偶数, 且 } n \geq 5)$  时，则股是勾的平方的四分之一减一，弦是勾的平方的四分之一加一；

则用含  $n$  的代数式表示每组第二个数和第三个数分别为： $\frac{n^2}{4} - 1, \frac{n^2}{4} + 1$ ；

证明如下：

$$\because n^2 + \left(\frac{n^2}{4} - 1\right)^2 = \frac{n^4 + 8n^2 + 16}{16}, \left(\frac{n^2}{4} + 1\right)^2 = \frac{n^4 + 8n^2 + 16}{4},$$

$$\therefore n^2 + \left(\frac{n^2}{4} - 1\right)^2 = \left(\frac{n^2}{2} + 1\right)^2,$$

又  $\because n$  为偶数, 且  $n \geq 5$ ,

$\therefore n, \frac{n^2}{4} - 1, \frac{n^2}{4} + 1$  三个数组成的数是勾股数.

故答案为:  $\frac{n^2}{4} - 1, \frac{n^2}{4} + 1$ ;

(4) 由勾股定理可得:  $a^2 + b^2 = c^2$ ,

当  $a = n = 20$ , 则有:  $c^2 - b^2 = 20^2$ , 即  $(c - b)(c + b) = 400$ ,

$$\text{当 } \begin{cases} c - b = 10 \\ c + b = 40 \end{cases},$$

解得:  $c = 25$ ;

$$\text{当 } \begin{cases} c - b = 4 \\ c + b = 100 \end{cases},$$

解得:  $c = 52$ ;

$$\text{当 } \begin{cases} c - b = 2 \\ c + b = 200 \end{cases},$$

解得:  $c = 101$ ;

$$\text{当 } \begin{cases} c - b = 8 \\ c + b = 50 \end{cases},$$

解得:  $c = 29$ .

综上,  $c$  的值为 25 或 52 或 101 或 29.

故答案为: 25 或 52 或 101 或 29.

23. 如图, 在四边形  $ABDE$  中,  $\triangle ABC$ 、 $\triangle DCE$  是等腰直角三角形, 且  $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ,  $\angle BCD$  为锐角;

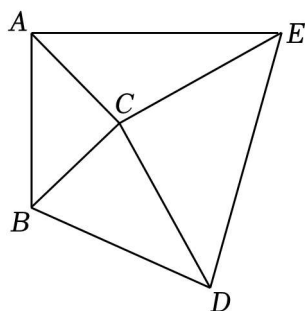


图1

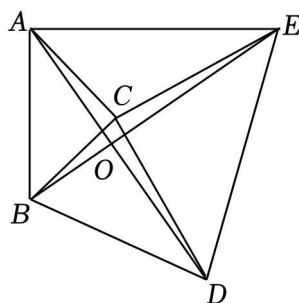


图2

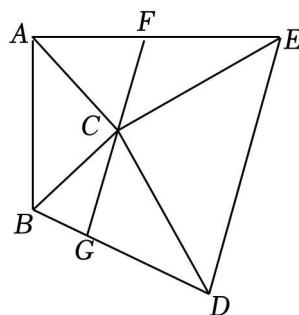


图3

(1) 在图 1 中,  $\triangle ACE$  与  $\triangle BCD$  面积相等吗? 请说明理由.

(2) 如图 2, 若  $AC = 4$ ,  $CD = 5$ . 则四边形  $ABDC$  面积最大值为 18.

(3) 如图 3, 已知  $BD = 6$ ,  $\triangle ACE$  的面积为 10,  $G$  在  $BD$  边上,  $GC$  的延长线经过  $AE$  中点  $F$ , 求  $CG$  的长.

【解答】解: (1)  $\triangle ACE$  与  $\triangle BCD$  面积相等, 理由如下:

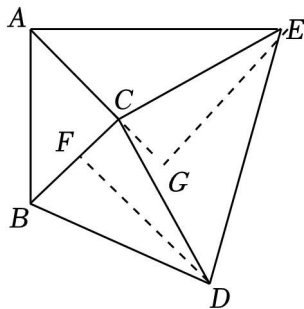


图1

如图,过点  $E$  作  $EG \perp AC$  交  $AC$  的延长线于  $G$ ,过点  $D$  作  $DF \perp BC$  于  $F$ ,

$$\therefore \angle EGC = \angle DFC = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\because \angle ACE + \angle ECG = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ECG = \angle BCD,$$

在  $\triangle EGC$  和  $\triangle DFC$  中,

$$\begin{cases} \angle EGC = \angle DFC = 90^\circ \\ \angle ECG = \angle FCD \\ CE = CD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle EGC \cong \triangle DFC (AAS),$$

$$\therefore EG = DF,$$

$$\because AC = BC,$$

$$\therefore S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} AC \cdot EG = \frac{1}{2} BC \cdot DF = S_{\triangle BCD},$$

即  $\triangle ACE$  与  $\triangle BCD$  面积相等.

