数 学 试 题

一、选择题(本大题共有 8 小题,每小题 3 分,共 24 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,请将正确选项前的字母代号填涂在答题卡相应位置上)

1. −6 的相反数是

A. $-\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. −6　　D. 6

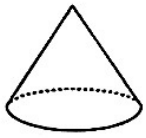
2. 在美术字中,有些汉字可以看成是轴对称图形.下列汉字中,是轴对称图形的是

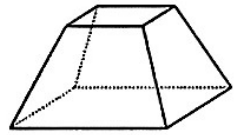
A. 我　　B. 爱　　C. 中　　D. 国

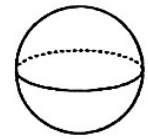
3. 2023 年 4 月 26 日,第十二届江苏园艺博览会在我市隆重开幕.会场所在地园博园分为“山海韵”“丝路情”“田园画”三大片区,共占地约 2 370 000 平方米.其中数据“2 370 000”用科学记数法可表示为

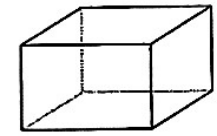
A. 2.37×10^6　　B. 2.37×10^5　　C. 0.237×10^7　　D. 237×10^4

4. 下列水平放置的几何体中,主视图是圆形的是


A

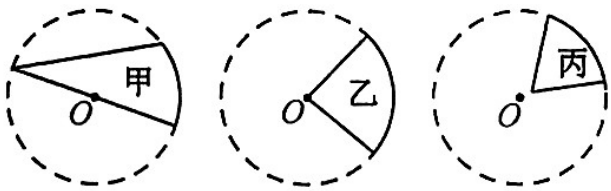

B


C

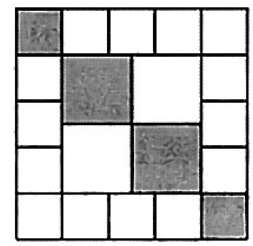

D

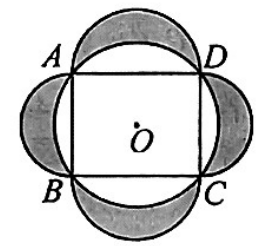
5. 如图,甲是由一条直径、一条弦及一段圆弧所围成的图形;乙是由两条半径与一段圆弧所围成的图形;丙是由不过圆心 O 的两条线段与一段圆弧所围成的图形.下列叙述正确的是

A. 只有甲是扇形　　B. 只有乙是扇形　　C. 只有丙是扇形　　D. 只有乙、丙是扇形



(第 5 题图)


(第 6 题图)



(第 8 题图)

6. 如图是由 16 个相同的小正方形和 4 个相同的大正方形组成的图形,在这个图形内任取一点 P,则点 P 落在阴影部分的概率为

A. $\frac{5}{8}$　　B. $\frac{13}{50}$　　C. $\frac{13}{32}$　　D. $\frac{5}{16}$

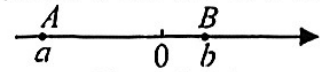
7. 元朝朱世杰所著的《算学启蒙》中,记载了这样一道题:良马日行二百四十里,驽马日行一百五十里,驽马先行一十二日,问良马几何日追及之?其大意是:快马每天行 240 里,慢马每天行 150 里,慢马先行 12 天,快马几天可追上慢马?若设快马 x 天可追上慢马,由题意得

A. $\frac{x}{240}=\frac{x+12}{150}$　　B. $\frac{x}{240}=\frac{x}{150}-12$　　C. $240(x-12)=150x$　　D. $240x=150(x+12)$

8. 如图,矩形 $ABCD$ 内接于⊙O,分别以 AB、BC、CD、AD 为直径向外作半圆.若 $AB=4$,$BC=5$,则阴影部分的面积是

A. $\frac{41}{4}\pi-20$　　B. $\frac{41}{2}\pi-20$　　C. 20π　　D. 20

二、填空题(本大题共 8 小题,每小题 3 分,共 24 分.不需要写出解答过程,请把答案直接填写在答题卡相应位置上)



(第 10 题图)

9. 计算:$(\sqrt{5})^2=$ ▲ .

