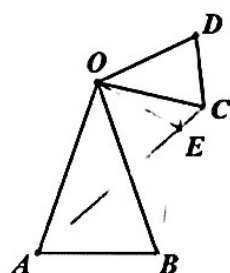


2022 中考专题 1——几何模型之双子型（手拉手模型）

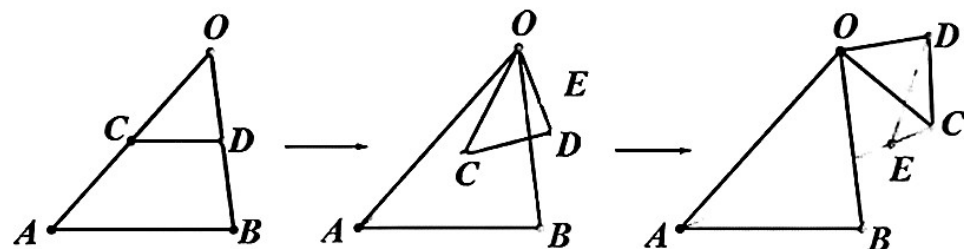
【模型解析】



双子型之全等

◆条件：△OAB, △OCD 均为等腰三角形， $OA=OB$, $OC=OD$, $\angle AOB=\angle COD$

◆结论：①△OAC≌△OBD；②AC=BD；③∠AEB=∠AOB；④OE 平分∠AED（或∠AED 的外角）；⑤点 E 在△OAB 的外接圆上。



双子型之相似

◆条件：CD//AB (△OCD∽△OAB)，将△OCD 旋转至右图位置

◆结论：右图中①△OCD∽△OAB ⇔ △OAC∽△OBD；②延长 AC 交 BD 于点 E，必有∠AEB=∠AOB；③点 E 在△OAB 的外接圆上。

【例题分析】

例 1. 如图 1，直角坐标系中，点 A 的坐标为(1,0)，以线段 OA 为边在第四象限内作等边△AOB，点 C 为 x 正半轴上一动点(OC>1)，连接 BC，以线段 BC 为边在第四象限内作等边△CBD，直线 DA 交 y 轴于点 E。

(1) △OBC 与 △ABD 全等吗？判断并证明你的结论；

(2) 随着点 C 位置的变化，点 E 的位置是否会发生变化？若没有变化，求出点 E 的坐标；若有变化，请说明理由。

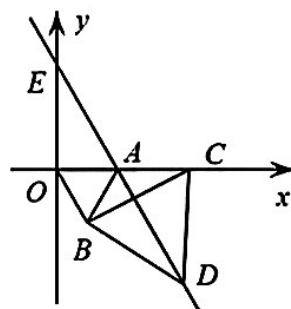


图 1

例 2. (2021 宿迁中考) 已知正方形 ABCD 与正方形 AEGF, 正方形 AEGF 绕点 A 旋转一周.

(1) 如图 2-①, 连接 BG、CF, 求 $\frac{CF}{BG}$ 的值;

(2) 当正方形 AEGF 旋转至图 2-②位置时, 连接 CF、BE, 分别取 CF、BE 的中点 M、N, 连接 MN, 试探究: MN 与 BE 的关系, 并说明理由;

(3) 连接 BE、BF, 分别取 BE、BF 的中点 N、Q, 连接 QN, AE=6, 请直接写出线段 QN 扫过的面积.

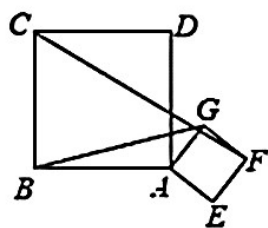


图 2-①

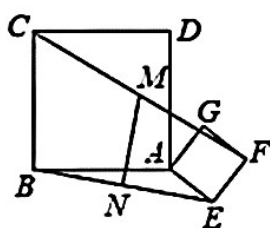
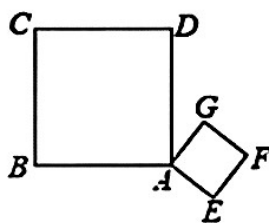


图 2-②



备用图

例 3. 如图 3 所示, 在四边形 ABCD 中, $AD=3, CD=2, \angle ABC = \angle ACB = \angle ADC = 45^\circ$, 则 BD 的长为_____.

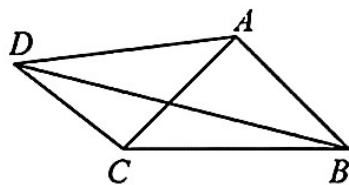


图 3

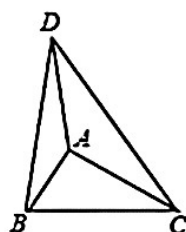


图 4

例 4. 如图 4, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 60^\circ, AB = 2\sqrt{3}, BC = 8$, 以 AC 为腰, 点 A 为顶点作等腰 $\triangle ACD$, 且 $\angle DAC = 120^\circ$, 则 BD 的长为_____.