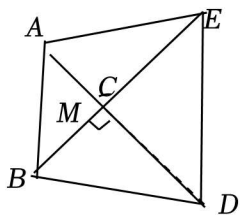
(2) 由题意得:  $AC = 4$ ,  $CD = 5$ ,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8,$$

即  $\triangle ABC$  的面积为定值,

$\therefore$  当  $\triangle BCD$  的面积最大时, 四边形  $ABDC$  面积最大,

如图,过点  $D$  作  $DM \perp BC$  于  $M$ ,



$$\therefore DM \leq CD,$$

当点  $M$  与点  $C$  重合时,  $DM$  最大, 此时  $DC \perp BC$ ,

$$\text{此时 } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABDC \text{ 面积最大值为: } 8 + 10 = 18.$$

故答案为: 18.

(3) 如图,过点  $E$  作  $EN \parallel AC$  交  $CF$  的延长线于点  $N$ ,

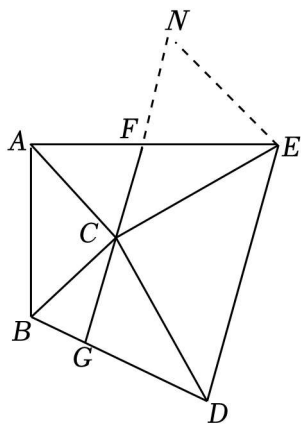


图3

则  $\angle CAF = \angle NEF$ ,  $\angle ACF = \angle N$ ;

$\because$  点  $F$  是中点,

$\therefore EF = AF$ ,

在  $\triangle EFN$  和  $\triangle AFC$  中,

$$\begin{cases} \angle CAF = \angle NEF \\ \angle ACF = \angle N \\ EF = AF \end{cases},$$

$\therefore \triangle EFN \cong \triangle AFC (AAS)$ ,

$\therefore EN = AC$ ,

$\because AC = BC$ ,

$\therefore EN = BC$ ,

$\because \angle N + \angle ECF = 180^\circ - \angle NEC$ ,

$\angle ACE = \angle ACF + \angle ECF = 180^\circ - \angle BCD$ ,

$\therefore \angle NEC = \angle BCD$ ,

在  $\triangle CEN$  和  $\triangle DCB$  中,

$$\begin{cases} CE = CD \\ \angle NEC = \angle BCD \\ EN = BC \end{cases},$$

$\therefore \triangle CEN \cong \triangle DCB (SAS)$ ,

$\therefore \angle NCE = \angle BDC$ ,

$\because \angle DCE = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle NCE + \angle DCG = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle BDC + \angle DCG = 90^\circ$ ,

$\therefore CG \perp BD$ ,

$\because \triangle ACE$  与  $\triangle BCD$  面积相等,

$$\therefore S_{\triangle BDC} = 10 = \frac{1}{2} BD \cdot CG,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 6CG = 10,$$

$$\therefore CG = \frac{10}{3}.$$

24. 先阅读下面的文字,再回答问题:大家知道  $\sqrt{2}$  是无理数,而无理数是无限不循环小数,因此  $\sqrt{2}$  的小数部分我们不可能全部写出来,于是小明用  $\sqrt{2} - 1$  来表示  $\sqrt{2}$  的小数部分,你同意小明的表示方法吗?事实上,小明的表示方法是有道理的. 因为  $\sqrt{2}$  的整数部分是1,所以将  $\sqrt{2}$  减去其整数部分,所得的差就是  $\sqrt{2}$  的小数部分. 例如:  $\because \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$ , 即  $2 < \sqrt{7} < 3$ .  $\therefore \sqrt{7}$  的整数部分为2,小数部分为  $\sqrt{7} - 2$ .

(1)  $\sqrt{19}$  的整数部分是 4, 小数部分是         .