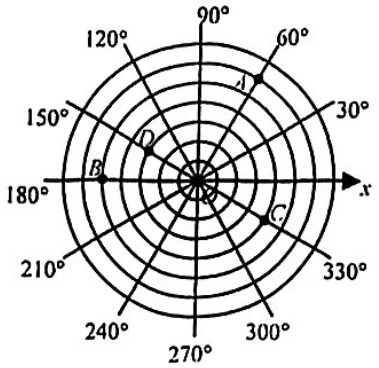
10. 如图,数轴上的点 A、B 分别对应实数 a、b,则 $a+b$ ▲ 0.(用“>”“<”或“=”填空)

11. 一个三角形的两边长分别是 3 和 5,则第三边长可以是 ▲ .(只填一个即可)

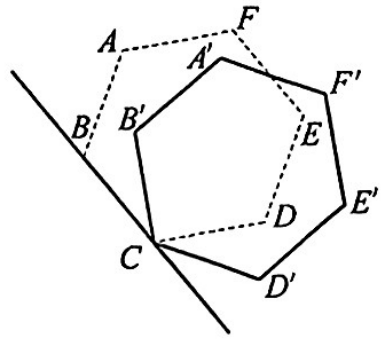
12. 关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+a=0$ 有两个不相等的实数根,则 a 的取值范围是 ▲ .

13. 画一条水平数轴,以原点 O 为圆心,过数轴上的每一刻度点画同心圆,过原点 O 按逆时针方向依次画出与正半轴的角度分别为 30°、60°、90°、120°、…、330° 的射线,这样就建立了“圆”坐标系.如图,在建立的“圆”坐标系内,我们可以将点 A、B、C 的坐标分别表示为 $A(6,60°)$、$B(5,180°)$、$C(4,330°)$,则点 D 的坐标可以表示为 ▲ .

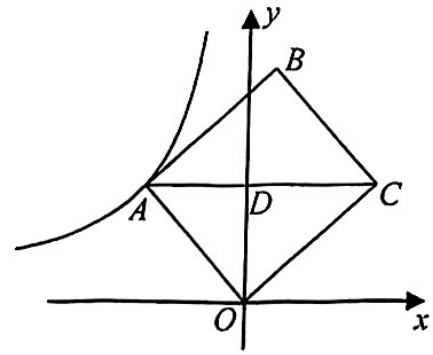
14. 以正六边形 $ABCDEF$ 的顶点 C 为旋转中心,按顺时针方向旋转,使得新正六边形 $A'B'CD'E'F'$ 的顶点 D' 落在直线 BC 上,则正六边形 $ABCDEF$ 至少旋转 ▲ °.



(第 13 题图)



(第 14 题图)



(第 15 题图)

15. 如图,矩形 $OABC$ 的顶点 A 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x<0)$ 的图像上,顶点 B、C 在第一象限,对角线 $AC\parallel x$ 轴,交 y 轴于点 D.若矩形 $OABC$ 的面积是 6,$\cos\angle OAC=\frac{2}{3}$,则 $k=$ ▲ .

16. 若 $W=5x^2-4xy+y^2-2y+8x+3$(x、y 为实数),则 W 的最小值为 ▲ .

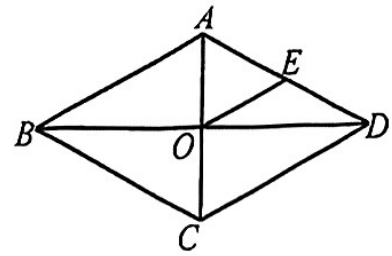
三、解答题(本大题共 11 小题,共 102 分.请在答题卡指定区域内作答,解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤,作图过程需保留作图痕迹)

17. (本题满分 6 分)计算 $|-4|+(\pi-\sqrt{2})^0-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

18. (本题满分 6 分)解方程组 $\begin{cases}3x+y=8, & ①\\ 2x-y=7. & ②\end{cases}$

19. (本题满分 6 分)解方程 $\frac{2x-5}{x-2}=\frac{3x-3}{x-2}-3$.

20. (本题满分 8 分)如图,菱形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O,E 为 AD 的中点,$AC=4$,$OE=2$.求 OD 的长及 $\tan\angle EDO$ 的值.



(第 20 题图)

21. (本题满分10分) 为了解本校八年级学生的暑期课外阅读情况,某数学兴趣小组抽取了50名学生进行问卷调查.

