

动点最值专题

动点最值专题

近几年有关“线段最值”的中考试题层出不穷，形式多样，往往综合了几何变换、函数等方面的知识，具有一定的难度，具有很强的探索性，通过研究发现，这些问题尽管形式多样、背景复杂、变化不断，但都可以通过几何变换转化为常见的基本问题。

最值题目类型多：作图、计算；有求差最大，求和最小；求周长最小、求时间最短；求最值、已知最值求待定系数等；对称载体多：几乎涉及到初中全部的轴对称图形（角、线段、等腰三角形、等腰梯形、菱形、正方形、抛物线、圆、坐标轴）。

我们知道“对称、平移、旋转”是三种保形变换。通过这三种几何变换可以实现图形在保持形状、大小不变的前提下而使其位置发生变化，具有更紧凑的位置关系或组合成新的有利论证的基本图形。通过几何变换移动线段的位置是解决最值问题的有效手段，题目是千变万化的，但是运用几何变换把最值问题转化为基本问题却是不变的。

数学问题是千变万化的，几何变换的应用也不是单一的，有些问题需要多种变换的组合才能解决，看看以下策略对解决问题能否奏效。

（1）去伪存真。刨去不变的线段，看清楚究竟是哪几段和的最小值问题，必须仔细研究题目的背景，搞清楚哪些是动点、哪些是定点、哪些是定长。

（2）科学选择。捕捉题目的信号，探索变换的基础，选择变换的手段。平移把不“连”的线段“接”起来，旋转把“碰头”的线段“展”开来重“接”，对称把在同侧的线段翻折过去重组，因此“不连——平移、碰

头——旋转、同侧——对称”是一般的思路；对称变换的基础是轴对称图形，平移变换的基础是平行线，旋转变换的基础是等线段，所以选择哪种几何变换还要看题目中具备何种变换的基础信息。

(3)怎么变换？对称变换一般以动点所在直线为对称轴，构建定点(直线)的对称点(直线)，如有多个动点就必须作多次变换；平移一般是移动没有公共端点的两条线段中的某一条，与另一条对“接”；旋转变换一般以定点为旋转中心旋转 60° 或 90° 。

(4)怎么求值？几何变换成了“两折线”或“三折线”后，根据“两点之间线段最短”或“垂线段最短”把“折线”转“直”，找出最短位置，求出最小值。

目录

一、一条线段最值..... 1

1 单动点型.....1

1.1 动点运动轨迹——直线型..... 1

1.2 动点运动轨迹——圆或圆弧型.....9

1.2.1 定点定长..... 9

1.2.2 定弦定角..... 14

1.3 动点轨迹为其他曲线，构造三角形.....24

2 双动点型..... 27

2.1 利用等量代换实现转化..... 27

2.2 利用和差关系实现转化..... 28

2.3 利用勾股定理实现转化..... 28

2.4 利用三角形边角关系实现转化.....29

二、两条线段最值..... 30

1 PA+PB 型..... 30

1.1 两定一动（将军饮马）..... 30

1.2 两定两动..... 39

● 过河拆桥..... 39

● 四边形周长最小； 42

1.3 一定两动..... 44

● 两动点不随动..... 44

1.4 三动点.....	48
2 $PA+k \cdot PB$ 型.....	49
2.1 “胡不归模型”	49
2.2 阿氏圆.....	66
三、“费马点”模型.....	73
线段极值解题方略.....	77

一、一条线段最值

1 单动点型

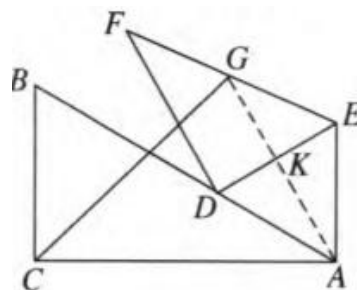
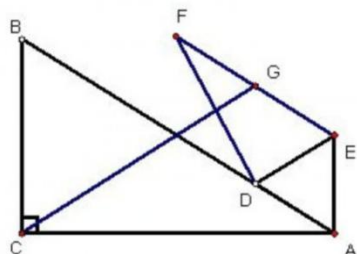
所谓的单动点型指：所求线段两端点中只有一个动点的最值问题．通常解决这类问题的思考步骤为三步：

- (一)分析“源动点”的不变量。
- (二)分析“从动点”与“源动点”问关系。
- (三)分析“从动点”的不变量。

1.1 动点运动轨迹——直线型

动点轨迹为一条直线，利用“垂线段最短”

例 1、如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB = 30^\circ$ ， $BC = 1$ ， D 为 AB 上一动点 (不与点 A 重合)， $\triangle AED$ 为等边三角形，过 D 点作 DE 的垂线， F 为垂线上任一点， G 为 EF 的中点，则线段 CG 长的最小值是_____。



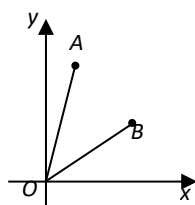
方法指导：1. 当动点的运动轨迹是一条直线 (射线、线段) 时，可运用“垂线段最短”性质求线段最值．2. 有时动点轨迹不容易确定，如例 1，建议看到“中点”联想“三角形的中位线及直角三角形斜边上的中线”等性质．3. 试着观察“动点运动到一些特殊位置时，该动点与其他定点连结的线段是否与已知边有一‘定角’产生”，若成立，则动点轨迹为直线。

➤ 如何在动态问题中找寻“不变量”特征是突破这类问题的关键。

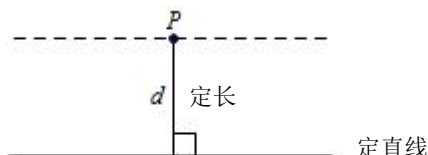
①当一个点的坐标以某个字母的代数式表示，若可化为一次函数，则点的轨迹是直线；

1. 在平面直角坐标系中，点 P 的坐标为 $(0, 2)$ ，点 M 的坐标为 $(m-1, -\frac{3}{4}m-\frac{9}{4})$ (其中 m 为实数)，当 PM 的长最小时， m 的值为_____.

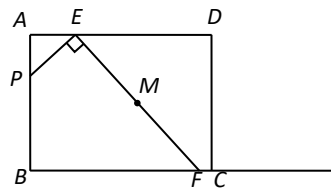
2. 如图，在平面直角坐标系中， $A(1, 4)$ ， $B(3, 2)$ ， $C(m, -4m+20)$ ，若 OC 恰好平分四边形 $OACB$ 的面积，求点 C 的坐标.



②当某一动点到某条直线的距离不变时，该动点的轨迹为直线；

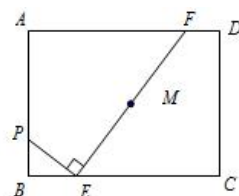


1. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB=6$ ， $AD=8$ ，点 E 在边 AD 上，且 $AE:ED=1:3$. 动点 P 从点 A 出发，沿 AB 运动到点 B 停止. 过点 E 作 $EF \perp PE$ 交射线 BC 于点 F ，设 M 是线段 EF 的中点，则在点 P 运动的整个过程中，点 M 运动路线的长为_____.



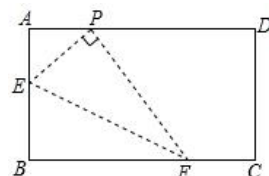
引例图

【变式 1】如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB=6$ ， $AD=8$ ，点 E 在 BC 边上，且 $BE:EC=1:3$ 。动点 P 从点 B 出发，沿 BA 运动到点 A 停止。过点 E 作 $EF \perp PE$ 交边 AD 或 CD 于点 F ，设 M 是线段 EF 的中点，则在点 P 运动的整个过程中，点 M 运动路线的长为_____。



变式 1 图

【变式 2】如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 P 在 AD 上， $AB=2$ ， $AP=1$ ， E 是 AB 上的一个动点，连接 PE ，过点 P 作 PE 的垂线，交 BC 于点 F ，连接 EF ，设 EF 的中点为 G ，当点 E 从点 B 运动到点 A 时，点 G 移动的路径的长是_____。



变式 2 图

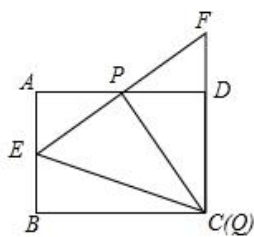
【变式 3】在矩形 $ABCD$ 中， $AB=4$ ， $AD=6$ ， P 是 AD 边的中点，点 E 在 AB 边上， EP 的延长线交射线 CD 于 F 点，过点 P 作 $PQ \perp EF$ ，与射线 BC 相交于点 Q 。

(1) 如图 1，当点 Q 在点 C 时，试求 AE 的长；

(2) 如图 2，点 G 为 FQ 的中点，连结 PG 。

①当 $AE=1$ 时，求 PG 的长；

②当点 E 从点 A 运动到点 B 时，试直接写出线段 PG 扫过的面积.



变式 3 图 1

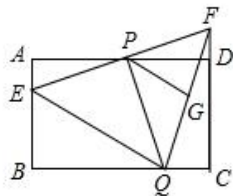
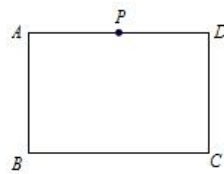
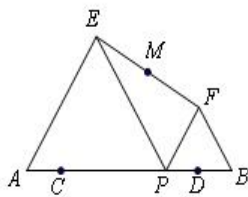


图 2



备用图

2. 如图， C 、 D 是线段 AB 上两点，且 $AC=BD=\frac{1}{6}AB=1$ ，点 P 是线段 CD 上一个动点，在 AB 同侧分别作等边 $\triangle PAE$ 和等边 $\triangle PBF$ ， M 为线段 EF 的中点. 在点 P 从点 C 移动到点 D 时，点 M 运动的路径长度为_____.



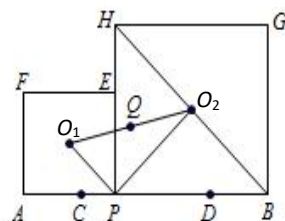
第 2 题图

变式 1 图

变式 2 图

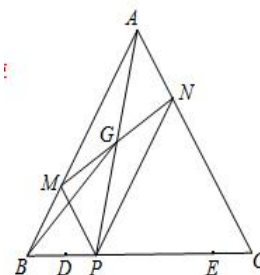
变式 3 图

【变式 1】 已知 $AB=10$ ，点 C 、 D 在线段 AB 上且 $AC=DB=2$ ； P 是线段 CD 上的动点，分别以 AP 、 PB 为边在线段 AB 的同侧作正方形 $APEF$ 和正方形 $PBGH$ ，点 O_1 和 O_2 是这两个正方形的中心，连接 O_1O_2 ，设 O_1O_2 的中点为 Q ；当点 P 从点 C 运动到点 D 时，则点 Q 移动路径的长是_____.



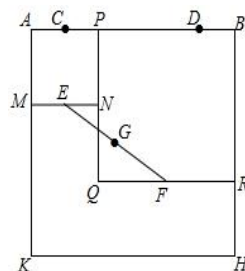
变式 1 图

【变式 2】 等边三角形 ABC 中， $BC=6$ ， D 、 E 是边 BC 上两点，且 $BD=CE=1$ ，点 P 是线段 DE 上的一个动点，过点 P 分别作 AC 、 AB 的平行线交 AB 、 AC 于点 M 、 N ，连接 MN 、 AP 交于点 G ，则点 P 由点 D 移动到点 E 的过程中，线段 BG 扫过的区域面积为_____.



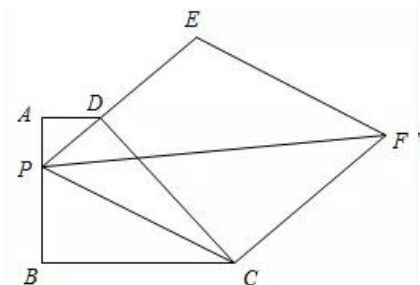
变式 2 图

【变式 3】 如图，四边形 $ABHK$ 是边长为 6 的正方形，点 C 、 D 在边 AB 上，且 $AC=DB=1$ ，点 P 是线段 CD 上的动点，分别以 AP 、 PB 为边在线段 AB 的同侧作正方形 $AMNP$ 和正方形 $BRQP$ ， E 、 F 分别为 MN 、 QR 的中点，连接 EF ，设 EF 的中点为 G ，则当点 P 从点 C 运动到点 D 时，点 G 移动的路径长为_____.

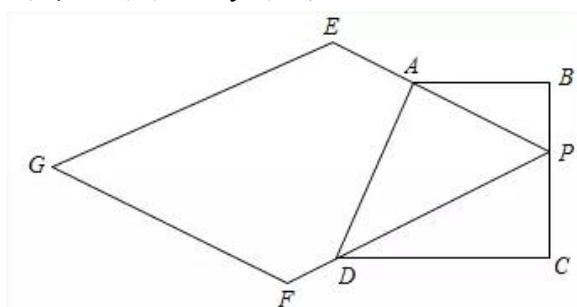


变式 3 图

3. 如图，已知在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB \perp BC$ ， $AD=1$ ， $BC=3$ ， P 为 AB 边上的一动点，连接 PD 并延长到点 E ，使得 $PD:PE=1:3$ ，以 PE ， PC 为边作平行四边形 $PEFC$ ，连接 PF ，则 PF 的最小值为_____.

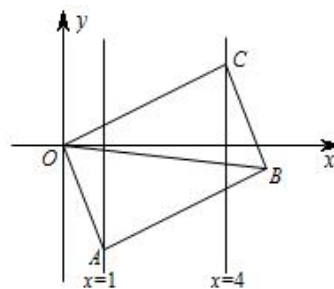


【延伸】 在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $BC \perp CD$ ， $AB=3$ ， $CD=4$ ，在 BC 上取点 P (P 与 B 、 C 不重合)，连接 PA 延长至 E ，使 $PE:PA=x:1$ ，连接 PD 并延长到 F ，使 $PF:PD=y:1$ ($x, y > 1$)，以 PE 、 PF 为边作平行四边形，另一个顶点为 G ，求 PG 长度的最小值 (用 x, y 表示)。



延伸图

【同型练】 如图，已知 $\square OABC$ 的顶点 A 、 C 分别在直线 $x=1$ 和 $x=4$ 上， O 是坐标原点，则对角线 OB 长的最小值为_____.

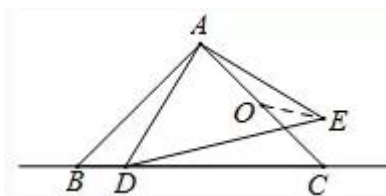


同型练图

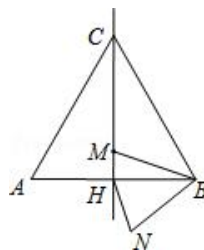
③当某一动点与定线段一个端点连接后成的角度不变，则该动点轨迹是直线。



1. 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ， $AB = AC = 2$ ， O 为 AC 中点，若点 D 在直线 BC 上运动，连接 OE ，则在点 D 运动过程中，线段 OE 的最小值为_____。



第1题图



变式图

【变式】1. 如图，边长为 $2a$ 的等边 $\triangle ABC$ 中， M 是高 CH 所在直线上的一个动点，连接 MB ，将线段 BM 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 BN ，连接 HN 。则在点 M 运动过程中，线段 HN 长度的最小值是_____。

2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 4$ ， M 为 AB 的中点。 D 是射线 BC 上一个动点，连接 AD ，将线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到线段 AE ，连接 ED ， N 为 ED 的中点，连接 AN ， MN 。

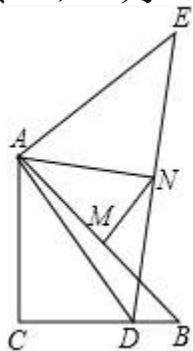


图1

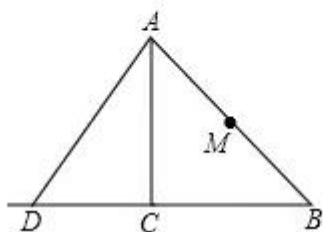


图2

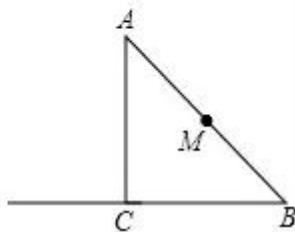


图3

(1) 如图 1, 当 $BD=2$ 时, $AN=$ _____, NM 与 AB 的位置关系是_____;

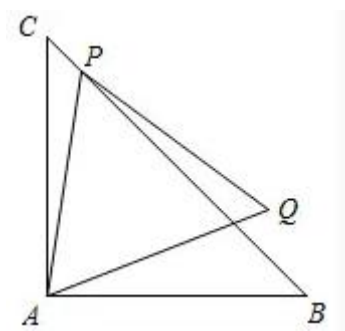
(2) 当 $4 < BD < 8$ 时,

①依题意补全图 2;

②判断 (1) 中 NM 与 AB 的位置关系是否发生变化, 并证明你的结论;

(3) 连接 ME , 在点 D 运动的过程中, 求 ME 的长的最小值?

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC=2\text{cm}$, 线段 BC 上一动点 P 从 C 点开始运动, 到 B 点停止, 以 AP 为边在 AC 的右侧做等边 $\triangle APQ$, 则 Q 点运动的路径长为_____.