【巩固练习】

1. 如图 1, $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形, $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ, AB = AC = 2$, O 为 AC 中点, 若点 D 在直线 BC 上运动, 连接 OE, 则在点 D 运动过程中, 线段 OE 的最小值是为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$

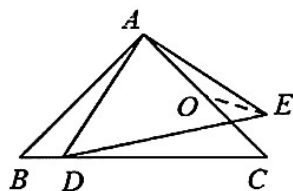


图 1

2. 如图 2, $\triangle ABC$ 为等边三角形, $AB=2$, 点 D 为 BC 边上的动点, 连接 AD , 以 AD 为一边向右作等边 $\triangle ADE$, 连接 CE . (1) 在点 D 从点 B 运动到点 C 的过程中, 点 E 运动的路径长为_____;
- (2) 在点 D 的运动过程中, 是否存在 $\angle DEC=60^\circ$, 若存在, 求出 BD 的长, 若不存在, 请说明理由.
- (3) 取 AC 中点 P , 连接 PE , 在点 D 的运动过程中, 求 PE 的最小值.

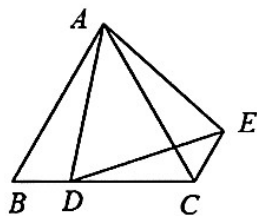


图 2

3. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB=4, BC=5, \angle ACB=45^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 按逆时针方向旋转, 得到 $\triangle A_1BC_1$.
- (1) 如图 3-1, 当点 C_1 在线段 CA 的延长线上时, 求 $\angle CC_1A_1$ 的度数;
- (2) 如图 3-2, 连接 AA_1, CC_1 . 若 $\triangle A_1BA_1$ 的面积为 4, 求 $\triangle CBC_1$ 的面积;

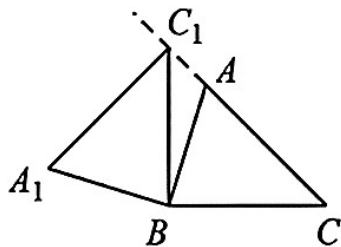


图 3-1

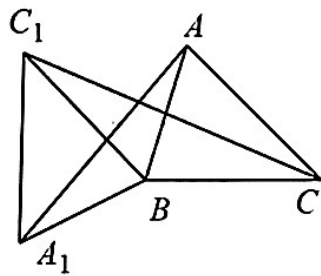


图 3-2

4.【提出问题】

(1) 如图 4-1, 在等边 $\triangle ABC$ 中, 点 M 是 BC 上的任意一点(不含端点 B 、 C), 连结 AM , 以 AM 为边作等边 $\triangle AMN$, 连结 CN . 求证: $BM=CN$.

【类比探究】

(2) 如图 4-2, 在等边 $\triangle ABC$ 中, 点 M 是 BC 延长线上的任意一点(不含端点 C), 其它条件不变, (1)中结论 $BM=CN$ 还成立吗? 请说明理由.

【拓展延伸】

(3) 如图 4-3, 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $BA=BC$, $AB=6$, $AC=4$, 点 M 是 BC 上的任意一点(不含端点 B 、 C), 连结 AM , 以 AM 为边作等腰 $\triangle AMN$, 使顶角 $\angle AMN = \angle ABC$. 连结 CN . 试探究 BM 与 CN 的数量关系, 并说明理由.

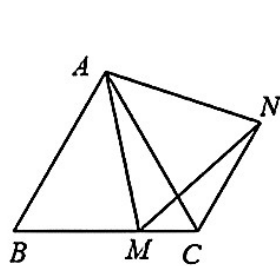


图 4-1

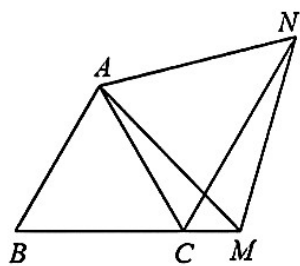


图 4-2

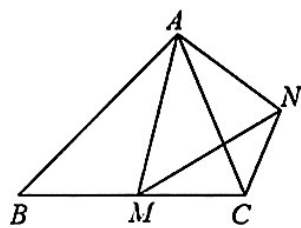


图 4-3

5. (2021•通辽) 已知 $\triangle AOB$ 和 $\triangle MON$ 都是等腰直角三角形 ($\frac{\sqrt{2}}{2}OA < OM < OA$),

$$\angle AOB = \angle MON = 90^\circ.$$

(1) 如图 1, 连接 AM , BN , 求证: $AM = BN$;

(2) 将 $\triangle MON$ 绕点 O 顺时针旋转.

