

高数见林初一数学每日一练(2.28)

参考答案与解析

1. 已知一个长方形,若它的长增加6cm,宽减少2cm,则面积保持不变;若它的长减少3cm,宽增加2cm,则面积仍保持不变. 这个长方形的面积为 ()

A. 12

B. 24

C. 36

D. 72

【解析】解:设长方形的长为 a cm,宽为 b cm,由题意得:

$$\begin{cases} (a+6)(b-2)=ab \\ (a-3)(b+2)=ab \end{cases}$$

$$\text{化简为} \begin{cases} 6b-2a=12 \text{ ①} \\ 2a-3b=6 \text{ ②} \end{cases}$$

$$\text{①} + \text{②} \text{得: } b=6,$$

$$\text{把 } b=6 \text{ 代入②得: } a=12,$$

$$\therefore \text{方程组的解为: } \begin{cases} a=12 \\ b=6 \end{cases},$$

$$\therefore \text{这个长方形的面积为: } ab=12 \times 6=72(\text{cm}^2),$$

故选: D.

2. 从前,一位庄园主把一块长为 a 米,宽为 b 米($a > b > 100$)的长方形土地租给租户张老汉,第二年,他对张老汉说:“我把这块地的长增加10米,宽减少10米,继续租给你,租金不变,你也没有吃亏,你看如何?”如果这样,你觉得张老汉的租地面积会 ()

A. 变小了

B. 变大了

C. 没有变化

D. 无法确定

【解析】解:由题意可知:原面积为 ab (平方米),

第二年按照庄园主的想法则面积变为 $(a+10)(b-10)=ab-10a+10b-100=[ab-10(a-b)-100]$ 平方米,

$$\because a > b,$$

$$\therefore ab-10(a-b)-100 < ab,$$

\therefore 面积变小了,

故选: A.

3. 若 $(x^2+ax+2)(2x-4)$ 的结果中不含 x^2 项,则 a 的值为 ()

A. 0

B. 2

C. $\frac{1}{2}$

D. -2

【解析】解: $(x^2+ax+2)(2x-4)$

$$= 2x^3 + 2ax^2 + 4x - 4x^2 - 4ax - 8$$

$$= 2x^3 + (-4+2a)x^2 + (-4a+4)x - 8,$$

$\because (x^2+ax+2)(2x-4)$ 的结果中不含 x^2 项,

$$\therefore -4+2a=0,$$

$$\text{解得: } a=2.$$

故选: B.

4. 如果 $(x^2+px+q)(x^2-5x+7)$ 的展开式中不含 x^2 与 x^3 项,那么 p 与 q 的值是 ()

A. $p=5, q=18$

B. $p=-5, q=18$

C. $p=-5, q=-18$

D. $p=5, q=-18$

【解析】解: $\because (x^2+px+q)(x^2-5x+7)=x^4+(p-5)x^3+(7-5p+q)x^2+(7p-5q)x+7q,$

又 \because 展开式中不含 x^2 与 x^3 项,

$$\therefore p-5=0, 7-5p+q=0,$$

$$\text{解得 } p=5, q=18. \text{ 故选: A.}$$

5. 计算 $(x+4)(x^2+ax+16)$ 结果中不含 x 的一次项, 则常数 a 的值为 -4.

【解析】解: $(x+4)(x^2+ax+16)$
 $= x^3 + ax^2 + 16x + 4x^2 + 4ax + 64$
 $= x^3 + (a+4)x^2 + (16+4a)x + 64,$
 \because 计算 $(x+4)(x^2+ax+16)$ 结果中不含 x 的一次项,
 $\therefore 16+4a=0,$
 $4a=-16,$
解得: $a=-4,$
 \therefore 常数 a 的值为: $-4,$
故答案为: $-4.$

6. 已知 $(x^2+ax-4)(2x+b)$ 的展开式中不含 x^2 项, 常数项是 -8 , 则 $b-a =$ 3.