(2) 如果  $\sqrt{5}$  的小数部分为  $a$ ,  $\sqrt{11}$  的整数部分为  $b$ , 求  $a + b - \sqrt{5}$  的值;

(3) 已知  $9 + \sqrt{3} = x + y$ , 其中  $x$  是整数, 且  $0 < y < 1$ , 求  $x - y$  的值.

【解答】解: (1)  $\because 16 < 19 < 25$ ,

$$\therefore 4 < \sqrt{19} < 5,$$

$\therefore \sqrt{19}$  的整数部分是 4, 小数部分是  $\sqrt{19} - 4$ ;

故答案为: 4,  $\sqrt{19} - 4$ ;

$$(2) \because 4 < 5 < 9, 9 < 11 < 16,$$

$$\therefore \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}, \sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16},$$

$$\text{即 } 2 < \sqrt{5} < 3, 3 < \sqrt{11} < 4,$$

$$\therefore \sqrt{5} \text{ 的小数部分为 } \sqrt{5} - 2, \text{ 即 } a = \sqrt{5} - 2,$$

$$\therefore \sqrt{11} \text{ 的整数部分为 } 3, \text{ 即 } b = 3,$$

$$\text{则 } a + b - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5} = 1;$$

$$(3) \because 1 < 3 < 4,$$

$$\therefore \sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}, \text{ 即 } 1 < \sqrt{3} < 2,$$

$$\therefore 10 < 9 + \sqrt{3} < 11,$$

$$\therefore 10 < x + y = 9 + \sqrt{3} < 11,$$

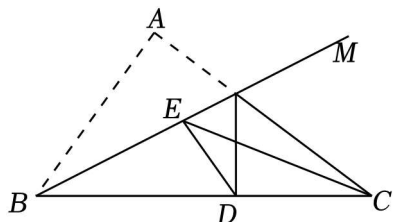
$\because x$  是整数, 且  $0 < y < 1$

$$\therefore x = 10, y = \sqrt{3} - 1$$

$$\therefore x - y = 10 - (\sqrt{3} - 1) = 11 - \sqrt{3}$$

则  $x - y$  的值是  $11 - \sqrt{3}$ .

25. 如图,  $\triangle ABC$  中,  $AB = 6$ ,  $AC = 8$ ,  $BC = 10$ . 将  $\triangle ABC$  沿射线  $BM$  折叠, 使点  $A$  与  $BC$  边上的点  $D$  重合,  $E$  为射线  $BM$  上一个动点, 当  $\triangle CDE$  周长最小时,  $CE$  的长为 5.



【解答】解: 由题意得:

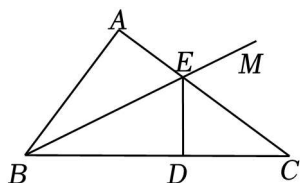
$A, D$  两点关于射线  $BM$  对称,

$$\therefore C_{\triangle CDE} = CD + DE + CE,$$

$\because CD$  为定值, 要使  $\triangle CDE$  周长最小,

即  $DE + CE$  最小,

$\therefore$  如图, 当点  $E$  为  $AC$  与射线  $BM$  的交点时,  $\triangle CDE$  周长最小,



$$\because AB = 6, AC = 8, BC = 10,$$

$$AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100,$$

$$BC^2 = 10^2 = 100,$$

$$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

$\therefore \triangle ABC$  为直角三角形,

$$\therefore \angle BAC = \angle BDE = \angle CDE = 90^\circ,$$

$\because AB = BD = 6$ ,  
 $\therefore CD = BC - BD = 10 - 6 = 4$ ,  
 设  $CE = x$ , 则  $AE = DE = AC - CE = 8 - x$ ,  
 在  $Rt\triangle CDE$  中,  
 $CE^2 = DE^2 + CD^2$ ,  
 即  $x^2 = (8 - x)^2 + 4^2$ ,  
 解得:  $x = 5$ ,  
 $\therefore CE = 5$ ,  
 故答案为: 5.

26. 【教材呈现】如图是苏教版八年级上册数学教材 65 页的部分内容.

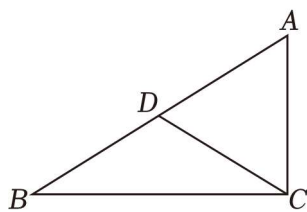
定理: 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

小明给出上述定理证明中的部分演绎推理的过程如下:

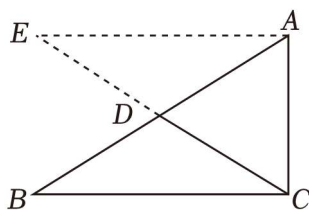
已知: 如图 1, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $CD$  为斜边  $AB$  上的中线. 求证:  $CD = \frac{1}{2}AB$ .