1.2 动点运动轨迹——圆或圆弧型

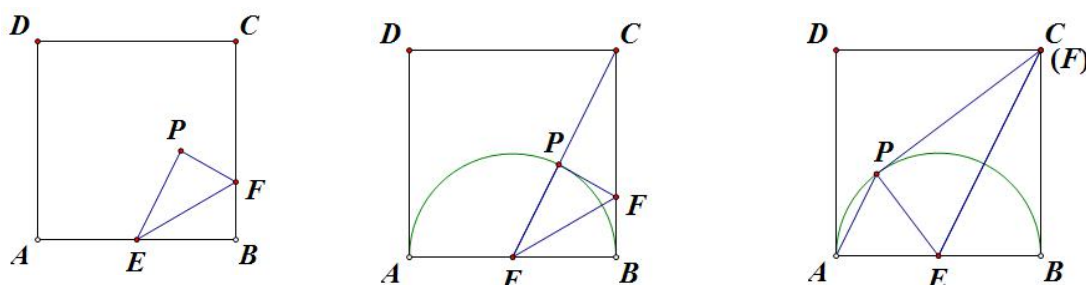
动点轨迹为定圆，利用三点共线

方法指导：1. 当动点的轨迹是定圆时，可利用“一定点与圆上的动点距离最大值为定点到圆心的距离与半径和，最小值为定点到圆心的距离与半径差”性质求解. 2. 试着观察“动点与其他定点连结的线段长是否为‘定值’或动点与两定点构成的角是否为直角”，这是常见判断动点轨迹是圆的条件。

1.2.1 定点定长

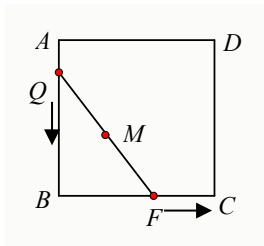
I 动点到定点的距离不变，则点的轨迹是圆或圆弧；

1. 如图 1，在正方形 $ABCD$ 中，边长为 2，点 E 是 AB 的中点，点 F 是 BC 边上任意一点，将 $\triangle BEF$ 沿 EF 所在直线折叠得到 $\triangle PEF$ ，连接 AP ，则 CP 的最小值_____， AP 的最小值是_____。

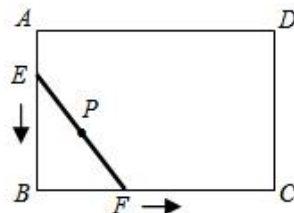


(图 1)

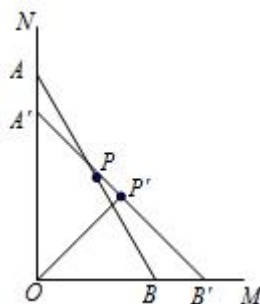
1. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 2，将长为 2 的线段 QF 的两端放在正方形相邻的两边上同时滑动. 如果点 Q 从点 A 出发，沿图中所示方向按 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ 滑动到点 A 为止，同时点 F 从点 B 出发，沿图中所示方向按 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B$ 滑动到点 B 为止，那么在这个过程中，线段 QF 的中点 M 所经过的路线围成的图形的面积为_____。



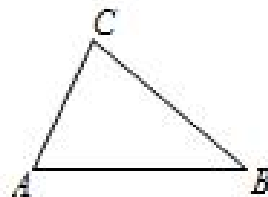
【变式 1】在矩形 $ABCD$ 中，已知 $AB=2\text{cm}$ ， $BC=3\text{cm}$ ，现有一根长为 2cm 的木棒 EF 紧贴着矩形的边（即两个端点始终落在矩形的边上），按逆时针方向滑动一周，则木棒 EF 的中点 P 在运动过程中所围成的图形的面积 cm^2 。



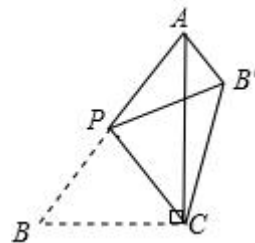
【变式 3】如图，一根木棒 AB 长为 $2a$ ，斜靠在与地面 OM 垂直的墙壁 ON 上，与地面的倾斜角 $\angle ABO=60^\circ$ ，若木棒沿直线 NO 下滑，且 B 端沿直线 OM 向右滑行，则木棒中点 P 也随之运动，已知 A 端下滑到 A' 时， $AA'=(\sqrt{3}-\sqrt{2})a$ ，则木棒中点 P 随之运动到 P' 所经过的路线长_____。



2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC=2$ ， $AB=3$ ．当 $\angle B$ 最大时， BC 的长为_____．

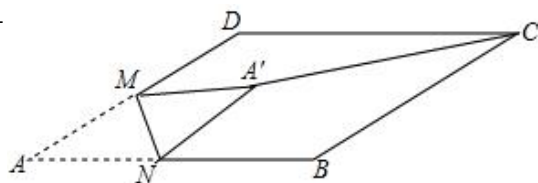


3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AB=5$ ， $BC=3$ ， P 是 AB 边上的动点（不与点 B 重合），将 $\triangle BCP$ 沿 CP 所在的直线翻折，得到 $\triangle B'CP$ ，连接 $B'A$ ，则 $B'A$ 长度的最小值是_____．



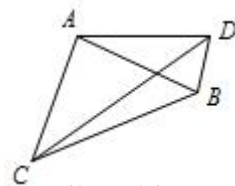
第3题图

4. 如图，在 $\square ABCD$ 中， $\angle BCD=30^\circ$ ， $BC=4$ ， $CD=3\sqrt{3}$ ， M 是 AD 边的中点， N 是 AB 边上的一动点，将 $\triangle AMN$ 沿 MN 所在直线翻折得到 $\triangle A'MN$ ，连接 $A'C$ ，则 $A'C$ 长度的最小值是_____



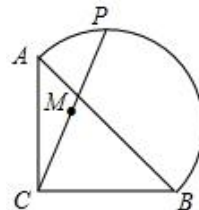
第4题图

5. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB=AC=AD$ ，若 $\angle BAC=25^\circ$ ， $\angle CAD=75^\circ$ ，则 $\angle BDC=$ _____°， $\angle DBC=$ _____°

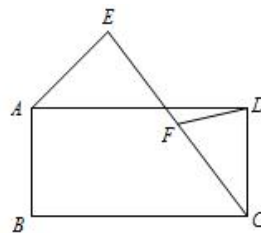


第5题图

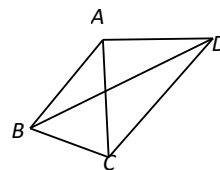
6. 如图，在等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC=BC=2\sqrt{2}$ ，点 P 在以斜边 AB 为直径的半圆上， M 为 PC 的中点。当点 P 沿半圆从点 A 运动至点 B 时，点 M 运动的路径长是_____。



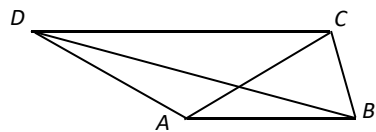
7. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB=2AD=4$ ，长度为 2 的动线段 AE 绕点 A 旋转，连接 EC ，取 EC 的中点 F ，连接 DF ，则 DF 的取值范围为_____。



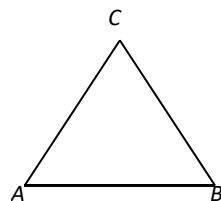
- 例 2. (15 威海) 如图，已知 $AB=AC=AD$ ， $\angle CBD=2\angle BDC$ ， $\angle BAC=44^\circ$ ，则 $\angle CAD$ 的度数为_____。



变式：如图，四边形 $ABCD$ 中， $DC \parallel AB$ ， $BC=1$ ， $AB=AC=AD=2$ ，则 BD 的长为_____.

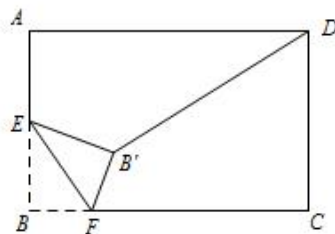


例 3. 如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AC=BC$ ， $\angle C=70^\circ$ ，点 P 在 $\triangle ABC$ 的外部，且与 C 点均在 AB 的同侧，如果 $PC=BC$ ，那么 $\angle APB=_____$.



例 3 图

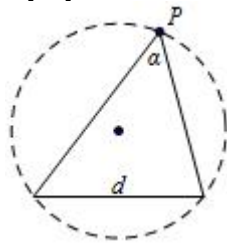
例 4. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB=4$ ， $AD=6$ ， E 为 AB 边的中点， F 是线段 BC 边上的动点. 将 $\triangle EFB$ 沿 EF 所在的直线折叠得到 $\triangle EB'F$ ，连接 $B'D$ ，则 $B'D$ 的最小值为_____.



II. 定边对定角模型

1.2.2 定弦定角

II 当某条边与该边所对的角是定值时，该角的顶点的轨迹是圆弧.



见直角→找斜边（定长）→想直径→定外心→现“圆”形；

见定角→找对边（定长）→想周角→转心角→现“圆”形；

【一般解题步骤】

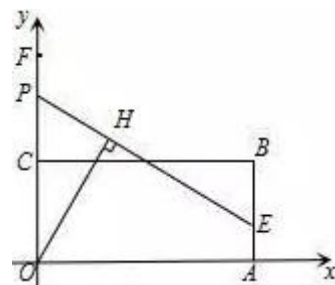
- ①让主动点动一下，观察从动点的运动轨迹，发现从动点的运动轨迹是一段弧。
- ②寻找不变的张角（这个时候一般是找出张角的补角，这个补角一般为 45° 、 60° 或者一个确定的三角函数的对角等）
- ③找张角所对的定弦，根据三点确定隐形圆。
- ④确定圆心位置，计算隐形圆半径。
- ⑤求出隐形圆圆心至所求线段定点的距离。
- ⑥计算最值：在此基础上，根据点到圆的距离求最值（最大值或最小值）。

1. 如图，以 $G(0, 1)$ 为圆心，半径为 2 的圆与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y

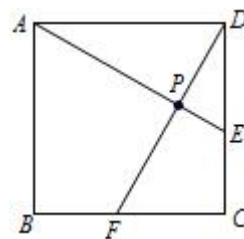


轴交于 C 、 D 两点，点 E 为 $\odot G$ 上一动点， $CF \perp AE$ 于 F ，当点 E 从点 B 出发顺时针运动到点 D 时，点 F 所经过的路径长为_____.

2. 如图，矩形 $OABC$ 的边 OA 、 OC 分别在 x 轴、 y 轴上，点 B 的坐标为 $(7, 3)$ ，点 E 在边 AB 上，且 $AE=1$ ，若点 P 为 y 轴上一动点，连接 EP ，过点 O 作直线 EP 的垂线段，垂足为点 H ，在点 P 从 $F(0, \frac{25}{4})$ 运动到原点 O 的过程中，点 H 的运动路径长为_____.

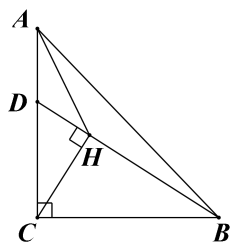


3. 在正方形 $ABCD$ 中， $AD=2$ ，点 E 从 D 出发向终点 C 运动，点 F 从 C 出发向终点 B 运动，且始终保持 $DE=CF$ ，连接 AE 和 DF 交于点 P ，则 P 点运动的路径长是_____.



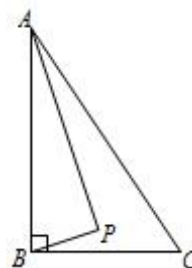
4. 等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=BC=4$ ， D 为线段 AC 上一动点，连

接 BD ，过点 C 作 $CH \perp BD$ 于 H ，连接 AH ，则 AH 的最小值为_____.



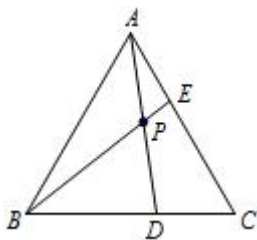
第 4 题

5. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB \perp BC$ ， $AB=6$ ， $BC=4$ ， P 是 $\triangle ABC$ 内部的一个动点，且满足 $\angle PAB = \angle PBC$ ，则线段 CP 长的最小值为_____.

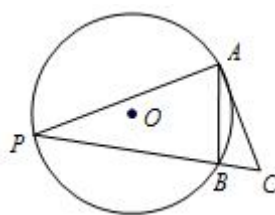


第 5 题图

6. 如图，在边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边 $\triangle ABC$ 中，动点 D 从 C 向终点 B 运动，同时点 E 以相同的速度从 A 出发向终点 C 运动，连接 BE 、 AD 相交于点 P ，则点 P 的路径长为_____.



第 6 题图



第 7 题图

7. 如图， $\odot O$ 的半径为 1，弦 $AB=1$ ，点 P 为优弧 AB 上一动点， $AC \perp AP$ 交直线 PB 于点 C ，则 $\triangle ABC$ 的最大面积是_____.

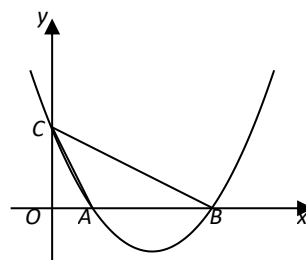
8. 如图，已抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于 $A(1, 0)$ 、 $B(4, 0)$

两点，与 y 轴交于 $C(0, 2)$ ，连结 AC 、 BC 。

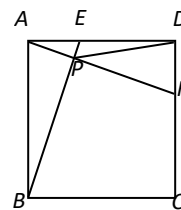
(1) 求抛物线解析式；

(2) BC 的垂直平分线交抛物线于 D 、 E 两点，求直线 DE 的解析式；

(3) 若点 P 在抛物线的对称轴上，且 $\angle CPB = \angle CAB$ ，求出所有满足条件的 P 点坐标。

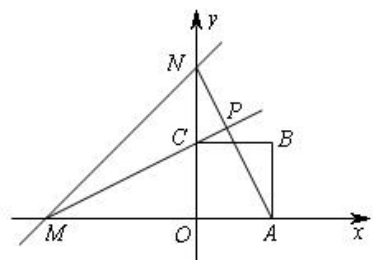


9. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB=2$ ，动点 E 从点 A 出发向点 D 运动，同时动点 F 从点 D 出发向点 C 运动，点 E 、 F 运动的速度相同，当它们到达各自终点时停止运动，运动过程中线段 AF 、 BE 相交于点 P ，则线段 DP 的最小值为_____。

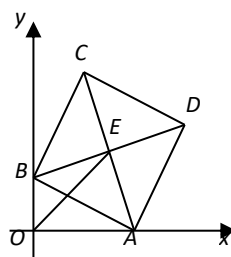


变式：直线 $y=x+4$ 分别与 x 轴、 y 轴相交与点 M 、 N ，边长为 2 的正方形

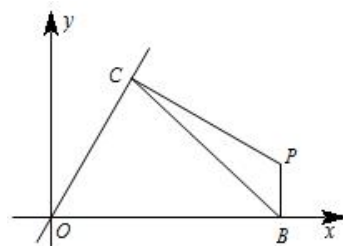
$OABC$ 一个顶点 O 在坐标系的原点，直线 AN 与 MC 相交与点 P ，若正方形绕着点 O 旋转一周，则点 P 到点 $(0, 2)$ 长度的最小值是 _____.



10. 如图，边长为 3 的正方形 $ABCD$ ，两顶点 A 、 B 分别在平面直角坐标系的 x 轴、 y 轴的正半轴上滑动，点 C 点 D 在第一象限，点 E 为正方形 $ABCD$ 的对称中心，连结 OE ，则 OE 的长的最大值是_____.



变式：如图，已知平面直角坐标系中，直线 $y=kx(k \neq 0)$ 经过点 $C(a, \sqrt{3}a)$ ($a > 0$)。线段 BC 的两个端点分别在 x 轴与直线 $y=kx$ 上 (B 、 C 均与原点 O 不重合) 滑动，且 $BC=2$ ，分别作 $BP \perp x$ 轴， $CP \perp$ 直线 $y=kx$ ，交点为 P ，经探究在整个滑动过程中， P 、 O 两点间的距离为定值_____.

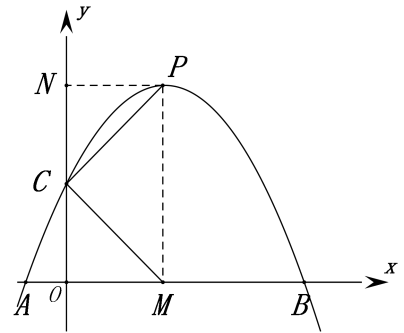


11. 如图，开口向下的抛物线 $y = a(x - 2)^2 + k$ 交 x 轴于点 A 、 B 两点，交 y 轴

正半轴于点 C，顶点为 P，过顶点 P 作 x 轴，y 轴的垂线，垂足分别为 M, N，
连结 CP, CM， $\angle CPM=45^\circ$ ， $\tan \angle CMP=0.8$.

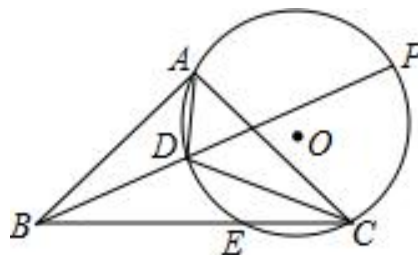
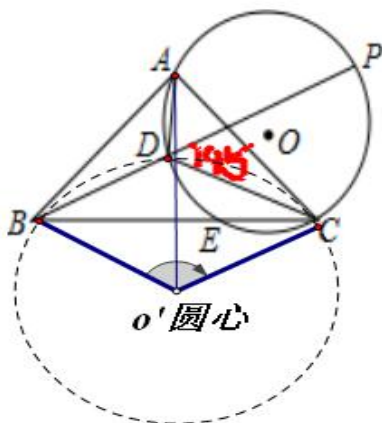
(1) 求该抛物线的函数解析式；

(2) 若点 D 为射线 PC 上动点，BD 交 $\triangle PMD$ 的外接圆于点 Q，求 PQ 的最小值.