(1) 下面的抽取方法中,应该选择(▲)

A. 从八年级随机抽取一个班的50名学生

B. 从八年级女生中随机抽取50名学生

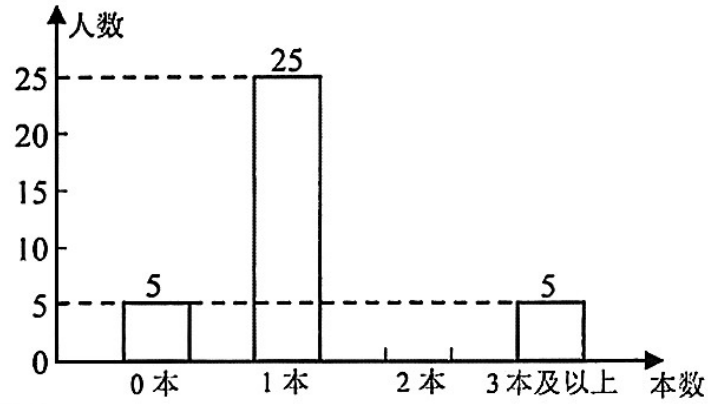
C. 从八年级所有学生中随机抽取50名学生

(2) 对调查数据进行整理,得到下列两幅尚不完整的统计图表:

暑期课外阅读情况统计表

阅读数量(本)	人数
0	5
1	25
2	a
3本及以上	5
合计	50

暑期课外阅读情况条形统计图



统计表中的 a = ▲ ,补全条形统计图;

(3) 若八年级共有800名学生,估计八年级学生暑期课外阅读数量达到2本及以上的学生人数;

(4) 根据上述调查情况,写一条你的看法.

22. (本题满分10分) 如图,有4张分别印有Q版西游图案的卡片:A 唐僧、B 孙悟空、C 猪八戒、D 沙悟净.


A 唐僧


B 孙悟空


C 猪八戒


D 沙悟净

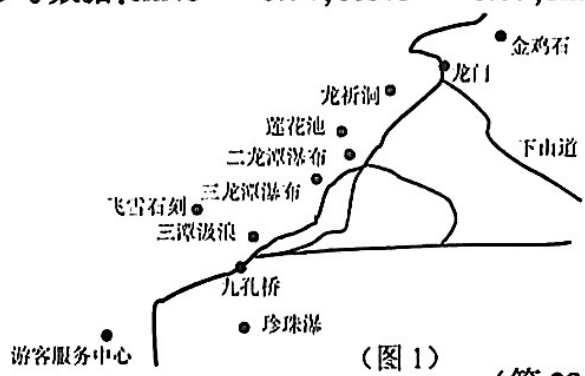
现将这4张卡片(卡片的形状、大小、质地都相同) 放在不透明的盒子中,搅匀后从中任意取出1张卡片,记录后放回、搅匀,再从中任意取出1张卡片.求下列事件发生的概率:

(1) 第一次取出的卡片图案为"B 孙悟空" 的概率为 ▲ ;

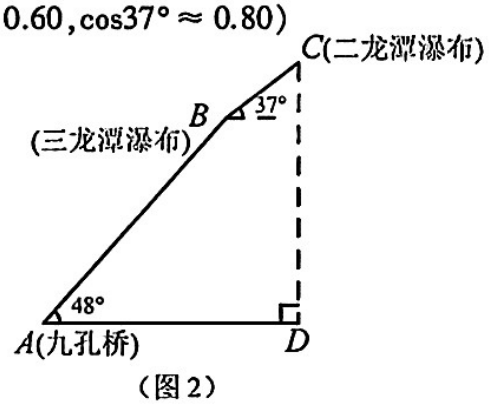
(2) 用画树状图或列表的方法,求两次取出的2张卡片中至少有1张图案为"A 唐僧" 的概率.

