

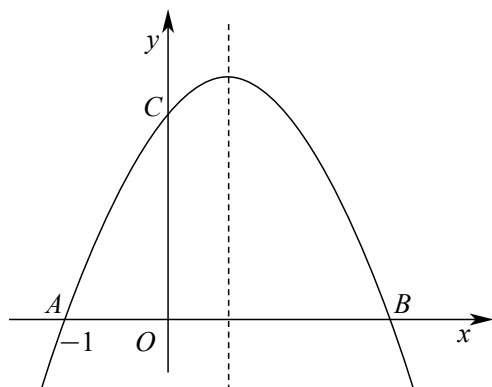
2025 秋季初三数学每日一题打卡 005

如图,二次函数 $y = -\frac{3}{4}x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点,与 y 轴交于点 C ,其对称轴是直线 $x = 1$,点 A 的坐标为 $(-1, 0)$.

(1) 求此二次函数的表达式.

(2) 若 $n > 0$,当 $n \leq x \leq n + 2$ 时,求二次函数 $y = -\frac{3}{4}x^2 + bx + c$ 的最小值 (用含有 n 的代数式表示).

(3) 当 $t \leq x \leq t + 1$ 时,若二次函数的最大值比最小值大 2,求 t 的值.



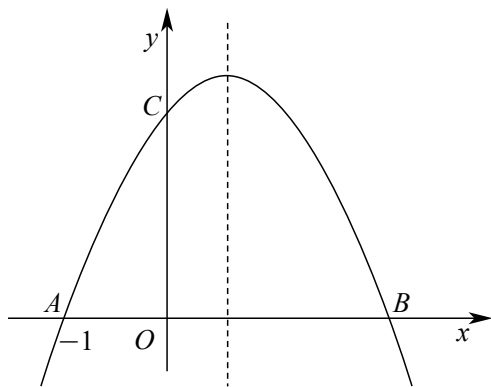
试题解析:

如图,二次函数 $y = -\frac{3}{4}x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点,与 y 轴交于点 C ,其对称轴是直线 $x = 1$,点 A 的坐标为 $(-1, 0)$.

(1) 求此二次函数的表达式.

(2) 若 $n > 0$,当 $n \leq x \leq n+2$ 时,求二次函数 $y = -\frac{3}{4}x^2 + bx + c$ 的最小值(用含有 n 的代数式表示).

(3) 当 $t \leq x \leq t+1$ 时,若二次函数的最大值比最小值大 2,求 t 的值.



解: (1) $\because y = -\frac{3}{4}x^2 + bx + c$ 的图象对称轴是直线 $x = 1$, $\therefore -\frac{b}{2 \times (-\frac{3}{4})} = 1$, $b = \frac{3}{2}$,

$\because A(-1, 0)$ 在其图象上, $\therefore 0 = -\frac{3}{4} \times (-1)^2 + \frac{3}{2} \times (-1) + c$, $c = \frac{9}{4}$,

\therefore 此二次函数的表达式为 $y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$.

(2) $\because y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$ 的图象对称轴是直线 $x = 1$,

若 $n > 0$,当 $n \leq x \leq n+2$ 时, $\frac{n+n+2}{2} = n+1 > 1$,

$\therefore y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$ 的最小值在 $x = n+2$ 时取到,

$\therefore -\frac{3}{4}(n+2)^2 + \frac{3}{2}(n+2) + \frac{9}{4} = -\frac{3}{4}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{9}{4}$, $\therefore y_{\text{最小值}} = -\frac{3}{4}n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{9}{4}$;

(3) 当 $t < 0$ 时,

$\because t \leq x \leq t+1$, $\therefore y_{\text{最大值}} = -\frac{3}{4}(t+1)^2 + \frac{3}{2}(t+1) + \frac{9}{4}$, $y_{\text{最小值}} = -\frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{9}{4}$,

\because 二次函数的最大值比最小值大 2,

$\therefore -\frac{3}{4}(t+1)^2 + \frac{3}{2}(t+1) + \frac{9}{4} = -\frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{9}{4} + 2$, $\therefore t = -\frac{5}{6}$,

当 $t > 1$ 时,

$\because t \leq x \leq t+1$, $\therefore y_{\text{最小值}} = -\frac{3}{4}(t+1)^2 + \frac{3}{2}(t+1) + \frac{9}{4}$, $y_{\text{最大值}} = -\frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{9}{4}$,

\because 二次函数的最大值比最小值大 2,

$\therefore -\frac{3}{4}(t+1)^2 + \frac{3}{2}(t+1) + \frac{9}{4} + 2 = -\frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{9}{4}$, $\therefore t = \frac{11}{6}$;

当 $0 \leq t \leq 1$ 时,

$\because t \leq x \leq t+1$, $y = -\frac{3}{4}(x-1)^2 + 3$, $\therefore y_{\text{最大值}} = 3$,

若 $3 - (-\frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{9}{4}) = 2$, 解得 $t = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{3}$, 不符合;

若 $3 - [-\frac{3}{4}(t+1)^2 + \frac{3}{2}(t+1) + \frac{9}{4}] = 2$, 解得 $t = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$, 不符合, $\therefore t = -\frac{5}{6}$ 或 $t = \frac{11}{6}$.