【例 1】如图， $\triangle ABC$ 中， $AC=3$ ， $BC=4\sqrt{2}$ ， $\angle ACB=45^\circ$ ， D 为 $\triangle ABC$ 内一动点， $\odot O$ 为 $\triangle ACD$ 的外接圆，直线 BD 交 $\odot O$ 于 P 点，交 BC 于 E 点，弧 $AE=CP$ ，则 AD 的最小值为（ ）

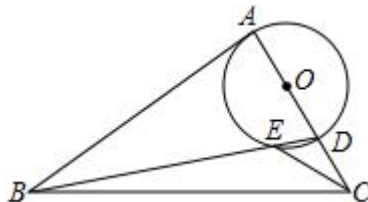
- A. 1 B. 2
C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{41}-4\sqrt{2}$



弧 $AE=CP$
 $\therefore \angle PDC=45^\circ \therefore \angle BDC=135^\circ$, 定弦对定角
 过 B, D, C 三点做圆 O'
 $\therefore \angle BO'C=90^\circ$
 $\triangle BO'C$ 为等腰直角三角形, 所以半径 $O'C=4$
 所以 $\angle ACO'=90^\circ$, 勾股定理 $AO'=5$,
 所以 $AD=AO'-O'D=5-4=1$

【例 2】如图， $AC=3$ ， $BC=5$ ，且 $\angle BAC=90^\circ$ ， D 为 AC 上一动点，以 AD 为直径作圆，连接 BD 交圆于 E 点，连 CE ，则 CE 的最小值为（ ）

- A. $\sqrt{13}-2$
B. $\sqrt{13}+2$
C. 5
D. $\frac{16}{9}$



【练】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC=3$ ， $BC=4\sqrt{2}$ ， $\angle ACB=45^\circ$ ， $AM \parallel BC$ ，点 P

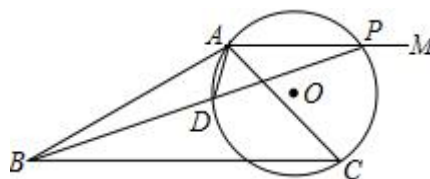
在射线 AM 上运动，连 BP 交 $\triangle APC$ 的外接圆于 D，则 AD 的最小值为 ()

A. 1

B. 2

C. $\sqrt{2}$

D. $4\sqrt{2}-3$



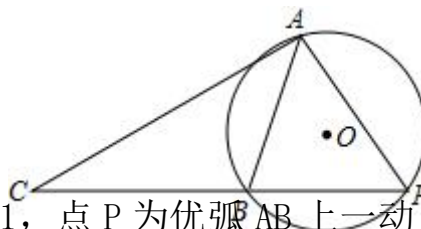
【例 3】如图， $\odot O$ 的半径为 2，弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$ ，点 P 为优弧 AB 上一动点， $AC \perp AP$ 交直线 PB 于点 C，则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值是 ()

A. $12+6\sqrt{3}$

B. $6+3\sqrt{3}$

C. $12+3\sqrt{3}$

D. $6+4\sqrt{3}$



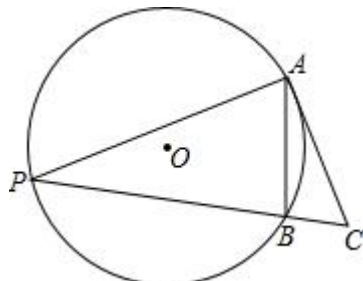
【练】如图， $\odot O$ 的半径为 1，弦 $AB=1$ ，点 P 为优弧 AB 上一动点， $AC \perp AP$ 交直线 PB 于点 C，则 $\triangle ABC$ 的最大面积是 ()

A. $\frac{1}{2}$

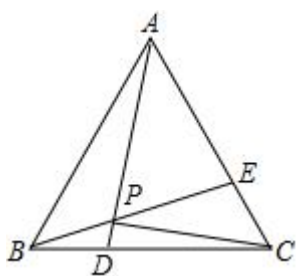
B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

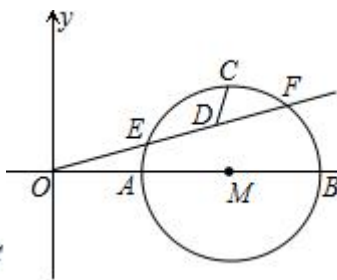
D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$



【例 4】如图，边长为 3 的等边 $\triangle ABC$ ，D、E 分别为边 BC、AC 上的点，且 $BD=CE$ ，AD、BE 交于 P 点，则 CP 的最小值为_____



例题 4



例题 5

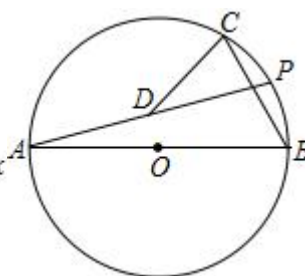
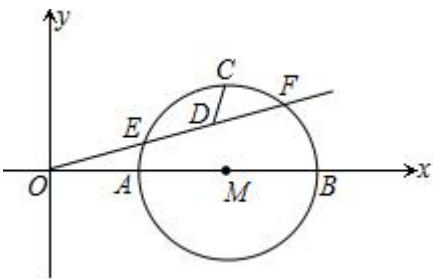


图 8

【例 5】如图， $A(1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ ，以 AB 为直径作 $\odot M$ ，射线 OF 交 $\odot M$ 于

E、F 两点，C 为弧 AB 的中点，D 为 EF 的中点．当射线绕 O 点旋转时，CD 的最小值为_____



例题 5

【练】如图 8，AB 是⊙O 的直径，AB=2， $\angle ABC=60^\circ$ ，P 是上一动点，D 是 AP 的中点，连接 CD，则 CD 的最小值为_____

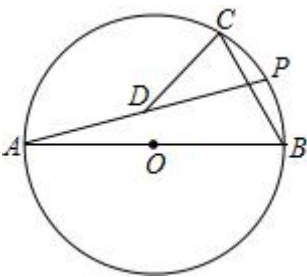
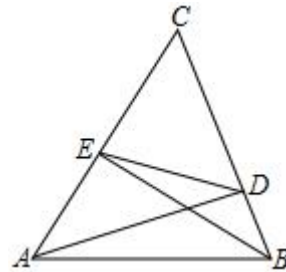


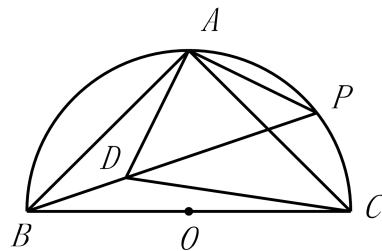
图 8

针对练习：

1. 如图，在动点 C 与定长线段 AB 组成的 $\triangle ABC$ 中， $AB=6$ ， $AD \perp BC$ 于点 D ， $BE \perp AC$ 于点 E ，连接 DE 。当点 C 在运动过程中，始终有 $\frac{DE}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，则点 C 到 AB 的距离的最大值是_____



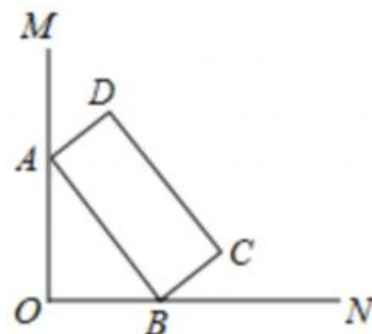
2. 如图，已知以 BC 为直径的 $\odot O$ ， A 为弧 BC 中点， P 为弧 AC 上任意一点， $AD \perp AP$ 交 BP 于 D ，连 CD 。若 $BC=8$ ，则 CD 的最小值为_____



1.3 动点轨迹为其他曲线，构造三角形

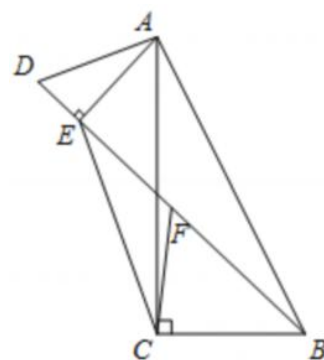
方法指导：1. 当动点轨迹不是“定线”或“定圆”时，不妨将此线段转化为一个三角形中，其中在该三角形中其他两条边位置不定但长度确定，则所求线段的最大值为其他两线段长之和，最小值为其他两线段长之差. 2. 在转化较难进行时需要借助于三角形的中位线及直角三角形斜边上的中线。

例 1、如图， $\angle MON = 90^\circ$ ，矩形 $ABCD$ 的顶点 A 、 B 分别在边 OM ， ON 上，当 B 在边 ON 上运动时， A 随之在边 OM 上运动，矩形 $ABCD$ 的形状保持不变，其中 $AB = 2$ ， $BC = 1$ ，求运动过程中，点 D 到点 O 的最大距离.



变式训练：

1、如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $BC = 6$ ， $\tan \angle BAC = \frac{1}{2}$ ，点 D 在边 AC 的三等分点处，将线段 AD 绕点 A 旋转，连接 BD ， F 为 BD 中点，求线段 CF 长度的最大值.



2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=2$ ， $BC=1$ ，点 A 、 C 分别在 x 轴、 y 轴上，当点 A 在 x 轴运动时，点 C 随之在 y 轴上运动，在运动过程中，点 B 到原点 O 的最大距离为

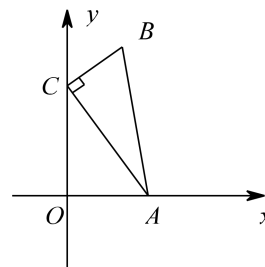
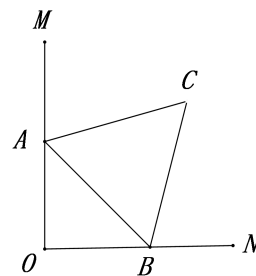


图12-2

答案： $\sqrt{2} + 1$

提示：取 AC 中点 D ，由 $BO \leq OD + BD = 1 + \sqrt{2}$ ，知 BO 的最大值为 $\sqrt{2} + 1$

3. 如图， $\angle MON=90^\circ$ ，线段 AB 两端点分别在边 OM ， ON 上，当 A 在边 OM 上运动时， B 随之在边 ON 上运动， $AB=2$ 保持不变，以 AB 为边向外作等边 $\triangle ABC$ ，在运动过程中，四边形 $AOBC$ 的面积的最大值是_____.



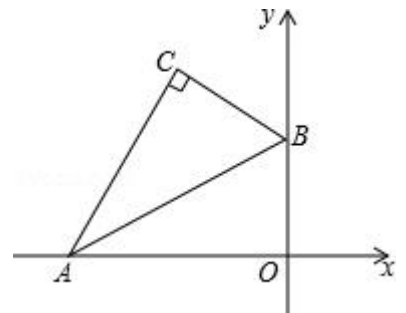
4. 如图，平面直角坐标系中，将含 30° 的三角尺的直角顶点 C 落在第二象限．其斜边两端点 A 、 B 分别落在 x 轴、 y 轴上，且 $AB=12\text{cm}$

(1) 若 $OB=6\text{cm}$.

①求点 C 的坐标；

②若点 A 向右滑动的距离与点 B 向上滑动的距离相等，求滑动的距离；

(2) 点 C 与点 O 的距离的最大值=_____ cm .



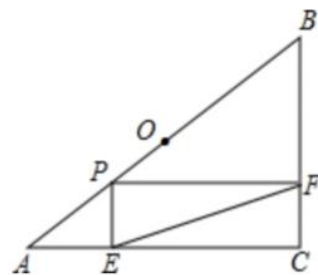
2 双动点型

解决双动点问题的常用方法是转化为单动点问题，接着再用单动点的方法解决线段最值问题。有这样一类双动点，它是由某一动点所产生的，同样就可用“源动点”和“从动点”的分析方法来处理，现总结思考前三个步骤：(一)分析“源动点”的不变量。(二)分析“双动点”与“源动点”间关系。(三)转化为单动点问题。显然确定“双动点”与“源动点”间关系是实现转化的关键。

2.1 利用等量代换实现转化

例 1、 $\triangle ABC$ 是以 AB 为斜边的直角三角形， $AC=4$ ， $BC=3$ ， P 是 AB 上一动点，且 $PE \perp AC$ 于 E ， $PF \perp BC$ 于 F ，求 EF 的最小值。

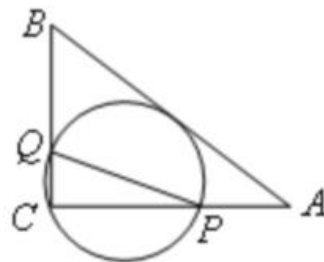
分析：点 P 带动点 E 、 F ，显然点 P 是双动点 E 、 F 的“源动点”。第一步，“源动点” P 在定边 AB 上运动。第二步，由条件可知四边形 $PECF$ 为矩形，所以双动点 EF 与“源动点” P 存在等量关系 $EF=CP$ 。第三步， C 是定点， P 是动点且在一边上运动，可转化为“动点轨迹为一条直线的单动点型”。



提示：双动点线段能否等于图中“源动点”与某一定点连结的线段？

2.2 利用和差关系实现转化

例 2、如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=10$ ， $AC=8$ ， $BC=6$ ，经过点 C 且与边 AB 相切的动圆与 CA ， CB 分别相交于点 P ， Q ，则线段 PQ 长度的最小值是_____.

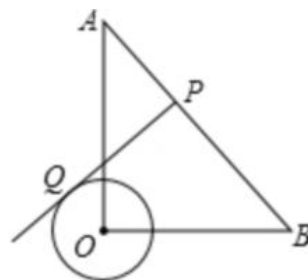


分析：本题的双动点 P 、 Q 可看成由“源动点” E 产生. 第一步，“源动点” E 在定边上运动，且保持 $OE \perp AB$ ，第二步，双动点 PQ 是圆上的动弦且所对圆周角为直角，因此 PQ 为 $\odot O$ 直径. 源动点与双动点满足 $PQ=CO+OE$. 第三步， PQ 长转化为 $\triangle COE$ 三边关系，当 C 、 O 、 E 三点共线时 CE 最短，可转化为“动点轨迹为一条直线的单动点型”. 当 $CE \perp AB$ 时 PQ 长度最小。

提示：双动点线段能否表示成与“源动点”相关线段的和(差)？

2.3 利用勾股定理实现转化

例 3、如图，在 $Rt\triangle AOB$ 中， $OA=OB=3\sqrt{2}$ ， $\odot O$ 的半径为 1，点 P 是 AB 边上的动点，过点 P 作 $\odot O$ 的一条切线 PQ (点 Q 为切点)，则切线 PQ 的最小值为_____.

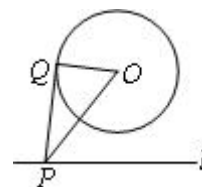


分析：PQ 为 $\odot O$ 切线， $\therefore PQ \perp OQ$ ，双动点 PQ 与“源动点”P 满足勾股定理 $PQ = \sqrt{OP^2 - OQ^2}$ ，而 OQ 为定值 1，因此要 PQ 最小只需 OP 取最小．问题可转化为“动点轨迹为一条直线的单动点型”

提示：双动点的线段出现“垂直”信息时能否与“源动点”构成“直角三角形”，从而利用勾股定理实现单一动点的转化。

【练习】如图， $\odot O$ 的半径为 2，点 O 到直线 l 的距离为 3，点 P 是直线 l 上的一个动点，PQ 切 $\odot O$ 于点 Q，则 PQ 的最小值为【 】

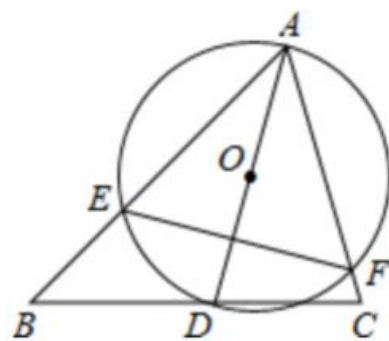
- A. $\sqrt{13}$ B. $\sqrt{5}$ C. 3 D. 2



2.4 利用三角形边角关系实现转化

例 4、如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ， $AB = 2$ ，D 是线段 BC 上的一个动点，以 AD 为直径画 $\odot O$ 分别交于 AB、AC 于 E、F，连接 EF，则线段 EF 长度的最小值为_____.