【解析】解: $(x^2+ax-4)(2x+b)$
 $= 2x^3 + 2ax^2 - 8x + bx^2 + abx - 4b$
 $= 2x^3 + (2a+b)x^2 + (ab-8)x - 4b$
 \because 常数项为 $-8,$
 $\therefore -4b = -8,$
 $\therefore b = 2,$
又 \because 展开式中不含 x^2 项,
 $\therefore 2a+b=0,$
 $\therefore 2a+2=0,$
 $\therefore a=-1,$
 $\therefore b-a = 2 - (-1) = 3.$
故答案为: $3.$

7. 观察以下等式:

$$\begin{aligned}(x+1)(x^2-x+1) &= x^3+1 \\ (x+3)(x^2-3x+9) &= x^3+27 \\ (x+6)(x^2-6x+36) &= x^3+216 \\ \dots\end{aligned}$$

(1) 按以上等式的规律, 填空: $(a+b)(\underline{a}^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

(2) 利用多项式的乘法法则, 证明 (1) 中的等式成立.

(3) 利用 (1) 中的公式化简: $(x+y)(x^2-xy+y^2) - (x-y)(x^2+xy+y^2)$

【解析】解: (1) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3;$

故答案为: $a^2-ab+b^2;$

(2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3;$$

(3) $(x+y)(x^2-xy+y^2) - (x-y)(x^2+xy+y^2)$

$$= x^3 + y^3 - (x^3 - y^3)$$

$$= 2y^3.$$

8. 先阅读下列材料, 然后解答问题:

材料: 从 4 张不同的卡片中选取 2 张, 有 6 种不同的选法, 抽象成数学问题就是从 4 个不同元素中选取 2 个元素的组合, 组合数记为 $C_4^2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$. 一般地, 从 n 个不同元素中选取 m 个元素的组合数记作 C_n^m , $C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)}{m(m-1)(m-2) \cdots 2 \times 1} (m \leq n)$.

例如：从6个不同元素中选3个元素的组合，组合数记作 $C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ 。

(1) 为迎接国家建设工作检查，学校将举办小型书画展览，王老师在班级7幅优秀书画中选取3幅，共有多少种选法？

(2) 探索发现：

计算： $C_3^2 = \underline{3}$ ， $C_3^3 = \underline{1}$ ， $C_4^3 = \underline{4}$ ， $C_5^3 = \underline{10}$ ， $C_5^4 = \underline{5}$ ， $C_6^4 = \underline{15}$ 。

由上述计算，试猜想 C_n^k ， C_n^{k+1} ， C_{n+1}^{k+1} 之间有什么关系。（只写结论，不需说明理由）

(3) 请你直接利用(2)中猜想的结论计算： $C_3^3 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_6^2 + \cdots + C_{10}^2 + C_{11}^2$ 。

【解析】解：(1) 根据公式 $C_7^3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$ ，

答：共有35种选法。

(2) $C_3^2 = 3$ ， $C_3^3 = 1$ ， $C_4^3 = 4$ ， $C_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ ， $C_5^4 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5$ ， $C_6^4 = C_6^2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$ ，

$\therefore C_3^2 + C_3^3 = 3 + 1 = 4 = C_4^3$ ， $C_5^3 + C_5^4 = 10 + 5 = 15 = C_6^4$ ，

$\therefore C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ ，

故答案为：3；1；4；10；5；15；

(3) $C_3^3 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_6^2 + \cdots + C_{10}^2 + C_{11}^2$

$= C_4^3 + C_4^2 + C_5^2 + C_6^2 + \cdots + C_{10}^2 + C_{11}^2$

$= C_5^3 + C_5^2 + C_6^2 + \cdots + C_{10}^2 + C_{11}^2$

$= C_6^3 + C_6^2 + \cdots + C_{10}^2 + C_{11}^2$

$= C_{12}^3$

$= \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1}$

$= 220$ 。