23. (本题满分10分) 渔湾是国家"AAAA" 级风景区,图1是景区游览的部分示意图.如图2,小卓从九孔桥 A 处出发,沿着坡角为48° 的山坡向上走了92 m到达 B 处的三龙潭瀑布,再沿坡角为37° 的山坡向上走了30 m到达 C 处的二龙潭瀑布.求小卓从 A 处的九孔桥到 C 处的二龙潭瀑布上升的高度 DC 为多少米?(结果精确到0.1m)

(参考数据:$\sin48° \approx 0.74$, $\cos48° \approx 0.67$, $\sin37° \approx 0.60$, $\cos37° \approx 0.80$)



(图1)



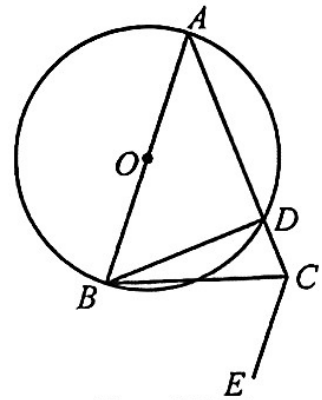
(图2)

(第23题图)

24. (本题满分10分) 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,以 AB 为直径的 $\odot O$ 交边 AC 于点 D,连接 BD,过点 C 作 $CE \parallel AB$.

(1) 请用无刻度的直尺和圆规作图:过点 B 作 $\odot O$ 的切线,交 CE 于点 F;(不写作法,保留作图痕迹,标明字母)

(2) 在(1) 的条件下,求证:$BD=BF$.



(第24题图)

25. (本题满分12分) 目前,我市对市区居民用气户的燃气收费,以户为基础、年为计算周期设定了如下表的三个气量阶梯:

阶梯	年用气量	销售价格	备注
第一阶梯	0 ~ 400 m^3(含400) 的部分	2.67 元/m^3	若家庭人口超过4人的,每增加1人,第一、二阶梯年用气量的上限分别增加100 m^3、200 m^3.
第二阶梯	400 ~ 1 200 m^3(含1 200) 的部分	3.15 元/m^3	
第三阶梯	1 200 m^3 以上的部分	3.63 元/m^3	

(1) 一户家庭人口为3人,年用气量为200 m^3,则该年此户需缴纳燃气费用为 ▲ 元;

(2) 一户家庭人口不超过4人,年用气量为 x m^3($x>1\,200$),该年此户需缴纳燃气费用为 y 元,求 y 与 x 的函数表达式;

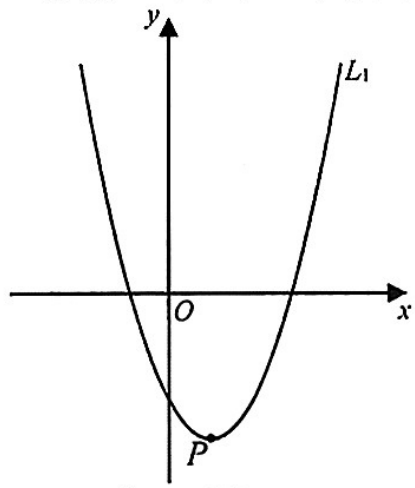
(3) 甲户家庭人口为3人,乙户家庭人口为5人,某年甲户、乙户缴纳的燃气费用均为3 855元,求该年乙户比甲户多用多少立方米的燃气?(结果精确到1 m^3)

26. (本题满分12分) 如图,在平面直角坐标系 xOy 中,抛物线 $L_1: y=x^2-2x-3$ 的顶点为 P.直线 l 过点 $M(0,m)$($m \geqslant -3$),且平行于 x 轴,与抛物线 L_1 交于 A、B 两点(B 在 A 的右侧).将抛物线 L_1 沿直线 l 翻折得到抛物线 L_2,抛物线 L_2 交 y 轴于点 C,顶点为 D.

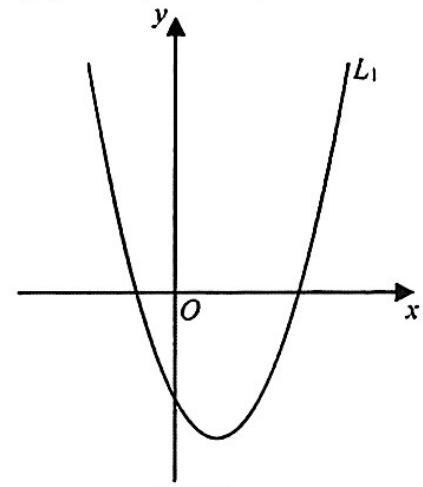
(1) 当 $m=1$ 时,求点 D 的坐标;

(2) 连接 BC、CD、DB,若 $\triangle BCD$ 为直角三角形,求此时 L_2 所对应的函数表达式;

(3) 在(2) 的条件下,若 $\triangle BCD$ 的面积为3,E、F 两点分别在边 BC、CD 上运动,且 $EF=CD$,以 EF 为一边作正方形 $EFGH$,连接 CG,写出 CG 长度的最小值,并简要说明理由.