分析：本题的难点就在于确定双动点 EF 与“源动点”D 的关系，即 EF 与 AD 之间的数量关系．连半径构造等腰 $\triangle OEF$ ，达到定角圆周角 $\angle EAF$ 转化为圆心角 $\angle EOF$ ，直径 AD 转化为半径 OE、



OF，使 EF 与 AD 共存于一个三角形中，解三角形得 $EF = \frac{\sqrt{3}}{2}AD$ ．因 A 是定点，D 在线段 BC 上动，问题最终转化为“动点轨迹为一条直线的单动点型”。

二、两条线段最值

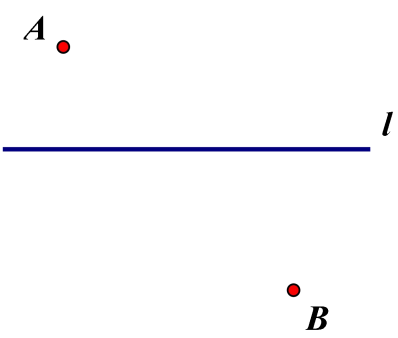
1 PA+PB 型

1.1 两定一动（将军饮马）

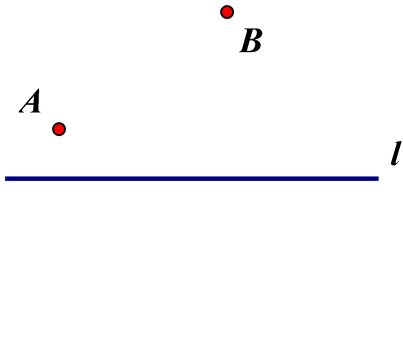
出现一个动点的解题方法

这类试题的解决方法主要是通过轴对称，将动点所在直线同侧的两个定点中的其中一个，映射到直线的另一侧。当动点在这个定点的对称点及另一定点的线段上时，由“两点之间线段最短”可知线段和的最小值，最小值为定点线段的长。

引：如图在直线 l 上找一点 P 使 $AP+BP$ 最短。



图（1）



图（2）

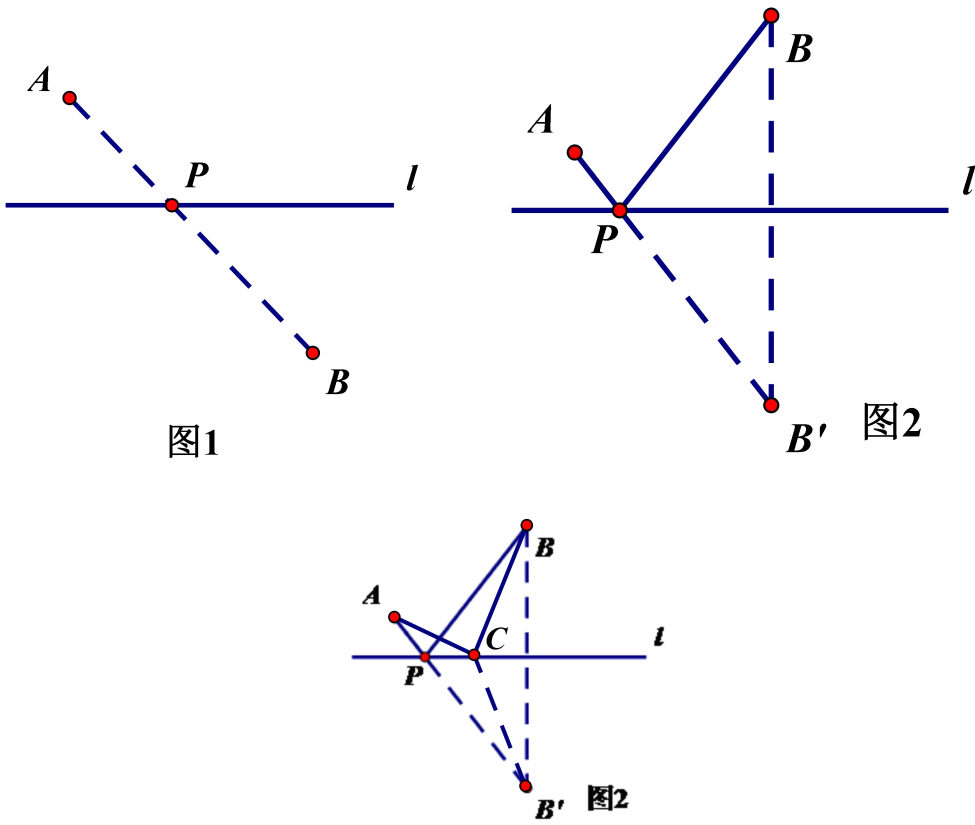
解：（1）如果两点在直线异侧，如图（1），连接 AB 交直线 l 于点 P ，则点 P 为所示作的点；

（2）如果两点在直线同侧，如图（2），可通过轴对称把问题转化为两点在直线异侧的情况。

证明：如下图所示，从 B 出发向河岸引垂线，垂足为 D ，在 BD 的延长线上，取 B 关于河岸的对称点 B' ，连结 AB' ，与河岸线相交于 P ，则 P 点就是所求作的点，只要从 A 出发，沿直线到 P ，再由 P 沿直线走到 B ，所走的路程就是最短的。

如果在河边的另外任一点 C ，则 $CB=CB'$ ，但是， $AC+CB=AC+CB' > AB' = AP+PB' = AP+PB$ 。可见，在 P 点外任何一点 C ，它与 A 、 B 两点的距离和都比 $AP+PB$ 都长。

本质：两点之间，线段最短。



【小结】

通过“对称”及构建“两点间的线段”基本图形，将动态变化中的线段通过转换，达到变化过程中的极限状态，得到最小值即“两点间的距离”。

路径最短问题，基本上运用轴对称，将分散的线段集中到两点之间，从而运用两点之间线段最短，来实现最短路径的求解，所以最短路径问题需要考虑轴对称。

两个关键点：

(1) 找准对称轴。动点所在的直线即为对称轴。

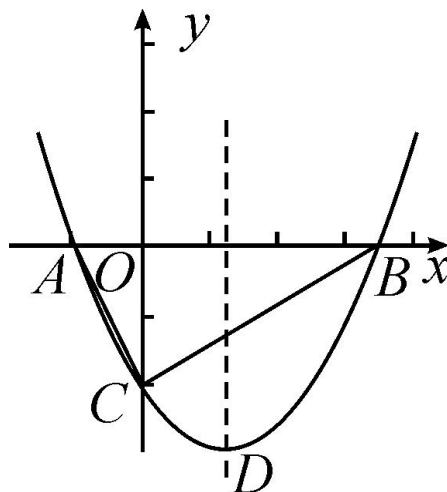
(2) 同侧化异侧。同侧的两个点，通过作对称点，转化为对称轴异侧的两个点，连线即与对称轴相交，交点即是所求。

将军饮马口诀：“和最小，对称找”

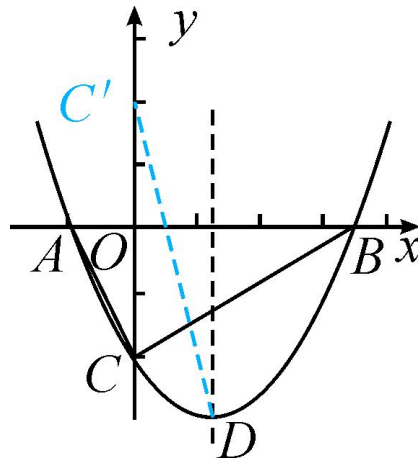
例 1 如图，抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx - 2$ 与 x 轴交于 A, B 两点，与 y 轴交于 C 点，且 $A(-1, 0)$ 。

(1) 求抛物线的解析式及顶点 D 的坐标；

(2) 点 M 是 x 轴上的一个动点，当 $\triangle DCM$ 的周长最小时，求点 M 的坐标。



解：(1) \because 点 $A(-1, 0)$ 在抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx - 2$ 上， $\therefore \frac{1}{2} \times (-1)^2 + b \times (-1) - 2 = 0$ ，解得 $b = -\frac{3}{2}$ ， \therefore 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$ ， $\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2 = \frac{1}{2}(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{8}$ ， \therefore 顶点 D 的坐标为 $(\frac{3}{2}, -\frac{25}{8})$



(2) 作出点 C 关于 x 轴的对称点 C' ，则 $C'(0, 2)$ ，连接 $C'D$ 交 x 轴于点 M ，根据轴对称性及两点之间线段最短可知， CD 一定，当 $MC+MD$ 的值最小时， $\triangle CDM$ 的周长最小，

设直线 $C'D$ 的解析式为 $y=ax+b(a \neq 0)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} b=2, \\ 3a+b=-\frac{25}{8}, \end{cases} \text{ 解得 } a=-\frac{41}{12}, b=2,$$

$$\therefore y_{C'D} = -\frac{41}{12}x + 2, \text{ 当 } y=0 \text{ 时, } -\frac{41}{12}x + 2 = 0, \text{ 则 } x = \frac{24}{41},$$

$$\therefore M\left(\frac{24}{41}, 0\right)$$

例题 2 定义一种变换：平移抛物线 F_1 得到抛物线 F_2 ，使 F_2 经过 F_1 的顶点 A 。设 F_2 的对称轴分别交 F_1 、 F_2 于点 D 、 B ，点 C 是点 A 关于直线 BD 的对称点。

如图 1，若 $F_1: y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ ，经过变换后， $AC = 2\sqrt{3}$ ，点 P 是直线 AC 上的动点，求点 P 到点 D 的距离和到直线 AD 的距离之和的最小值。

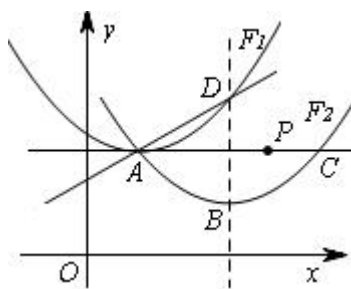


图 1

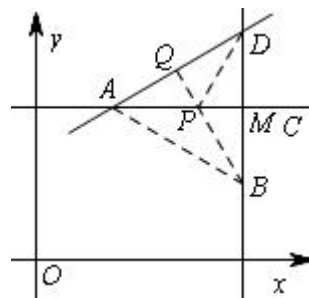


图 2

分析：如何找对称点进行变换是本题的难点，注意到点 P 是直线 AC 上的动点，所以直线 AC 就是对称轴，从而运用对称变换把线段 PD 转化为线段 PB 进行求解。

解：由已知易得 $A(1, 2)$ 、 $D(1+\sqrt{3}, 3)$ 、 $B(1+\sqrt{3}, 1)$

从而可知点 B 和点 D 关于直线 AC 对称， $\therefore PD=PB$

如图 2，作 $BQ \perp AD$ ，垂足为 Q ，根据“垂线段最短”可知线段 BQ 的长度就是所要求距离之和的最小值。 BQ 与 AC 的交点即为使得两个距离之和最小的 P 点。

由 $\triangle ABD$ 的面积关系得： $\frac{1}{2} \cdot AD \cdot BQ = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AM$

$\therefore BQ = \sqrt{3}$ ，故点 P 到点 D 的距离和到直线 AD 的距离之和的最小值为 $\sqrt{3}$ 。

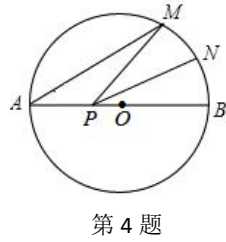
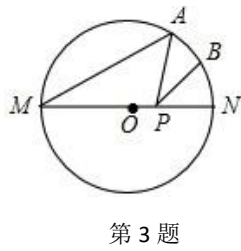
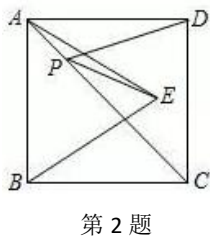
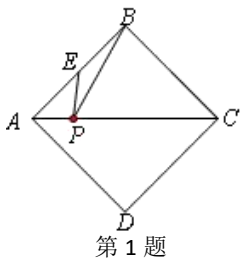
解题策略：在不改变线段长度的前提下，运用对称变换把对称轴同侧的两条线段放在了对称轴的两侧，把复杂的最值问题转化为基本问题。根据“两点之间线段最短”或“垂线段最短”把“两折线”转“直”，找出最小位置，并求出最小值。**变换的奥秘是：**动点在哪条直线上，就以这条直线为对称轴，构建某一定点的对称点。对称变换是转化的手段，也是解决问题的关键。

【牛刀小试】

1. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 2， E 为 AB 的中点， P 是 AC 上一动点．则 $PB+PE$ 的最小值是_____．

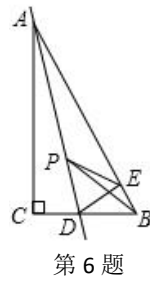
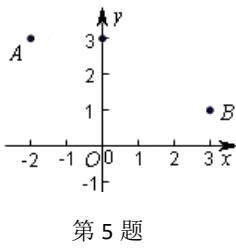
2. 如图所示，正方形 $ABCD$ 的面积为 12， $\triangle ABE$ 是等边三角形，点 E 在正方形 $ABCD$ 内，在对角线 AC 上有一点 P ，使 $PD+PE$ 的和最小，则这个最小值为_____．

3. 如图， MN 是半径为 1 的 $\odot O$ 的直径，点 A 在 $\odot O$ 上， $\angle AMN=30^\circ$ ， B 为 AN 弧的中点， P 是直径 MN 上一动点，则 $PA+PB$ 的最小值为_____．



4. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， $AB=8$ ，点 M 在 $\odot O$ 上， $\angle MAB=20^\circ$ ， N 是弧 MB 的中点， P 是直径 AB 上的一动点．若 $MN=1$ ，则 $\triangle PMN$ 周长的最小值为_____．

5. 已知 $A(-2, 3)$ ， $B(3, 1)$ ， P 点在 x 轴上，若 $PA+PB$ 长度最小，则最小值为_____．

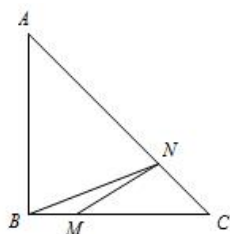


6. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle B=60^\circ$ ，点 D 是 BC 边上的点， $CD=1$ ，将 $\triangle ABC$ 沿直线 AD 翻折，使点 C 落在 AB 边上的点 E 处，若点 P 是直线 AD 上的动点，则 $\triangle PEB$ 的周长的最小值是_____。

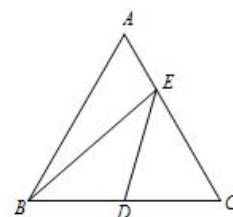
7. 如图，有一圆形透明玻璃容器，高 15cm，底面周长为 24cm，在容器内壁柜上边缘 4cm 的 A 处，停着一只小飞虫，一只蜘蛛从容器底部外向上爬了 3cm 的 B 处时（ B 处与 A 处恰好相对），发现了小飞虫，问蜘蛛怎样爬去吃小飞虫最近？它至少要爬多少路？（厚度忽略不计）。



8. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=90^\circ$ ， $AB=BC=4$ ，点 M 在 BC 上，且 $BM=1$ ， N 是 AC 上一动点，则 $BN+MN$ 的最小值为_____。



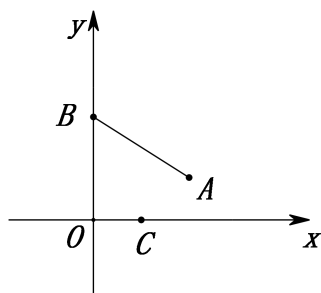
第 8 题



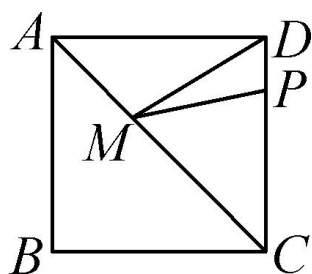
第 9 题

9. 如图，在边长为 2 的等边 $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 的中点， E 是 AC 边上一点，则 $BE+DE$ 的最小值为_____。

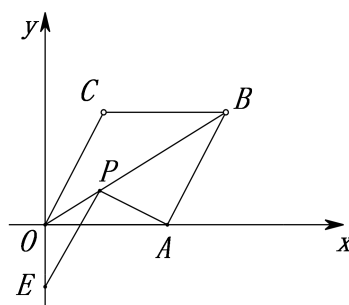
10. 如图，点 A ， B 的坐标分别为 $(\sqrt{3}, 0)$ 和 $(0, 2)$ ，点 C 是 x 轴上的一个动点，且 A, B, C 三点不在同一条直线上，当 $\triangle ABC$ 的周长最小时，点 C 的坐标是_____。



11. 如图，正方形 ABCD 的边长是 8，P 是 CD 上的一点，且 PD 的长为 2，M 是其对角线 AC 上的一个动点，则 DM+MP 的最小值是 10 .



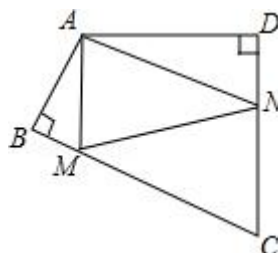
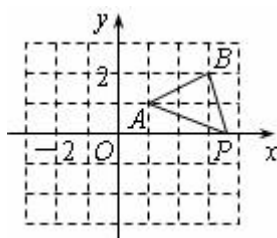
第 11 题



第 12 题

12. 菱形 ABCO 在平面直角坐标系中的位置如图所示，顶点 $(2\sqrt{3}, 0)$ ， $\angle AOC = 60^\circ$ ，点 P 是对角线 OB 上一个动点， $E(0, -1)$ ，问：EP+AP 最短是 ，此时点 P 的坐标为 .

13. 如图，已知点 A(1, 1)、B(3, 2)，且 P 为 x 轴上一动点，则 $\triangle ABP$ 的周长的最小值为 .



