

2025 春季初一数学每日一题打卡 002

002 试题来源：2024 春季南京玄武区校级月考第 26 题

规定两数 a, b 之间的一种运算, 记作 (a, b) : 如果 $a^c = b$, 那么 $(a, b) = c$.

例如: 因为 $2^3 = 8$, 所以 $(2, 8) = 3$.

(1) 根据上述规定, 填空: $(4, 64) = \underline{\hspace{2cm}}$, $(-2, 4) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 小明在研究这种运算时发现一个现象: $(3^n, 4^n) = (3, 4)$,

他给出了如下的证明: 设 $(3^n, 4^n) = x$, 则 $(3^n)^x = 4^n$, 即 $(3^x)^n = 4^n$,

$\therefore 3^x = 4$, 即 $(3, 4) = x$.

$\therefore (3^n, 4^n) = (3, 4)$.

请你尝试运用上述这种方法说明下面这个等式成立的理由.

$(4, 5) + (4, 6) = (4, 30)$.

(3) 拓展应用: 计算 $(3, 9) \times (3, 20) - (3, 5) = \underline{\hspace{2cm}}$.

试题解析

规定两数 a, b 之间的一种运算, 记作 (a, b) : 如果 $a^c = b$, 那么 $(a, b) = c$.

例如: 因为 $2^3 = 8$, 所以 $(2, 8) = 3$.

(1) 根据上述规定, 填空: $(4, 64) = \underline{3}$, $(-2, 4) = \underline{2}$.

$$\text{解: (1) } \because 4^3 = 64, (-2)^2 = 4,$$

$$\therefore (4, 64) = 3, (-2, 4) = 2,$$

故答案为: 3, 2;

(2) 小明在研究这种运算时发现一个现象: $(3^n, 4^n) = (3, 4)$,

他给出了如下的证明: 设 $(3^n, 4^n) = x$, 则 $(3^n)^x = 4^n$, 即 $(3^x)^n = 4^n$,

$$\therefore 3^x = 4, \text{ 即 } (3, 4) = x.$$

$$\therefore (3^n, 4^n) = (3, 4).$$

请你尝试运用上述这种方法说明下面这个等式成立的理由.

$$(4, 5) + (4, 6) = (4, 30).$$

$$(2) \text{ 设 } (4, 5) = x, (4, 6) = y, (4, 30) = z,$$

$$\text{则 } 4^x = 5, 4^y = 6, 4^z = 30,$$

$$\therefore 4^x \times 4^y = 5 \times 6 = 30,$$

$$\therefore 4^x \times 4^y = 4^z,$$

$$\therefore x + y = z,$$

$$\text{即 } (4, 5) + (4, 6) = (4, 30);$$

(3) 拓展应用: 计算 $(3, 9) \times (3, 20) - (3, 5) = \underline{(3, 80)}$.

$$(3) \text{ 设 } (3, 20) = a, (3, 5) = b,$$

$$\therefore 3^a = 20, 3^b = 5,$$

$$\therefore (3, 9) = 2,$$

$$\therefore (3, 9) \times (3, 20) - (3, 5) = 2a - b,$$

$$\therefore 3^{2a-b} = (3^a)^2 \div 3^b = 20^2 \div 5 = 80,$$

$$\therefore 2a - b = (3, 80),$$

$$\text{即 } (3, 9) \times (3, 20) - (3, 5) = (3, 80).$$

故答案为: $(3, 80)$.