证明: 如图 2, 过点  $A$  作  $AE \parallel BC$ , 交  $CD$  的延长线于点  $E$ .

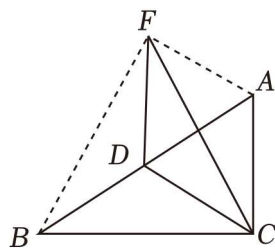
【问题解决】请结合图 2 将证明过程补充完整.



(图1)



(图2)



(图3)

【问题再探】如图 3, 将  $Rt\triangle ABC$  的  $BC$  边沿着斜边上的中线  $CD$  折叠到  $CF$ , 连接  $AF$ 、 $BF$ .

(1) 求证:  $\angle AFB = 90^\circ$ ;

(2) 若  $AC = 8$ ,  $BC = 15$ , 直接写出  $AF = \frac{161}{17}$ .

【解答】【问题解决】证明: 如图 2, 过点  $A$  作  $AE \parallel BC$ , 交  $CD$  的延长线于点  $E$ ,

$\therefore \angle EAD = \angle B$ ,  $\angle E = \angle BCD$ ,

$\because CD$  为斜边  $AB$  上的中线,

$\therefore AD = BD$ ,

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BDC (AAS)$ ,

$\therefore AE = BC$ ,  $DE = CD$ ,

$\therefore CD = \frac{1}{2}CE$ ,

$\because AE \parallel BC$ ,

$\therefore \angle EAC + \angle ACB = 180^\circ$ ,

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle EAC = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle ACB = \angle CAE$ ,

$\because BC = AE$ ,  $AC = CA$ ,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CEA (SAS)$ ,

$\therefore AB = CE$ ,

$\therefore CD = \frac{1}{2}AB$ .

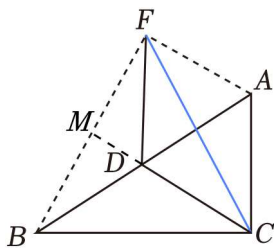
【问题再探】解: (1) 由折叠的性质得到  $BD = DF$ ,

$\because CD$  为斜边  $AB$  上的中线,

$\therefore AD = BD$ ,

$$\begin{aligned}
&\therefore AD = BD = DF, \\
&\therefore \angle DBF = \angle DFB, \angle DAF = \angle DFA, \\
&\therefore \angle DFA + \angle DFB = \angle DBF + \angle DAF, \\
&\therefore \angle DFA + \angle DFB + \angle DBF + \angle DAF = 180^\circ, \\
&\therefore \angle DFA + \angle DFB = 90^\circ, \\
&\therefore \angle AFB = 90^\circ;
\end{aligned}$$

(2) 延长  $CD$  交  $BF$  于  $M$ ,



$$\because \angle ACB = 90^\circ, AC = 8, BC = 15,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 17,$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = 8.5,$$

由折叠的性质得到  $BC = FC$ ,  $\angle BCD = \angle FCD$ ,

$$\therefore CM \perp FB,$$

$$\therefore AF \perp BF,$$

$$\therefore DM \parallel AF,$$

$$\therefore BD = AD,$$

$$\therefore BM = FM,$$

$\therefore DM$  是  $\triangle BAF$  的中位线,

$$\therefore AF = 2DM,$$

令  $DM = x$ ,  $BF = y$ , 则  $AF = 2x$ ,  $CM = CD + DM = x + 8.5$ ,

$$\therefore AF^2 + BF^2 = AB^2, FM^2 + CM^2 = CF^2,$$

$$\therefore (2x)^2 + y^2 = 17^2, \left(\frac{1}{2}y\right)^2 + (x + 8.5)^2 = 15^2,$$

$$\therefore x = \frac{161}{34},$$

$$\therefore AF = 2x = \frac{161}{17}.$$

故答案为:  $\frac{161}{17}$ .

27. 规定  $(a, b)$  表示一对数对, 给出如下定义:  $m = \frac{1}{\sqrt{a}}$ ,  $n = \sqrt{b}$  ( $a > 0, b > 0$ ),  $(m, n)$  与  $(n, m)$  称为数对  $(a, b)$  的一

对“对称数对”. 例如: 数对  $(4, 1)$  的一对“对称数对”为  $(\frac{1}{2}, 1)$  与  $(1, \frac{1}{2})$ .