14. 如图，四边形 ABCD 中， $\angle BAD = 120^\circ$ ， $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ，在 BC、CD 上分别找一点 M、N，使 $\triangle AMN$ 周长最小时，则 $\angle AMN + \angle ANM$ 的度数为 **【 】**

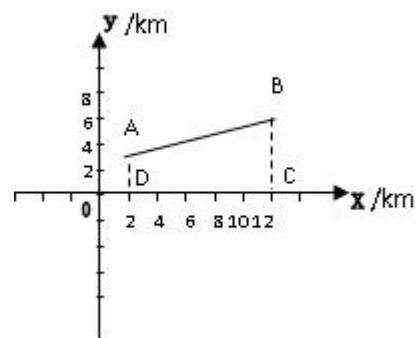
A. 130° B. 120° C. 110° D. 100°

15. 某乡镇为了解决抗旱问题，要在某河道建一座水泵站，分别向河的同侧张村 A 和李村 B 送水。经实地勘查后，工程人员设计图纸时，以河道上的大桥 O 为坐标原点，以河道所在的直线为 x 轴建立直角坐标系（如图）。两村的坐标分别为 A（2，3），B（12，7）。

(1) 若从节约经费考虑，水泵站建在距离大桥 O 多远

的地方可使所用输水管道最短？

(2) 水泵站建在距离大桥 O 多远的地方，可使它到张村、李村的距离相等？



1.2 两定两动

● 过河拆桥

【解决方法】平移变换

平移变换的特征是：对应线段平行且相等，它可以改变线段的位置却不改变其方向和长度。平移变换是把复杂的最值问题转化为基本问题的重要手段。

【问题再现】（人教版七年级（下）第五章造桥选址问题）如图 3， A 和 B 两地在一条河的两岸，现要在河上造一座桥 MN ，造桥在何处才能使从 A 到 B 的路径 $AMNB$ 最短？（假定河的两岸是平行的直线，桥 MN 要与河岸垂直）

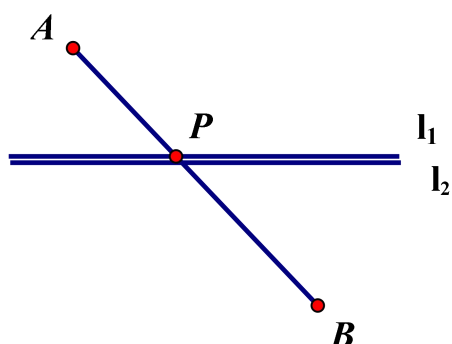


图 3

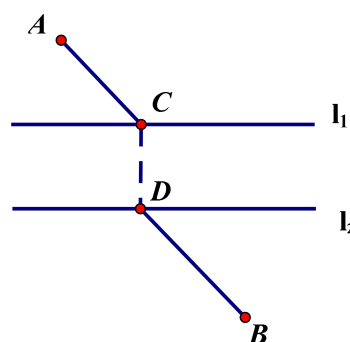
在解决这道题目前，我们先看以下模型：

【模型抽象】

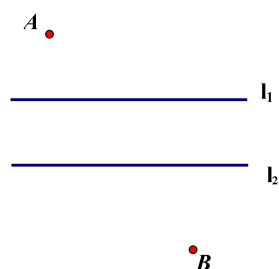
动手操作一：如果把直线 l_1 和点 A 向上运动，而直线 l_2 和点 B 不动，你会画吗？（平移要注意什么？）



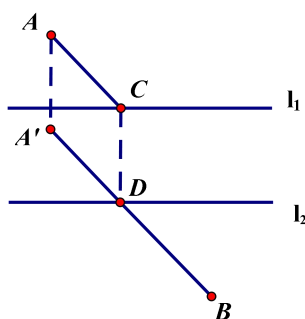
解：



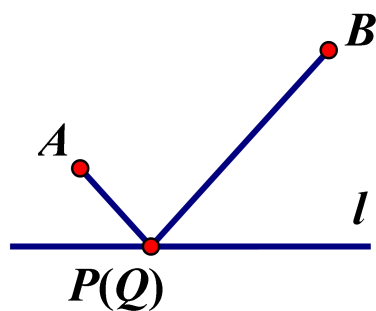
问题：A、B 为两村庄之间隔着河流，河流两岸为直线 l_1 、 l_2 ，若在两岸建桥 CD，桥与河流两岸垂直，桥建在何处，可使 $AC+CD+DB$ 最短。



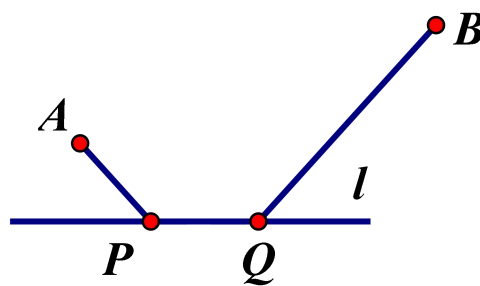
策略：平移回去，把问题转化为在直线上找一点 D，使 $A'D+DB$ 最短



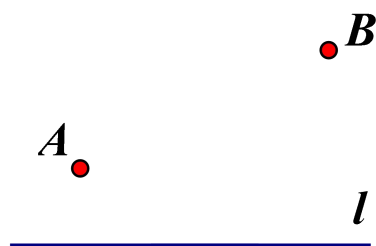
动手操作二：如果 P 不动，Q 平移 a 个单位，你会画吗？（平移要注意什么？）



解：



问题：如图，若 A、B 为定点，而线段 PQ 长为定值，当 P 在何处， $AP+PQ+QB$ 最短。



【小结】

两动点，其中一个随另一个动(一个主动，一个从动)，并且两动点间的距离保持不变。用平移方法，可把两动点变成一个动点，转化为“两个定点和一个动点”类型来解。(处理方法：当两点间有一段固定的距离时，利用平移可将这距离“压缩为零”，再连接构建“两点间的线段”这一图形。)

例 1 (人教版七年级(下)第五章造桥选址问题) 如图 3, A 和 B 两地在一条河的两岸, 现要在河上造一座桥 MN , 造桥在何处才能使从 A 到 B 的路径 $AMNB$ 最短? (假定河的两岸是平行的直线, 桥 MN 要与河岸垂直)



图 3

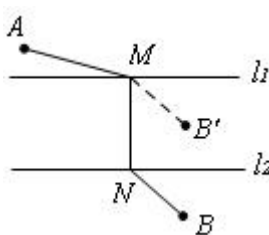


图 4 (1)

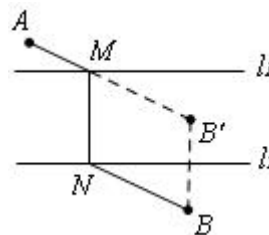


图 4 (2)

分析: 假设河的两岸为直线 l_1 、 l_2 . 这个问题要求“路径 $AMNB$ 最短”实际上就是“ $AM+BN$ ”最短(因为“桥要与河垂直”, 桥长是定值, 也就是河两岸的距离). 怎样保证“ $AM+BN$ ”最短呢? 如图 4 (1), 把 BN 沿与河岸垂直的方向平移河的宽度到 $B' M$ (B 为定点, 则点 B' 为定点), 则 $AM+BN=AM+B' M$, 点 A 、 B' 为定点, 点 M 为直线 l_1 上的动点, 所以当 A 、 M 、 B' 三点在一直线上时, $AM+B' M$ 最小.

解: 过点 B 作 $BB' \perp l_2$, 且 BB' 等于河宽, 连接 AB' 交 l_1 于 M 点, 作 $MN \perp l_1$ 交 l_2 于点 N , 则 MN 就为桥所在位置 (图 4 (2)).

解题策略: 运用平移变换, 在保持平移后的线段与原来的线段平行

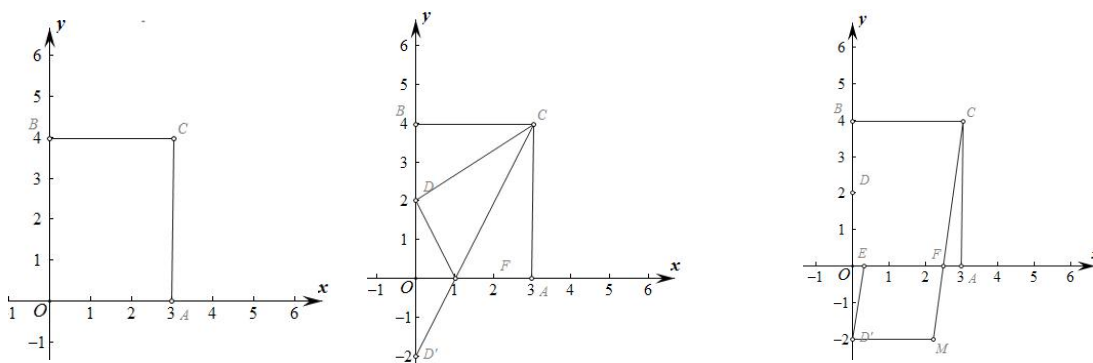
且相等的特性下，把无公共端点的两条线段移到新的位置并“接起来”，转换成更简单的基本图形．根据“两点之间线段最短”把“两折线”转“直”，找出最小位置．平移是转化的手段，也是解决问题的关键．

【牛刀小试】

1. 在平面直角坐标系中，矩形 $OACB$ 的顶点 O 在坐标原点，顶点 A 、 B 分别在 x 轴、 y 轴的正半轴上， $OA=3$ ， $OB=4$ ， D 为边 OB 的中点．

(1) 若 E 为边 OA 上的一个动点，当 $\triangle CDE$ 的周长最小时，求点 E 的坐标；

(2) 若 E 、 F 为边 OA 上的两个动点，且 $EF=2$ ，当四边形 $CDEF$ 的周长最小时，求点 E 、 F 的坐标．



● 四边形周长最小；

两定两动求四边形周长最小，有两个动点时，那么动点所在的两条直线就为两条对称轴，再将两定点作关于两对称轴的对称点，分置于对称轴两侧，再连接，构建“两点间的线段”这一基本图形，通过对称转换，将三条动态线段重新拼接在一起，利用“两点之间线段最短”实现“化折为直”，即得最短路线。

例题（2006 北京）如图 8，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与 y 轴交于 $A(0, 3)$ ，与 x 轴分别交于 $B(1, 0)$ 和 $C(5, 0)$ 两点。

（1）求抛物线的解析式

（2）若点 D 为线段 OA 的三等分点，求直线 DC 的解析式

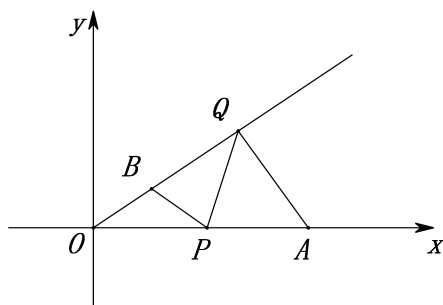
（3）若一个动点 P 自 OA 的中点 M 出发，先到达 x 轴上某点（设为点 E ），再到达抛物线的对称轴上某点（设为点 F ），最后运动到点 A ，求使点 P 运动的总路径最短的点 E 、点 F 的坐标，并求出这个最短路径的长。

提示： 本题的特征是两个动点、两个定点，两个动点分别在两条直线上运动，在两条直线上各找一个点使之与两个定点相连构成的四边形周长（实际还是三线段和， AM 为定值）最小。因此分别构建两个定点关于两个动点所在直线的对称点，把“三折线”转“直”，从而可求周长的最小值。

【牛刀小试】

如图，正比例函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的图像有一点 B ， $OB=1$ ，点 A 在 x 轴上， $A(3, 0)$ ，

点 P, Q 分别在射线 OA, OB 上，则 $BP+PQ+QA$ 的最小值是_____。



1.3 一定两动

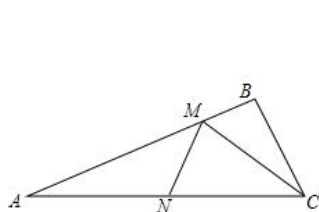
一定两动型可转化为“两点之间的连线中，线段最短”+“垂线段最短”

在这个问题的转换中，关键是作定点（或动点）关于动折点所在直线的对称点。通过等量代换将问题化为两定一动（将军饮马问题）

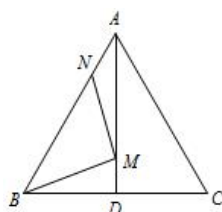
● 两动点不随动

一动点分别到一定点和一动点两线段和最小值。方法：让一个动点保持不动，寻找定点到定直线（动点所在的直线）的最短距离，最后利用折大于直，斜大于垂。

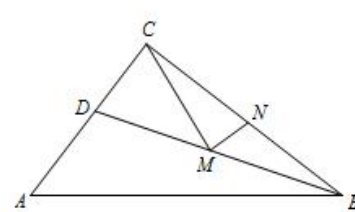
1. 如图 $\triangle ABC$ 中， $AC=6$ ， $\angle BAC=22.5^\circ$ ，点 M 、 N 分别是射线 AB 和 AC 上动点，则 $CM+MN$ 的最小值是_____。



第 1 题



第 2 题



第 3 题

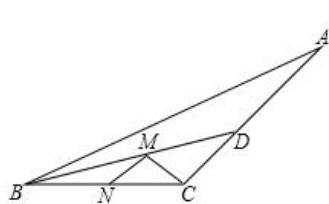
2. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， $AB=6$ ， N 为线段 AB 上的任意一点， $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D ， M 是 AD 上的动点，连结 BM 、 MN ，则 $BM+MN$ 的最小值是_____。

3. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=3$ ， $BC=4$ ， $AB=5$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ，如果 M 、 N 分别为 BD 、 BC 上的动点，那么 $CM+MN$ 的最小值是_____。

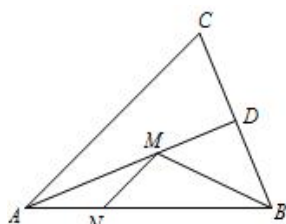
4. 如图，钝角 $\triangle ABC$ 的面积为18，最长边 $AB=12$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ，点 M 、 N 分别是 BD 、 BC 上的动点，则 $CM+MN$ 的最小值为_____.

5. 如图，在锐角 $\triangle ABC$ 中， $AB=4\sqrt{2}$ ， $\angle BAC=45^\circ$ ， $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D ， M 、 N 分别是 AD 和 AB 上的动点，则 $BM+MN$ 的最小值是_____.

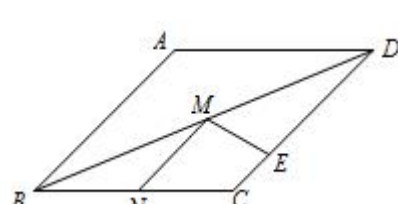
【变式1】菱形 $ABCD$ 中， $\angle BAC=45^\circ$ ， $BC=4\sqrt{2}$ ， M 、 N 、 E 分别在 BD 、 BC 、 CD 上运动，则 $MN+ME$ 的最小值为_____.



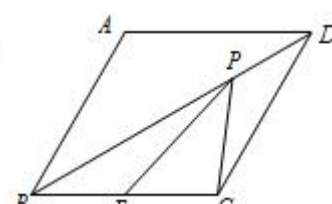
第4题图



第5题图



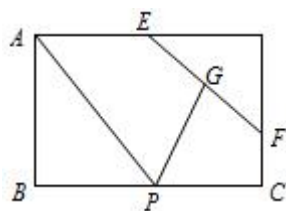
变式1图



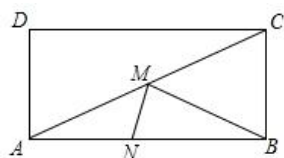
变式2图

【变式2】点 E 是菱形 $ABCD$ 边 BC 的中点， $\angle ABC=60^\circ$ ， P 是对角线 BD 上一点，且满足 $PC+PE=\sqrt{15}$ ，则菱形 $ABCD$ 面积的最大值为_____.

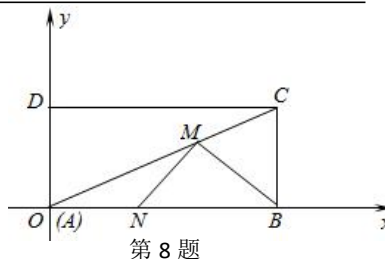
【变式3】如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB=2$ ， $AD=3$ ，点 E 、 F 分别为 AD 、 DC 边上的点，且 $EF=2$ ，点 G 为 EF 的中点，点 P 为 BC 上一动点，则 $PA+PG$ 的最小值为_____.



7. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB=10$ ， $BC=5$ ，若点 M 、 N 分别是线段 AC 、 AB 上的两个动点，则 $BM+MN$ 的最小值为_____.



第 7 题



第 8 题

8. 如图，在平面直角坐标系中，矩形 $ABCD$ 的顶点 A 、 B 、 C 的坐标分别为 $(0, 0)$ 、 $(20, 0)$ 、 $(20, 10)$ 。在线段 AC 、 AB 上各有一动点 M 、 N ，则当 $BM+MN$ 为最小值时，点 M 的坐标是_____.

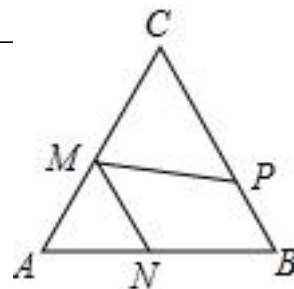
【小结】此类问题处理方法是将双动点转换为单动点，然后利用将军饮马模型。对于两动点问题可以让其中一个动点暂时保持不动，作此动点的对称点，从而将双动点转换为单动点，然后利用将军饮马模型，化折为直，最后利用定点到定直线之间垂线段最短找到最小值。

1.4 三动点

例题 如图 11-4 所示, 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B=90^\circ$, $AB=3$, $BC=4$, D 、 E 、 F 分别是三边 AB 、 BC 、 CA 上的点, 则 $DE+EF+FD$ 的最小值为_____.

答案: $\frac{24}{5}$ 提示: 作 F 关于 AB 的对称点 F' , 交于 AB 于 M , 作 F 关于 BC 的对称点 F'' , 交于 BC 于 N , F' , F'' 交 AB , BC 于 D , E , 当 BF 最短时, $DE+EF+FD$ 最小且为 $2BF = 2 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5}$.