①如图 2, 当点 M 恰好在 AB 边上时, 求证: $AM^2 + BM^2 = 2OM^2$;

②当点 A , M , N 在同一条直线上时, 若 $OA = 4$, $OM = 3$, 请直接写出线段 AM 的长.

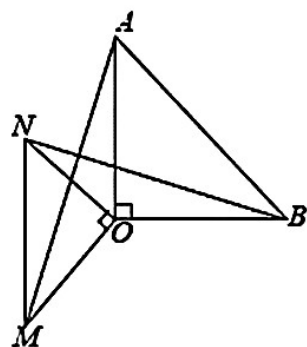


图1

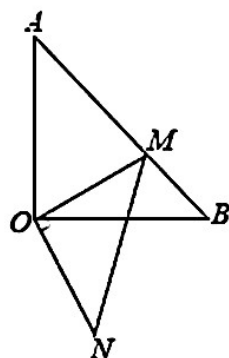


图2

6. 如图 6-1, 已知点 $A(0, -3)$ 和 x 轴上的动点 $C(m, 0)$, $\triangle AOB$ 和 $\triangle BCD$ 都是等边三角形.

(1) 在 C 点运动的过程中, 始终有两点的距离等于 OC 的长度, 请将它找出来, 并说明理由.

(2) 如图 6-2, 将 $\triangle BCD$ 沿 CD 翻折得 $\triangle ECD$, 当点 C 在 x 轴上运动时, 设点 $E(x, y)$, 请你用 m 来表示点 E 的坐标并求出点 E 运动时所在图象的解析式.

(3) 在 C 点运动的过程中, 当 $m > \sqrt{3}$ 时, 直接写出 $\triangle ABD$ 是等腰三角形时 E 点的坐标.

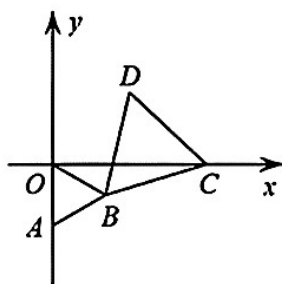


图 1

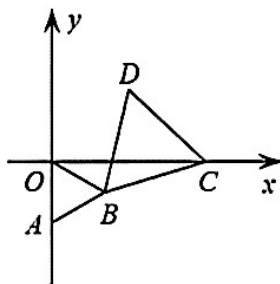


图 2

7. 【问题探究】(1) 如图 7-1, 锐角 $\triangle ABC$ 中分别以 AB 、 AC 为边向外作等腰 $\triangle ABE$ 和等腰 $\triangle ACD$, 使 $AE=AB$, $AD=AC$, $\angle BAE=\angle CAD$, 连接 BD , CE , 试猜想 BD 与 CE 的大小关系, 并说明理由.

【深入探究】

(2) 如图 7-2, 四边形 $ABCD$ 中, $AB=7\text{cm}$, $BC=3\text{cm}$, $\angle ABC=\angle ACD=\angle ADC=45^\circ$, 求 BD 的长.

(3) 如图 7-3, 在 (2) 的条件下, 当 $\triangle ACD$ 在线段 AC 的左侧时, 求 BD 的长.

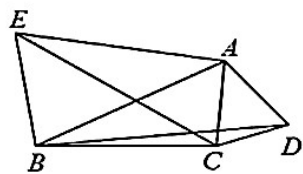


图 7-1

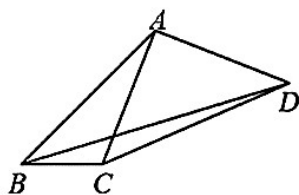


图 7-2

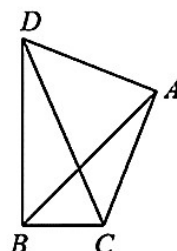


图 7-3

8. (2021•眉山) 如图, 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC=2\sqrt{5}$, 边长为 2 的正方形 $DEFG$ 的对角线交点与点 C 重合, 连接 AD , BE .

(1) 求证: $\triangle ACD \cong \triangle BCE$;

(2) 当点 D 在 $\triangle ABC$ 内部, 且 $\angle ADC=90^\circ$ 时, 设 AC 与 DG 相交于点 M , 求 AM 的长;

(3) 将正方形 $DEFG$ 绕点 C 旋转一周, 当点 A 、 D 、 E 三点在同一直线上时, 请直接写出 AD 的长.

