

初三数学每日三题(9.15)

参考答案与解析

1. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $c < 0$) 经过 $(1, 1)$, $(m, 0)$, $(n, 0)$ 三点, 且 $n \geq 3$. 下列四个结论, 其中正确的有 ()

① $b < 0$;

② $4ac - b^2 < 4a$;

③ 当 $n = 3$ 时, 若点 $(2, t)$ 在该抛物线上, 则 $t > 1$;

④ 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = x$ 有两个相等的实数根, 则 $0 < m \leq \frac{1}{3}$.

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【解析】解: ① 图象经过 $(1, 1)$, $c < 0$, 即抛物线与 y 轴的负半轴有交点,

如果抛物线的开口向上, 则抛物线与 x 轴的交点 都在 $(1, 0)$ 的左侧,

$\therefore (n, 0)$ 中 $n \geq 3$,

\therefore 抛物线与 x 轴的一个交点一定在 $(3, 0)$ 或 $(3, 0)$ 的右侧,

\therefore 抛物线的开口一定向下, 即 $a < 0$,

把 $(1, 1)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ 得: $a + b + c = 1$, 即 $b = 1 - a - c$,

$\therefore a < 0, c < 0$,

$\therefore b > 0$, 故①错误;

② $\therefore a < 0, b > 0, c < 0, \frac{c}{a} > 0$,

\therefore 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根的积大于 0, 即 $mn > 0$,

$\therefore n \geq 3$,

$\therefore m > 0$,

$\therefore \frac{m+n}{2} > 1.5$, 即抛物线的对称轴在直线 $x = 1.5$ 的右侧,

\therefore 抛物线的顶点在点 $(1, 1)$ 的上方或者右上方,

$\therefore \frac{4ac - b^2}{4a} > 1$,

$\therefore 4a < 0$,

$\therefore 4ac - b^2 < 4a$, 故②正确;

③ $\therefore m > 0$,

\therefore 当 $n = 3$ 时, $\frac{m+n}{2} > 1.5$,

\therefore 抛物线对称轴在直线 $x = 1.5$ 的右侧,

$\therefore (1, 1)$ 到对称轴的距离大于 $(2, t)$ 到对称轴的距离,

$\therefore a < 0$, 抛物线开口向下,

\therefore 距离抛物线越近的函数值越大,

$\therefore t > 1$, 故③正确;

④ 方程 $ax^2 + bx + c = x$ 可变为 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$,

\therefore 方程有两个相等的实数解,

$\therefore \Delta = (b-1)^2 - 4ac = 0$.

\therefore 把 $(1, 1)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ 得 $a + b + c = 1$, 即 $1 - b = a + c$,

$\therefore (a+c)^2 - 4ac = 0$, 即 $a^2 + 2ac + c^2 - 4ac = 0$,

$\therefore (a-c)^2 = 0$,

$\therefore a - c = 0$, 即 $a = c$,

$\therefore (m, 0), (n, 0)$ 在抛物线上,

$\therefore m, n$ 为方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根,

$$\therefore mn = \frac{c}{a} = 1,$$

$$\therefore n = \frac{1}{m},$$

$$\therefore n \geq 3,$$

$$\therefore \frac{1}{m} \geq 3,$$

$$\therefore 0 < m \leq \frac{1}{3}. \text{ 故④正确.}$$

综上,正确的结论有:②③④.

故选: C.

2. 已知二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx$ 的图象过点 $A(4,0)$, 设点 $C(1, -3)$, 在抛物线的对称轴上求一点 P , 使 $|PA - PC|$ 的值最大, 则点 P 的坐标为 $(2, -6)$.

【解析】解: \because 二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx$ 的图象过点 $A(4,0)$,

$$\therefore 0 = \frac{1}{2} \times 4^2 + 4b, \text{ 解得 } b = -2,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - 2x,$$

$$\therefore \text{对称轴为 } x = \frac{2}{2 \times \frac{1}{2}} = 2,$$

$$\therefore \text{二次函数 } y = \frac{1}{2}x^2 - 2x \text{ 与 } x \text{ 轴交于点 } A(4,0),$$

$$\therefore \text{它与 } x \text{ 轴的另一交点是 } O(0,0),$$

$$\therefore P \text{ 在对称轴上},$$

$$\therefore PA = PO,$$

$$\therefore |PA - PC| = |PO - PC| \leq OC, \text{ 即当 } P、O、C \text{ 三点在一条线上时 } |PA - PC| \text{ 的值最大},$$

$$\text{设直线 } OC \text{ 解析式为 } y = kx,$$

$$\therefore k = -3,$$

$$\therefore \text{直线 } OC \text{ 解析式为 } y = -3x,$$

$$\text{令 } x = 2, \text{ 可得 } y = -3 \times 2 = -6,$$

$$\therefore \text{存在满足条件的点 } P, \text{ 其坐标为 } (2, -6).$$

故答案为 $(2, -6)$.

3. 若二次函数 $y_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$ 与 $y_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2$ 的图象关于点 $P(0,1)$ 成中心对称, 我们称 y_1 与 y_2 互为“中心对称”函数.

(1) 二次函数 $y = x^2 + 6x + 3$ 的“中心对称”函数的解析式为 $y = -x^2 + 6x - 1$.

- (2) 已知二次函数 $y = ax^2 + 2ax + c$, 将其顶点向上平移两个单位后在它的“中心对称”函数图象上, 用含 a 的式子表示 c .

- (3) 在 (2) 的条件下, 当 $\frac{c+2a}{a} \leq x \leq \frac{a-7c}{4a}$ 时, 二次函数 $y = ax^2 + 2ax + c$ 最小值为 2, 求 c 的值.

【解析】解: (1) $y = x^2 + 6x + 3 = (x+3)^2 - 6$, 则该函数的顶点坐标为: $(-3, -6)$,

$$\text{则该顶点关于 } (0,1) \text{ 的对称点为 } (3,8),$$

$$\text{则“中心对称”函数的解析式为: } y = -(x-3)^2 + 8 = -x^2 + 6x - 1,$$

$$\text{故答案为: } y = -x^2 + 6x - 1;$$

(2) 由抛物线的表达式知, 其对称轴为直线 $x = -1$,

$$\text{则顶点坐标为: } (-1, c-a), \text{ 该点向上平移 2 个单位得到 } (-1, c-a+2),$$

$$\text{则“中心对称”函数的顶点坐标为: } (1, 2+a-c),$$

$$\text{则“中心对称”函数的表达式为: } y = -a(x-1)^2 + 2+a-c,$$

$$\text{将 } (-1, c-a+2), \text{ 代入上式得: } c-a+2 = -a(-1-1)^2 + 2+a-c, \text{ 解得: } c = -a;$$

(3) $y = ax^2 + 2ax + c = ax^2 + 2ax - a,$

$\because c = -a$, 当 $\frac{c+2a}{2} \leq x \leq \frac{a-7c}{4a}$ 时, 即 $1 \leq x \leq 2$,

当 $a > 0$ 时, 在 $1 \leq x \leq 2$ 时, 则 $x = 1$, 函数取得最小值,

即 $y = ax^2 + 2ax - a = a(1 + 2 - 1) = 2a = 2$, 解得: $a = 1$;

当 $a < 0$ 时,

同理可得: $x = 2$ 时, 函数取得最小值,

即 $y = ax^2 + 2ax - a = a(4 + 4 - 1) = 7a = 2$, 解得: $a = \frac{2}{7}$ (舍去);

综上, $a = 1$.

$\therefore c = -a = -1$.