【练习】 如图, 在等边 $\triangle ABC$ 中, $AB=4$, P 、 M 、 N 分别是 BC 、 CA 、 AB 边上动点, 则 $PM+MN$ 的最小值是_____



总之, 解决这一类动点最值问题, 关键在于善于作定点关于动点所在直线的对称点, 或动点关于动点所在直线的对称点。运用数形结合思想, 这对于解决动点最值问题有着事半功倍的作用。

- 出现垂直找对称;
- 角平分线找对称;
- 正方形对角线找对称;
- 菱形对角线找对称;
- 抛物线对称轴找对称;
- 圆中找对称

2 PA+k · PB 型

2.1 “胡不归模型”

【问题提出】如图①，已知海岛 A 到海岸公路 BD 的距离为 AB ， C 为公路 BD 上的酒店，从海岛 A 到酒店 C ，先乘船到登陆点 D ，船速为 a ，再乘汽车，车速为船速的 n 倍，点 D 选在何处时，所用时间最短？

【特例分析】若 $n=2$ ，则时间 $t=\frac{AD}{a}+\frac{CD}{2a}$ ，当 a 为定值时，问题转化为：在 BC 上确定一点 D ，使得 $AD+\frac{CD}{2}$ 的值最小．如图②，过点 C 做射线 CM ，使得 $\angle BCM=30^\circ$ ．

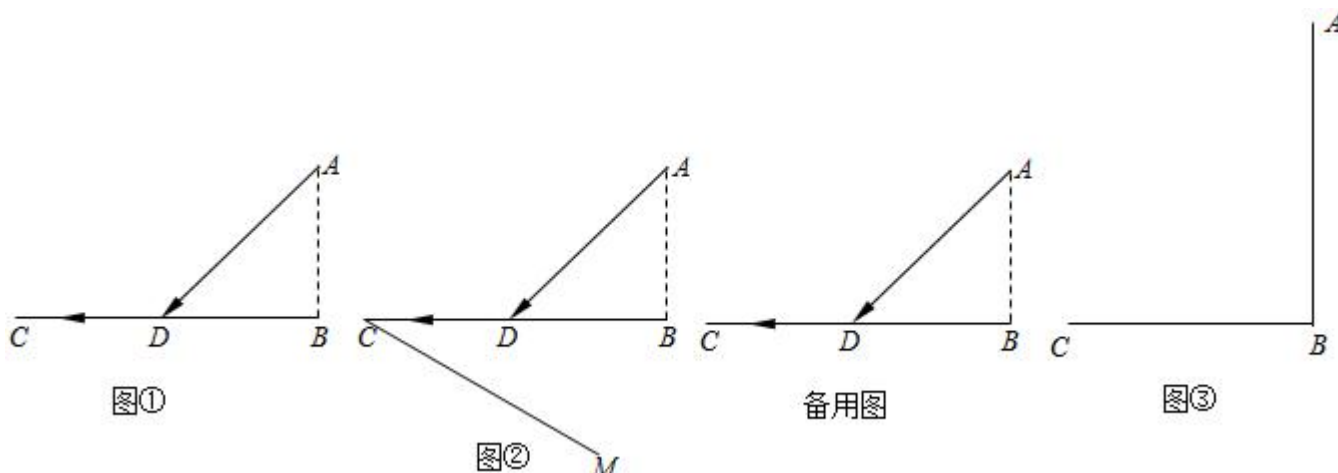
(1) 过点 D 作 $DE\perp CM$ ，垂足为 E ，试说明： $DE=\frac{CD}{2}$ ；

(2) 请在图②中画出所用时间最短的登陆点 D' ，并说明理由．

【问题解决】

(3) 请你仿照“特例分析”中的相关步骤，解决图①中的问题（写出具体方案，如相关图形呈现、图形中角所满足的条件、作图的方法等）．

【模型运用】



【套路归纳】

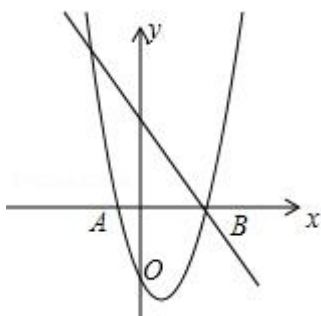
①将所求线段和改写为“ $PA + \frac{n}{m}PB$ ”的形式 ($\frac{n}{m} < 1$);

②在 PB 的一侧, PA 的异侧, 构造一个角度 α , 使得 $\sin \alpha = \frac{n}{m}$;

③过 A 作第②步所构造的角的一边垂线, 该垂线段即为所求最小值.

例题解析:

例 1、(2016•宜兴市一模) 如图, 抛物线 $y = x^2 - 2x - 3$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点, 过 B 的直线交抛物线于 E , 且 $\tan \angle EBA = \frac{4}{3}$, 有一只蚂蚁从 A 出发, 先以 1 单位/s 的速度爬到线段 BE 上的点 D 处, 再以 1.25 单位/s 的速度沿着 DE 爬到 E 点处觅食, 则蚂蚁从 A 到 E 的最短时间是_____s.



【解答】解: 过点 E 作 y 轴的平行线, 再过 D 点作 y 轴的平行线, 两线相交于点 H , 如图,

$\because EH \parallel AB$,

$\therefore \angle HEB = \angle ABE$,

$\therefore \tan \angle HED = \tan \angle EBA = \frac{DH}{EH} = \frac{4}{3}$,

设 $DH = 4m$, $EH = 3m$, 则 $DE = 5m$,

\therefore 蚂蚁从 D 爬到 E 点的时间 $= \frac{5m}{1.25} = 4m$ (s)

若设蚂蚁从 D 爬到 H 点的速度为 1 单位/s,

则蚂蚁从 D 爬到 H 点的时间 $= \frac{4m}{1} = 4$ (s),

∴ 蚂蚁从 D 爬到 E 点所用的时间等于从 D 爬到 H 点所用的时间相等,

∴ 蚂蚁从 A 出发, 先以 1 单位/s 的速度爬到线段 BE 上的点 D 处, 再以 1.25 单位/s 的速度沿着 DE 爬到 E 点所用时间等于它从 A 以 1 单位/s 的速度爬到 D 点, 再从 D 点以 1 单位/s 速度爬到 H 点的时间,

作 $AG \perp EH$ 于 G, 则 $AD + DH \geq AH \geq AG$,

∴ $AD + DH$ 的最小值为 AQ 的长,

当 $y=0$ 时, $x^2 - 2x - 3=0$, 解得 $x_1 = -1$, $x_2 = 3$,

则 A (-1, 0), B (3, 0),

直线 BE 交 y 轴于 C 点, 如图,

在 $Rt\triangle OBC$ 中, $\because \tan \angle CBO = \frac{CO}{OB} = \frac{4}{3}$,

∴ $OC=4$, 则 C (0, 4),

设直线 BE 的解析式为 $y=kx+b$,

把 B (3, 0), C (0, 4) 代入得 $\begin{cases} 3k+b=0 \\ b=4 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k=-\frac{4}{3} \\ b=4 \end{cases}$,

∴ 直线 BE 的解析式为 $y = -\frac{4}{3}x + 4$,

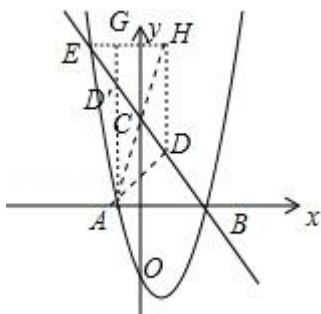
解方程组 $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = -\frac{4}{3}x + 4 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-\frac{7}{3} \\ y=\frac{64}{9} \end{cases}$, 则 E 点坐标为 $(-\frac{7}{3}, \frac{64}{9})$,

∴ $AQ = \frac{64}{9}$,

∴ 蚂蚁从 A 爬到 G 点的时间 $= \frac{\frac{64}{9}}{1} = \frac{64}{9}$ (s),

即蚂蚁从 A 到 E 的最短时间为 $\frac{64}{9}$ s.

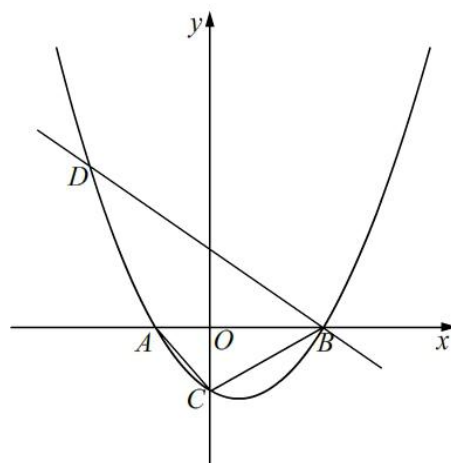
故答案为 $\frac{64}{9}$.



例 2、(2014 成都) 如图，已知抛物线 $y = \frac{k}{8}(x+2)(x-4)$ (k 为常数，且 $k > 0$) 与 x 轴从左至右依次交于 A, B 两点，与 y 轴交于点 C ，经过点 B 的直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ 与抛物线的另一交点为 D 。

(1) 若点 D 的横坐标为 -5 ，求抛物线的函数表达式；

(2) 若在第一象限的抛物线上有点 P ，使得以 A, B, P 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，求 k 的值；



(3) 在 (1) 的条件下，设 F 为线段 BD 上一点 (不含端点)，连接 AF ，一动点 M 从点 A 出发，沿线段 AF 以每秒 1 个单位的速度运动到 F ，再沿线段 FD 以每秒 2 个单位的速度运动到 D 后停止。当点 F 的坐标是多少时，点 M 在整个运动过程中用时最少？

【解答】 解：(1) 抛物线 $y = \frac{k}{8}(x+2)(x-4)$ ，

令 $y=0$ ，解得 $x=-2$ 或 $x=4$ ，

$\therefore A(-2, 0), B(4, 0)$ 。

∵ 直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ 经过点 B (4, 0),

∴ $-\frac{\sqrt{3}}{3} \times 4 + b = 0$, 解得 $b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

∴ 直线 BD 解析式为: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

当 $x = -5$ 时, $y = 3\sqrt{3}$,

∴ D (-5, $3\sqrt{3}$).

∵ 点 D (-5, $3\sqrt{3}$) 在抛物线 $y = \frac{k}{8}(x+2)(x-4)$ 上,

∴ $\frac{k}{8}(-5+2)(-5-4) = 3\sqrt{3}$,

∴ $k = \frac{8\sqrt{3}}{9}$.

∴ 抛物线的函数表达式为: $y = \frac{\sqrt{3}}{9}(x+2)(x-4)$.

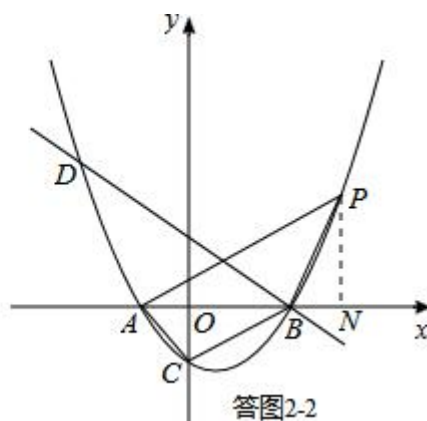
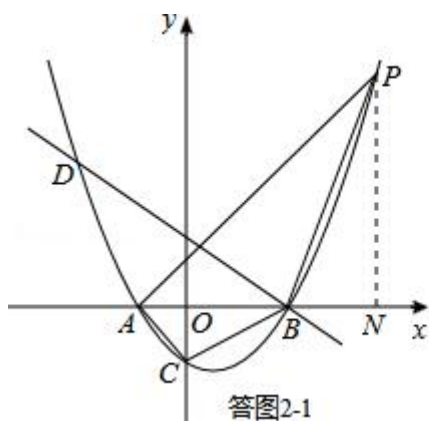
(2) 方法一:

由抛物线解析式, 令 $x=0$, 得 $y = -k$,

∴ C (0, -k), $OC=k$.

因为点 P 在第一象限内的抛物线上, 所以 $\angle ABP$ 为钝角.

因此若两个三角形相似, 只可能是 $\triangle ABC \sim \triangle APB$ 或 $\triangle ABC \sim \triangle PAB$.



①若 $\triangle ABC \sim \triangle APB$, 则有 $\angle BAC = \angle PAB$, 如答图 2 - 1 所示.

设 P (x, y), 过点 P 作 $PN \perp x$ 轴于点 N, 则 $ON=x$, $PN=y$.

$$\tan \angle BAC = \tan \angle PAB, \text{ 即: } \frac{k}{2} = \frac{y}{x+2},$$

$$\therefore y = \frac{k}{2}x + k.$$

$$\therefore P(x, \frac{k}{2}x + k), \text{ 代入抛物线解析式 } y = \frac{k}{8}(x+2)(x-4),$$

$$\text{得 } \frac{k}{8}(x+2)(x-4) = \frac{k}{2}x + k, \text{ 整理得: } x^2 - 6x - 16 = 0,$$

解得: $x=8$ 或 $x=-2$ (与点 A 重合, 舍去),

$$\therefore P(8, 5k).$$

$$\because \triangle ABC \sim \triangle APB,$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AP}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{k^2+4}}{6} = \frac{6}{\sqrt{25k^2+100}},$$

$$\text{解得: } k = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

②若 $\triangle ABC \sim \triangle PAB$, 则有 $\angle ABC = \angle PAB$, 如答图 2-2 所示.

与①同理, 可求得: $k = \sqrt{2}$.

综上所述, $k = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 或 $k = \sqrt{2}$.

方法二:

\because 点 P 在第一象限内的抛物线上, $\therefore \angle ABP$ 为钝角,

①若 $\triangle ABC \sim \triangle APB$, 则有 $\angle BAC = \angle PAB$,

$$\therefore K_{AP} + K_{AC} = 0,$$

$$\because C(0, -k), A(-2, 0),$$

$$\therefore K_{AC} = -\frac{k}{2},$$

$$\therefore K_{AP} = \frac{k}{2},$$

$$\because A(-2, 0), \therefore l_{AP}: y = \frac{k}{2}x + k,$$

$$\because \text{抛物线: } y = \frac{k}{8}(x+2)(x-4),$$

$$\therefore x^2 - 6x - 16 = 0, \text{ 解得: } x=8 \text{ 或 } x=2 \text{ (舍)}$$

$$\therefore P(8, 5k),$$

$$\because \triangle ABC \sim \triangle APB, \therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AP},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{k^2+4}}{6} = \frac{6}{\sqrt{25k^2+100}},$$

$$\therefore k = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

②若 $\triangle ABC \sim \triangle APB$, 则有 $\angle ABC = \angle PAB$, 同理可得: $k = \sqrt{2}$;

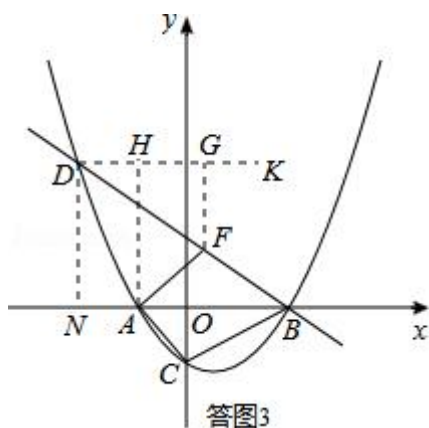
(3) 方法一:

如答图 3, 由 (1) 知: $D(-5, 3\sqrt{3})$,

如答图 2-2, 过点 D 作 $DN \perp x$ 轴于点 N, 则 $DN = 3\sqrt{3}$, $ON = 5$, $BN = 4 + 5 = 9$,

$$\therefore \tan \angle DBA = \frac{DN}{BN} = \frac{3\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle DBA = 30^\circ.$$



过点 D 作 $DK \parallel x$ 轴, 则 $\angle KDF = \angle DBA = 30^\circ$.

过点 F 作 $FG \perp DK$ 于点 G, 则 $FG = \frac{1}{2}DF$.

由题意, 动点 M 运动的路径为折线 $AF + DF$, 运动时间: $t = AF + \frac{1}{2}DF$,

$\therefore t = AF + FG$, 即运动的时间值等于折线 $AF + FG$ 的长度值.

由垂线段最短可知,折线 AF+FG 的长度的最小值为 DK 与 x 轴之间的垂线段.

过点 A 作 $AH \perp DK$ 于点 H, 则 $t_{\text{最小}} = AH$, AH 与直线 BD 的交点, 即为所求之 F 点.

\because A 点横坐标为 -2, 直线 BD 解析式为: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times (-2) + \frac{4\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore F(-2, 2\sqrt{3}).$$

综上所述, 当点 F 坐标为 $(-2, 2\sqrt{3})$ 时, 点 M 在整个运动过程中用时最少.

方法二:

作 $DK \parallel AB$, $AH \perp DK$, AH 交直线 BD 于点 F,

$$\because \angle DBA = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BDH = 30^\circ,$$

$$\therefore FH = DF \times \sin 30^\circ = \frac{FD}{2},$$

\therefore 当且仅当 $AH \perp DK$ 时, AF+FH 最小,

点 M 在整个运动中用时为: $t = \frac{AF}{1} + \frac{FD}{2} = AF + FH$,

$$\because l_{BD}: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

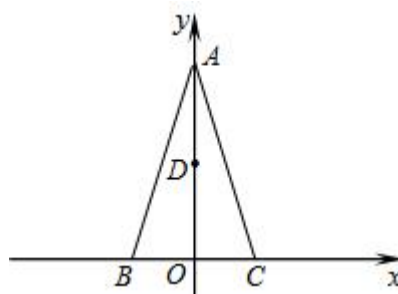
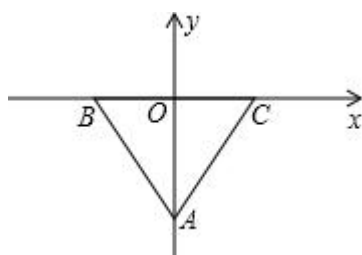
$$\therefore F_x = A_x = -2,$$

$$\therefore F(-2, 2\sqrt{3}).$$

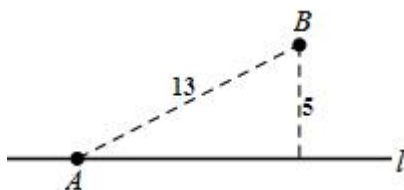
【套路练习】

1. 等边三角形 ABC 的边长为 6, 将其放置在如图所示的平面直角坐标系中, 其中 BC 边在 x 轴上, BC 边的高 OA 在 y 轴上. 一只电子虫从 A 出发, 先沿 y 轴到达 G 点, 再沿 GC 到达 C 点, 已知电子虫在 y 轴上运动的速度是在 GC 上运动速度的 2 倍, 若电子虫走完全程的时间最短, 则点 G 的坐标为_____.