(1) 数对  $(9, 4)$  的一对“对称数对”是  $(\frac{1}{3}, 2)$  与  $(2, \frac{1}{3})$ ;

(2) 若数对  $(x, 3)$  的一个“对称数对”是  $(\sqrt{3}, 1)$ , 则  $x$  的值是  $3$ ;

(3) 若数对  $(a, b)$  一个“对称数对”是  $(\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$ , 求  $a, b$  的值.

【解答】解: (1)  $\because \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$ ,  $\sqrt{4} = 2$ ,

$\therefore$  数对  $(9, 4)$  的一对“对称数对”是  $(\frac{1}{3}, 2)$  与  $(2, \frac{1}{3})$ ,

故答案为:  $(\frac{1}{3}, 2)$  与  $(2, \frac{1}{3})$

(2)  $\because$  数对  $(x, 3)$  的一个“对称数对”是  $(\sqrt{3}, 1)$ ,

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{x}} = 1,$$

$$\therefore x = 1,$$

故答案为: 1;

(3)  $\because$  数对  $(a, b)$  一个“对称数对”是  $(\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$ ,

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{2} \\ \sqrt{b} = 2\sqrt{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{b} = \sqrt{2} \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 12 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = \frac{1}{12} \\ b = 2 \end{cases}.$$

28. 阅读下面的材料:

将边长分别为  $a, a + \sqrt{b}, a + 2\sqrt{b}, a + 3\sqrt{b}$  的正方形面积分别记为  $S_1, S_2, S_3, S_4$ , 则  $S_2 - S_1 = (a + \sqrt{b})^2 - a^2 = [(a + \sqrt{b}) + a] \cdot [(a + \sqrt{b}) - a] = (2a + \sqrt{b}) \cdot \sqrt{b} = b + 2a\sqrt{b}$ . 例如: 当  $a = 1, b = 3$  时,  $S_2 - S_1 = 3 + 2\sqrt{3}$ .

根据以上材料解答下列问题:

(1) 当  $a = 1, b = 3$  时,  $S_3 - S_2 = \underline{\quad 9 + 2\sqrt{3} \quad}$ ,  $S_4 - S_3 = \underline{\quad}$ .

(2) 当  $a = 1, b = 3$  时, 把边长为  $a + n\sqrt{b}$  的正方形面积记作  $S_{n+1}$ , 其中  $n$  是正整数, 从 (1) 中的计算结果, 请直接写出  $S_{n+1} - S_n$  的结果是  $\underline{\quad}$ ;

(3) 在 (2) 的条件下, 已知  $S_1 = a$ , 当  $a = 1, b = 3$  时, 令  $t_1 = S_2 - S_1, t_2 = S_3 - S_2, t_3 = S_4 - S_3, \dots, t_n = S_{n+1} - S_n$ , 且  $T = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{50}$ , 求  $T$  的值.

**【解答】**解: (1)  $S_3 - S_2 = (a + 2\sqrt{b})^2 - (a + \sqrt{b})^2 = 2a\sqrt{b} + 3b$ ,

$$S_4 - S_3 = (a + 3\sqrt{b})^2 - (a + 2\sqrt{b})^2 = 2a\sqrt{b} + 5b,$$

当  $a = 1, b = 3$  时,

$$S_3 - S_2 = 9 + 2\sqrt{3},$$

$$S_4 - S_3 = 15 + 2\sqrt{3},$$

故答案为:  $9 + 2\sqrt{3}, 15 + 2\sqrt{3}$ .

(2)  $S_{n+1} - S_n$

$$= (1 + \sqrt{3}n)^2 - [1 + (n-1)\sqrt{3}]^2$$

$$= [2 + (2n-1)\sqrt{3}] \times \sqrt{3}$$

$$= 3(2n-1) + 2\sqrt{3}$$

$$= 6n - 3 + 2\sqrt{3},$$

故答案为:  $6n - 3 + 2\sqrt{3}$ .

(3) 当  $a = 1, b = 3$  时,

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{50}$$

$$= S_2 - S_1 + S_3 - S_2 + S_4 - S_3 + \dots + S_{51} - S_{50}$$

$$= S_{51} - S_1,$$

$$= (1 + 50\sqrt{3})^2 - 1$$

$$= 7500 + 100\sqrt{3}.$$