【变式】如图, $\triangle ABC$ 在直角坐标系中, $AB=AC$, $A(0, 2\sqrt{2})$, $C(1, 0)$, D 为射线 AO 上一点, 一动点 P 从 A 出发, 运动路径为 $A \rightarrow D \rightarrow C$, 点 P 在 AD 上的运动速度是在 CD 上的 3 倍, 要使整个运动时间最少, 则点 D 的坐标应为_____.



2. 如图, 一条笔直的公路 l 穿过草原, 公路边有一消防站 A , 距离公路 5 千米的地方有一居民点 B , A 、 B 的直线距离是 13 千米. 一天, 居民点 B 着火, 消防员受命欲前往救火, 若消防车在公路上的最快速度是 80 千米/小时, 而在草地上的最快速度是 40 千米/小时, 则消防车在出发后最快经过_____小时可到达居民点 B . (友情提醒: 消防车可从公路的任意位置进入草地行驶.)

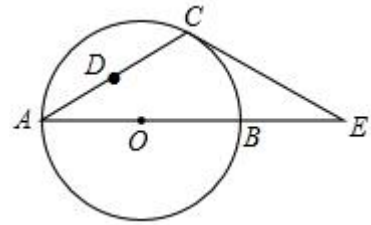


3. 如图，在 $\triangle ACE$ 中， $CA=CE$ ， $\angle CAE=30^\circ$ ， $\odot O$ 经过点 C ，且圆的直径 AB 在线段 AE 上.

(1) 试说明 CE 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $\triangle ACE$ 中 AE 边上的高为 h ，试用含 h 的代数式表示 $\odot O$ 的直径 AB ；

(3) 设点 D 是线段 AC 上任意一点（不含端点），连接 OD ，当 $\frac{1}{2}CD+OD$ 的最小值为 6 时，求 $\odot O$ 的直径 AB 的长.



4. 如图 1，在平面直角坐标系中，直线 l 与 x 轴、 y 轴分别交于点 $B(4, 0)$ 、 $C(0, 3)$ ，点 A 为 x 轴负半轴上一点， $AM \perp BC$ 于点 M 交 y 轴于点 N ，满足 $4CN = 5ON$ 。已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 A 、 B 、 C 。

(1) 求抛物线的函数关系式；

(2) 连接 AC ，点 D 在线段 BC 上方的抛物线上，连接 DC 、 DB ，若 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ABC$ 面积满足 $S_{\triangle BCD} = \frac{3}{5}S_{\triangle ABC}$ ，求点 D 的坐标；

(3) 如图 2， E 为 OB 中点，设 F 为线段 BC 上一点（不含端点），连接 EF 。一动点 P 从 E 出发，沿段 EF 以每秒 1 个单位的速度运动到 F ，再沿着线段 FC 以每秒 $\frac{5}{3}$ 个单位的速度运动到 C 后停止。若点 P 在整个运动过程中用时最少，请直接写出最少时间和此时点 F 的坐标。

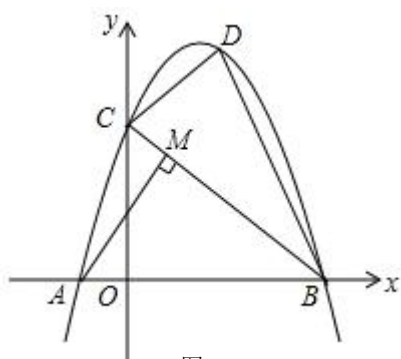


图 1

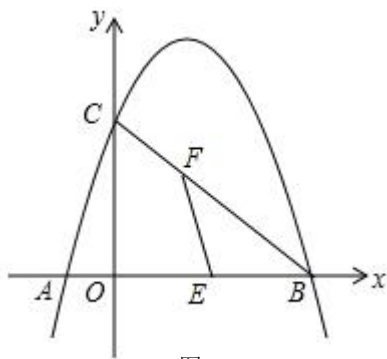


图 2

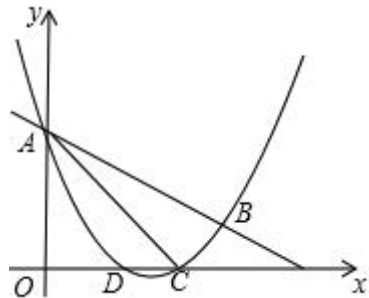
5. 如图，抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + mx + n$ 与直线 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 交于 A, B 两点，交 x

轴于 D, C 两点，连接 AC, BC

已知 $A(0, 3), C(3, 0)$.

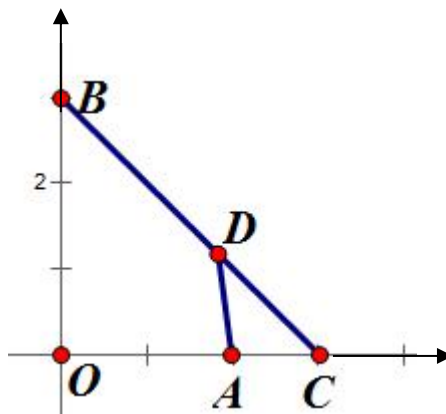
(1) 求抛物线的解析式和 $\tan \angle BAC$ 的值；

(2) 在 (1) 条件下，设 E 为线段 AC 上一点（不含端点），连接 DE ，一动点 M 从点 D 出发，沿线段 DE 以每秒一个单位速度运动到 E 点，再沿线段 EA 以每秒 $\sqrt{2}$ 个单位的速度运动到 A 后停止，当点 E 的坐标是多少时，点 M 在整个运动中用时最少？

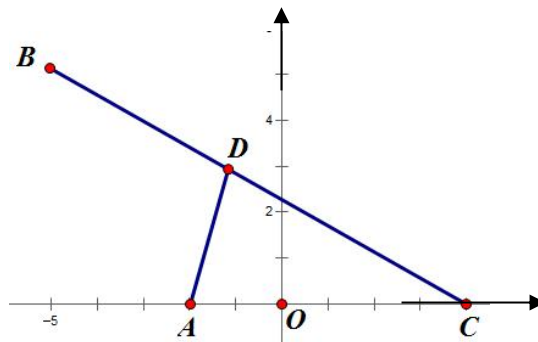


【强化训练】

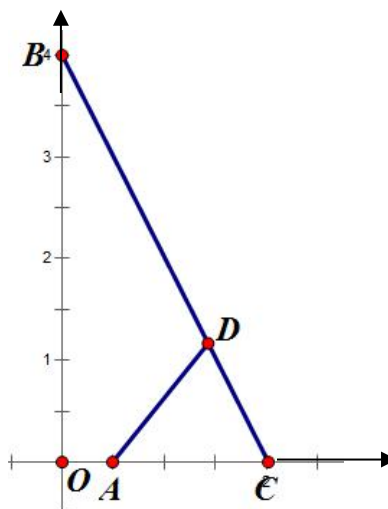
1、已知在平面直角坐标系中， $A(2,0)$ 、 $B(0,3)$ 、 $C(3,0)$ ，设 D 是线段 BC 上一点（不含端点），连接 AD ，一动点 M 从点 A 出发，沿线段 AD 以每秒一个单位速度运动到 D 点，再沿线段 DB 以每秒 $\sqrt{2}$ 个单位的速度运动到 B 后停止，当点 D 的坐标是多少时，当 M 在整个运动过程中用时最少？



2、已知在平面直角坐标系中， $A(-2,0)$ 、 $B(-5,3\sqrt{3})$ 、 $C(4,0)$ ，设 D 为线段 BC 上一点（不含端点），连接 AD ，一动点 M 从点 A 出发，沿线段 AD 以每秒一个单位长度运动到 D 点，再沿线段 DB 以每秒 2 个单位的速度运动到 B 后停止，当点 D 的坐标是多少时，点 M 在整个运动中用时最少？



3、在平面直角坐标系中，已知 $A(\frac{1}{2}, 0)$ 、 $B(0, 4)$ 、 $C(2, 0)$ ，设 D 为线段 BC 上一点（不含端点），连接 AD ，一动点 M 从点 A 出发，沿线段 AD 以每秒一个单位速度运动到 D 点，再沿线段 DB 以每秒 $\sqrt{5}$ 个单位的速度运动到 B 后停止，当点 D 的坐标是多少时，点 M 在整个运动过程中用时最少？

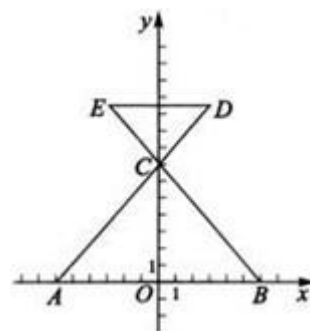


4、（2009 北京）如图，在平面直角坐标系 xOy 中， $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(-6, 0)$ ， $B(6, 0)$ ， $C(0, 4\sqrt{3})$ ，延长 AC 到点 D ，使 $CD = \frac{1}{2}AC$ ，过点 D 作 $DE \parallel AB$ 交 BC 的延长线于点 E 。

（1）求 D 点的坐标；

（2）作 C 点关于直线 DE 的对称点 F ，分别连结 DF 、 EF ，若过 B 点的直线 $y = kx + b$ 将四边形 $CDFE$ 分成周长相等的两个四边形，确定此直线的解析式；

（3）设 G 为 y 轴上一点，点 P 从直线 $y = kx + b$ 与 y



轴的交点出发，先沿 y 轴到达 G 点，再沿 GA 到达 A 点，若 P 点在 y 轴上运动的速度是它在直线 GA 上运动速度的 2 倍，试确定 G 点的位置，使 P 点按照上述要求到达 A 点所用的时间最短.（要求：简述确定 G 点位置的方法，但不要求证明）

5、(2016 江苏徐州) 如图，在平面直角坐标系中，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过点 $A(-1, 0)$ 、 $B(0, -\sqrt{3})$ 、 $C(2, 0)$ ，其中对称轴与 x 轴交于点 D 。

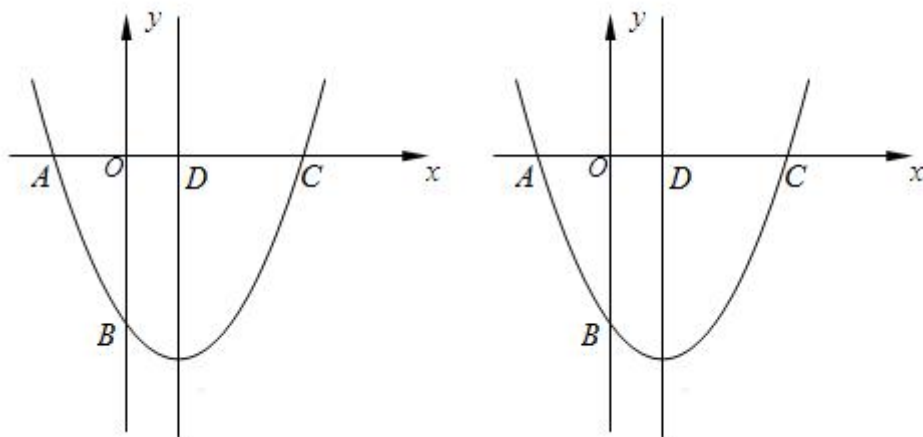
(1) 求二次函数的表达式及其顶点坐标；

(2) 若 P 为 y 轴上的一个动点，连接 PD ，则 $\frac{1}{2}PB+PD$ 的最小值为。

(3) $M(s, t)$ 为抛物线对称轴上的一个动点。

① 若平面内存在点 N ，使得 A 、 B 、 M 、 N 为顶点的四边形为菱形，则这样的点 N 共有_____个；

② 连接 MA 、 MB ，若 $\angle AMB$ 不小于 60° ，求 t 的取值范围。



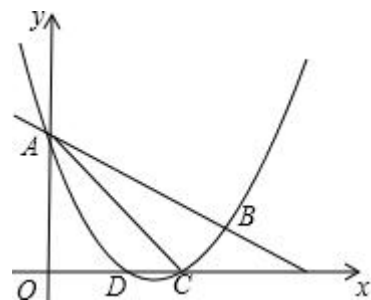
6、(2015 日照) 如图, 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + mx + n$ 与直线 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 交于 A, B 两点, 交 x 轴与 D, C 两点, 连接 AC, BC , 已知 $A(0, 3), C(3, 0)$.

(I) 求抛物线的解析式和 $\tan \angle BAC$ 的值;

(II) 在 (I) 条件下:

(1) P 为 y 轴右侧抛物线上一动点, 连接 PA , 过点 P 作 $PQ \perp PA$ 交 y 轴于点 Q , 问: 是否存在点 P 使得以 A, P, Q 为顶点的三角形与 $\triangle ACB$ 相似? 若存在, 请求出所有符合条件的点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

(2) 设 E 为线段 AC 上一点 (不含端点), 连接 DE , 一动点 M 从点 D 出发, 沿线段 DE 以每秒一个单位速度运动到 E 点, 再沿线段 EA 以每秒 $\sqrt{2}$ 个单位的速度运动到 A 后停止, 当点 E 的坐标是多少时, 点 M 在整个运动中用时最少?



2.2 阿氏圆

【题目类型】

求圆上一动点到两定点的距离最小值（系数不为 1 的两线段和最值问题）。

例如，点 P 为圆 O 动点，C、D 为两定点，求 $PC+k\cdot PD$ 最小值。

【解题原理】

两线段和最值问题一般需要转化为两点之间线段最短。

求线段和的最值问题，一般依据两点之间线段最短，三角形的两边之和大于第三边，垂线段最短，同圆或等圆中直径是最长的弦等四条公理定理。

此题中的“ $PC+k\cdot PD$ ”是两条线段的线性组合，那么最迫切需要解决的问题是系数 k 的处理，也就是说能否将 $k\cdot PD$ 转化为一条以 P 为一个端点的线段，如果能，则可将问题“ $PC+k\cdot PD$ ”转化为两条共顶点的线段和求最值问题，即可利用最值四定理解决。

【一般解题步骤】

1. 连接动点至圆心 O（将系数不为 1 的线段的两个端点分别与圆心相连接），则连接 OP、OD；
2. 计算出所连接的这两条线段 OP、OD 长度；
3. 计算这两条线段长度的比 $OP/OD=m$ ；
4. 观察 m 值是否为等于所求线段和中的系数 k；

①如果 $m=k$

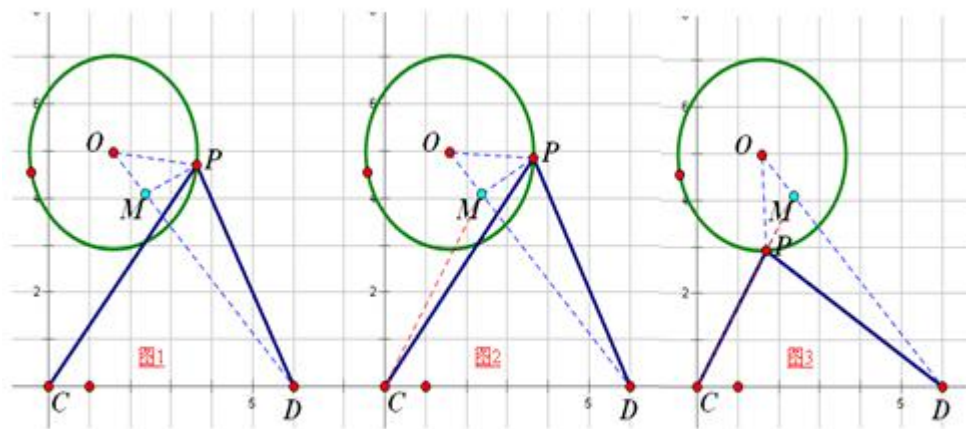
- 在这个三角形（ $\triangle POD$ ）中构造母子三角形相似；
- OP、OD 长度已知且 OP 与 OD 夹角已知，利用 SAS 构造相似（ $\triangle MOP \sim \triangle POD$ ）；
- 构造做法是过动点 P 在另一条固定长度的线段 OD 上找一点 M，这时候使得点 M、圆心 O、动点 P 构成的三角形 $\triangle MOP$ 与三角形 $\triangle POD$ 相似（ $\triangle MOP \sim \triangle POD$ ）；如果系数 k 小于 1，在 OD 上找点 M；如果系数 k 大于 1，点 M 在 OD 的延长线上。
- 根据相似求出点 M 坐标；

②如果 $m \neq k$

- 如果 $m \neq k$ ，一般需要对所求式子 $PC+k\cdot PD$ 进行转化；
- 例如 $PC+2PD$ 或 $PC+1/2PD$
- 将 $2PC+PD=2(PC+1/2PD)$ 或 $PC+1/2PD=1/2(2PC+PD)$

- 转化后利用步骤①如果 $m=k$ 的方法求解 M 点。

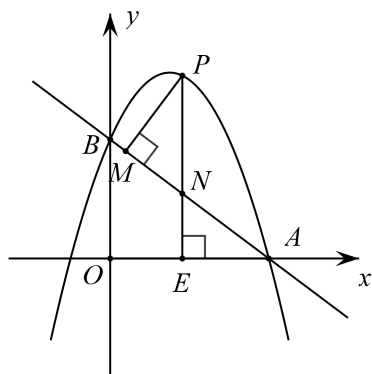
5. 在利用两点之间线段最短求最小值。



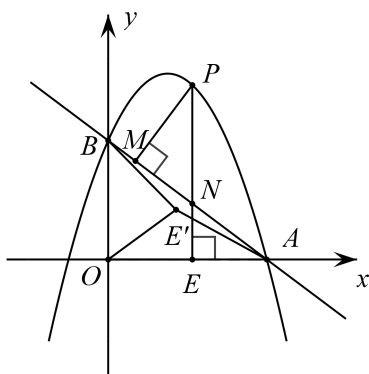
例题讲解：

例 1、如图 1，抛物线 $y=ax^2+(a+3)x+3$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(4, 0)$ ，与 y 轴交于点 B ，在 x 轴上有一动点 $E(m, 0)$ ($0 < m < 4$)，过点 E 作 x 轴的垂线交直线 AB 于点 N ，交抛物线于点 P ，过点 P 作 $PM \perp AB$ 于点 M 。

- (1) 求 a 的值和直线 AB 的函数表达式；
- (2) 设 $\triangle PMN$ 的周长为 C_1 ， $\triangle AEN$ 的周长为 C_2 ，若 $\frac{C_1}{C_2} = \frac{6}{5}$ ，求 m 的值；
- (3) 如图 2，在 (2) 的条件下，将线段 OE 绕点 O 逆时针旋转得到 OE' ，旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)，连接 $E'A$ 、 $E'B$ ，求 $E'A + \frac{2}{3}E'B$ 的最小值。



第 28 题图 1



第 28 题图 2

解：（1）把点 $A(4, 0)$ 代入 $y = ax^2 + (a+3)x + 3$ ，得

$$16a + 4(a+3) + 3 = 0.$$

$$\text{解得 } a = -\frac{3}{4}.$$

$$\therefore \text{抛物线的函数表达式为：} y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3.$$

把 $x=0$ 代入上式，得 $y=3$.

\therefore 点 B 的坐标为 $(0, 3)$.

由 $A(4, 0)$ ， $B(0, 3)$ 可得直线 AB 的函数表达式为：

$$y = -\frac{3}{4}x + 3.$$

（2）根据题意，得

$$OE = m, \quad AE = 4 - m, \quad AB = 5,$$

$$\text{点 } P \text{ 的坐标可表示为 } (m, -\frac{3}{4}m^2 + \frac{9}{4}m + 3).$$

$$\therefore PE = -\frac{3}{4}m^2 + \frac{9}{4}m + 3 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\because \triangle AEN \sim \triangle AOB, \therefore \frac{AN}{AB} = \frac{NE}{BO} = \frac{AE}{4}. \therefore \frac{AN}{5} = \frac{NE}{3} = \frac{4-m}{4}.$$

$$\therefore AN = \frac{5}{4}(4-m), \quad NE = \frac{3}{4}(4-m).$$

$$\because \triangle PMN \sim \triangle AEN, \quad \text{且} \frac{C_1}{C_2} = \frac{6}{5},$$

$$\therefore \frac{PN}{AN} = \frac{6}{5}. \quad \therefore PN = \frac{6}{5}AN = \frac{6}{5} \times \frac{5}{4}(4-m) = \frac{3}{2}(4-m).$$

$$\therefore PE = NE + PN = \frac{3}{4}(4-m) + \frac{3}{2}(4-m) = \frac{9}{4}(4-m) \dots\dots\dots ②$$

由①、②，得

$$-\frac{3}{4}m^2 + \frac{9}{4}m + 3 = \frac{9}{4}(4-m).$$

解得 $m_1 = 2$, $m_2 = 4$ (不合题意, 舍去).

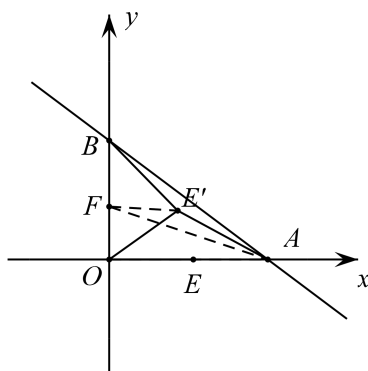
$\therefore m$ 的值为 2.

(3) 在 (2) 的条件下, m 的值为 2, 点 $E(2, 0)$, $OE = 2$.

$$\therefore OE' = OE = 2.$$

如图, 取点 $F(0, \frac{4}{3})$, 连接 FE' 、 AF .

$$\text{则 } OF = \frac{4}{3}, \quad AF = \sqrt{4^2 + (\frac{4}{3})^2} = \frac{4}{3}\sqrt{10}.$$



第 28 题答案图

$$\because \frac{OF}{OE'} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}, \quad \frac{OE'}{OB} = \frac{2}{3}, \quad \text{且} \quad \angle FOE' = \angle E'OB,$$

$$\therefore \triangle FOE' \sim \triangle E'OB. \therefore \frac{FE'}{E'B} = \frac{2}{3}. \therefore FE' = \frac{2}{3}E'B.$$

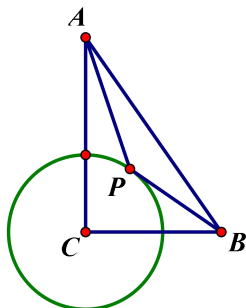
$$\therefore E'A + \frac{2}{3}E'B = E'A + FE' \geq AF = \frac{4}{3}\sqrt{10}.$$

$$\therefore E'A + \frac{2}{3}E'B \text{ 的最小值为 } \frac{4}{3}\sqrt{10}.$$

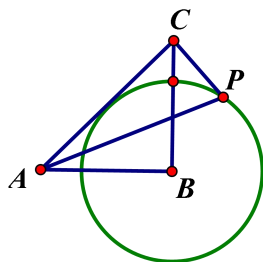
巩固练习：

1、如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CB = 4$ ， $CA = 6$ ，圆 C 半径为 2， P 为圆上一动点，连接 AP ， BP ， $AP + \frac{1}{2}BP$ 最小值为（ ）

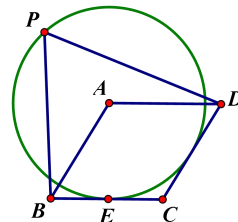
A、 $\sqrt{37}$ B、6 C、 $2\sqrt{17}$ D、4



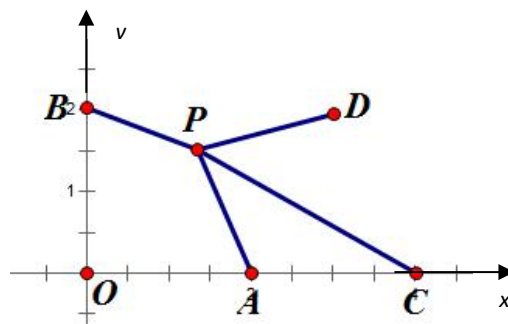
2、如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = CB = 2$ ，以点 B 为圆心作圆 B 与 AC 相切，点 P 为圆 B 上任一动点，则 $PA + \frac{\sqrt{2}}{2}PC$ 的最小值是_____.



3、如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 2，锐角大小为 60° ， $\odot A$ 与 BC 相切于点 E ，在 $\odot A$ 上任取一点 P ，则 $PB + \frac{\sqrt{3}}{2}PD$ 的最小值为_____.



4、在平面直角坐标系中， $A(2, 0)$ ， $B(0, 2)$ ， $C(4, 0)$ ， $D(3, 2)$ ， P 是 $\triangle AOB$ 外部的第一象限内一动点，且 $\angle BPA = 135^\circ$ ，则 $2PD + PC$ 的最小值是_____.



5、(1) 如图 1，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4，圆 B 的半径为 2，点 P 是圆 B 上的一个动点，求 $PD + \frac{1}{2}PC$ 的最小值和 $PD - \frac{1}{2}PC$ 的最大值.

(2) 如图 2，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 9，圆 B 的半径为 6，点 P 是圆 B 上的一个动点，求 $PD + \frac{2}{3}PC$ 的最小值和 $PD - \frac{2}{3}PC$ 的最大值.

(3) 如图 3，已知菱形 $ABCD$ 的边长为 4， $\angle B = 90^\circ$ ，圆 B 的半径为 2，

点 P 是圆 B 上的一个动点，求 $PD + \frac{1}{2}PC$ 的最小值和 $PD - \frac{1}{2}PC$ 的最大值.

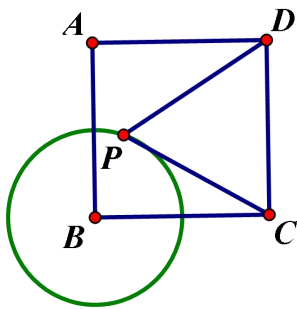


图 1

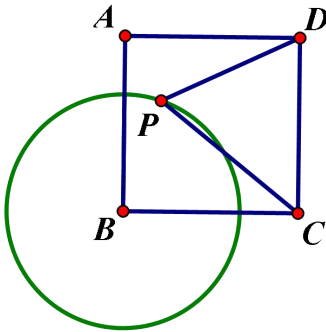


图 2

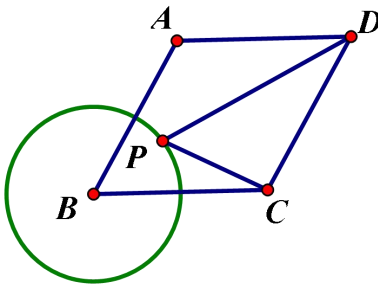


图 3

三、“费马点”模型

通过“旋转 60° ”挪成“折线”，再利用“两点之间线段最短”模型——“费马点”模型

旋转变换是把一个图形绕某个点旋转一个角度，其作用是不改变原有图形的性质，但改变其位置，使之组合成新的有利论证的图形．有些最值问题必须通过旋转变换才能转化成基本问题，旋转变换是解决最值难题的必不可少的手段之一．

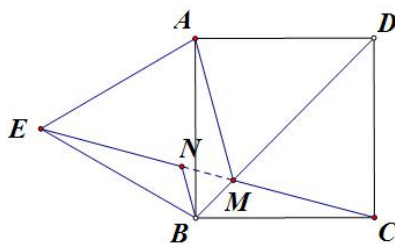
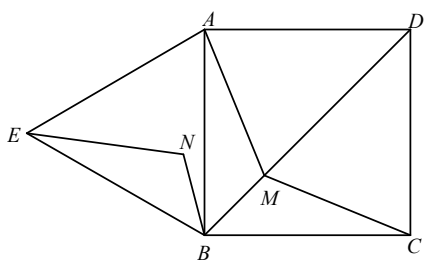
【引例】如图，四边形 $ABCD$ 是正方形， $\triangle ABE$ 是等边三角形， M 为对角线 BD （不含 B 点）上任意一点，将 BM 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 BN ，连接 EN 、 AM 、 CM ．

(1) 求证： $\triangle AMB \cong \triangle ENB$ ；

(2) ①当 M 点在何处时， $AM+CM$ 的值最小；

②当 M 点在何处时， $AM+BM+CM$ 的值最小，并说明理由；

(3) 当 $AM+BM+CM$ 的最小值为 $\sqrt{3}+1$ 时，求正方形的边长．



例 1 如图 1 (1)，已知正方形 $ABCD$ 内一动点 E 到 A 、 B 、 C 三点的距离之和的最小值为 $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ ，求此正方形的边长.

分析： 本题已知三条线段的和最小，这三条线段又“碰”在一起，怎么利用这个条件成了本题的难点. 注意到题中有正方形边长相等这样的有利条件，考虑通过旋转变换把三条线段“展开来”，然后再“接起来”成“三折线”，让折线的两端放在两个定点，这实际是费尔马问题的变形，只是背景不同.

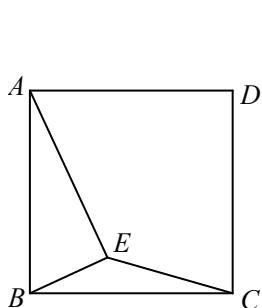


图 1 (1)

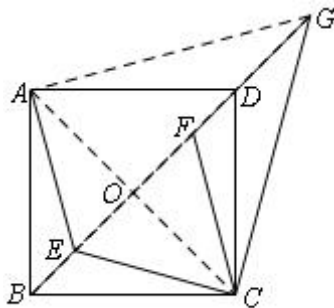


图 1 (2)

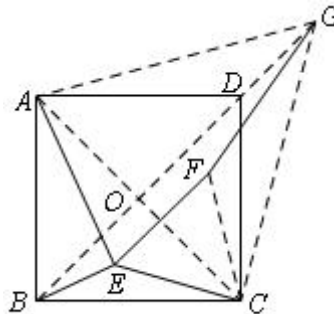


图 1 (3)

解： 如图 1 (2)，连接 AC ，把 $\triangle AEC$ 绕点 C 顺时针旋转 60° ，得到 $\triangle GFC$ ，连接 EF 、 BG 、 AG ，可知 $\triangle EFC$ 、 $\triangle AGC$ 都是等边三角形，则 $EF=CE$ ，又 $FG=AE$ ，所以 $AE+BE+CE = BE+EF+FG$.

\because 点 B 、点 G 为定点 (G 为定点 A 绕定点 C 顺时针旋转 60° 所得)，

\therefore 线段 BG 即为点 E 到 A 、 B 、 C 三点的距离之和的最小值，此时 E 、 F 两点都在 BG 上 (如图 1 (3)).

设正方形的边长为 a ，那么 $BO=CO=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ， $GC=\sqrt{2}a$ ， $GO=\frac{\sqrt{6}}{2}a$

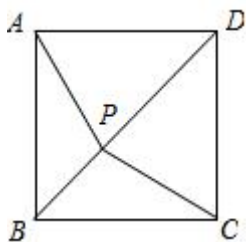
$$\therefore BG=BO+GO = \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

\because 点 E 到 A 、 B 、 C 三点的距离之和的最小值为 $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ ，

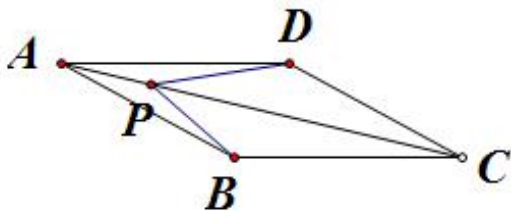
$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{6}}{2}a = \sqrt{2} + \sqrt{6}, \therefore a = 2.$$

解题策略：通过旋转变换，改变线段的位置，优化图形的结构，把高难度的最值问题转化为“两点之间线段最短”的基本问题．使用这一方法解题时需注意图形旋转变换的基础，即存在相等的线段，一般地，当题目出现等腰三角形（等边三角形）、正方形条件时，可将图形作旋转 60° 或 90° 的几何变换，将不规则图形变为规则图形，或将分散的条件集中在一起，以便挖掘隐含条件，使问题得以解决。

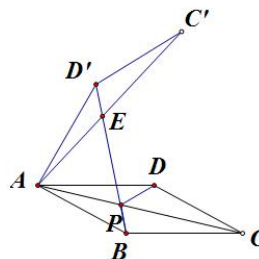
【变式 1】如图， P 为正方形 $ABCD$ 对角线 BD 上一动点，若 $AB=2$ ，则 $AP + BP + CP$ 的最小值为_____.



【变式 2】如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 上有一动点 P ， $BC=6$ ， $\angle ABC=150^\circ$ ，则线段 $AP+BP+PD$ 的最小值为_____.



(变式 2)



(解答)

【变式 3】如图四边形 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle ABC=60^\circ$ ， $\triangle ABE$ 是等边三角形， M 为对角线 BD （不含 B 点）上任意一点，将 BM 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 BN ，连接 EN 、 AM 、 CM ，则下列五个结论中正确的是（ ）

①若菱形 $ABCD$ 的边长为 1，则 $AM+CM$ 的最小值 1；

② $\triangle AMB \cong \triangle ENB$ ；

③ $S_{\text{四边形 } AMBE} = S_{\text{四边形 } ADCM}$ ； ④连接 AN ，则 $AN \perp BE$ ；

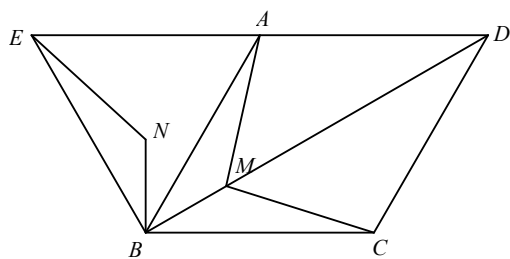
⑤当 $AM+BM+CM$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$ 时，菱形 $ABCD$ 的边长为 2.

A. ①②③

B. ②④⑤

C. ①②⑤

D. ②③⑤



线段极值解题方略

线段极值有规律
折直斜垂是根据

一条线段易解决
动点轨迹是秘诀
动点定点两边连
定角出来轨迹现
定角定线面对面
动点轨迹必是圆
动点圆心连一连
最大最小在两边

定角若在定线边
动点轨迹是直线
斜大于垂记心间
最小极值就出现

线段之和求极值
折大于直是关键
翻折平移和旋转
还是不行整搬迁
所有和值成一线
求出该长结论现

遇到系数不要怕
相似找线代替它
放大难了缩小易
切记系数应唯一
两个都有提一提
已知线段比一比
系数比值如统一
相似作图很容易
系数比值难统一
这样题目莫动笔
遇到疑难你莫急
解题方略来帮你

(本口诀来自网络)