(第26题图)

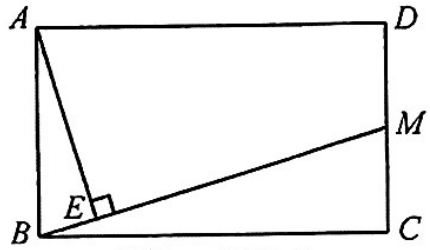


(备用图)

27. (本题满分 12 分)

【问题情境 建构函数】

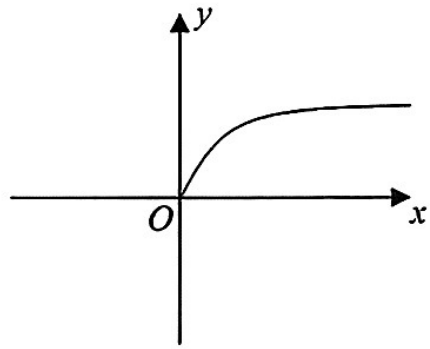
(1) 如图 1,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=4$,M 是 CD 的中点,$AE\perp BM$,垂足为 E.设 $BC=x$,$AE=y$,试用含 x 的代数式表示 y.



(第 27 题图 1)

【由数想形 新知初探】

(2) 在上述表达式中,y 与 x 成函数关系,其图像如图 2 所示.若 x 取任意实数,此时的函数图像是否具有对称性? 若有,请说明理由,并在图 2 上补全函数图像.



(第 27 题图 2)

【数形结合 深度探究】

(3) 在"x 取任意实数" 的条件下,对上述函数继续探究,得出以下结论:① 函数值 y 随 x 的增大而增大;② 函数值 y 的取值范围是 $-4\sqrt{2}<y<4\sqrt{2}$;③ 存在一条直线与该函数图像有四个交点;④ 在图像上存在四点 A、B、C、D,使得四边形 $ABCD$ 是平行四边形.其中正确的是 ___▲___.(写出所有正确结论的序号)

【抽象回归 拓展总结】

(4) 若将(1) 中的"$AB=4$" 改成"$AB=2k$",此时 y 关于 x 的函数表达式是___▲___;一般地,当 $k\neq 0$,x 取任意实数时,类比一次函数、反比例函数、二次函数的研究过程,探究此类函数的相关性质(直接写出 3 条即可).

数学试题参考答案及评分建议

一、选择题(每题 3 分,共 24 分)

1—4 DCAC　　5—8 BBDD

二、填空题(每题 3 分,共 24 分)

9. 5　　10. <　　11. 如 4(大于 2 小于 8 的数即可)　　12. $a<1$

13. $(3,150°)$　　14. 60　　15. $-\frac{8}{3}$　　16. -2

三、解答题(共 102 分)

17. 原式 $=4+1-2=3$. …… 6 分

18. ① + ② 得 $5x = 15$，解得 $x = 3$. …… 3 分

将 $x = 3$ 代入 ① 得 $3 \times 3 + y = 8$，解得 $y = -1$.

∴ 原方程组的解为 $\begin{cases} x = 3, \\ y = -1. \end{cases}$ …… 6 分

19. 方程两边同乘以 $(x-2)$，得 $2x - 5 = 3x - 3 - 3(x-2)$. 解得 $x = 4$. …… 4 分

检验：当 $x = 4$ 时，$x - 2 \neq 0$，∴ $x = 4$ 是原方程的解. …… 6 分

20. 在菱形 $ABCD$ 中，$AC \perp BD$，$AC = 2AO$. ∵ $AC = 4$，∴ $AO = 2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，∵ E 为 AD 中点，∴ $OE = \frac{1}{2}AD$. ∵ $OE = 2$. ∴ $AD = 4$.

∴ $OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$. …… 6 分

∴ $\tan\angle EDO = \frac{AO}{OD} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. …… 8 分

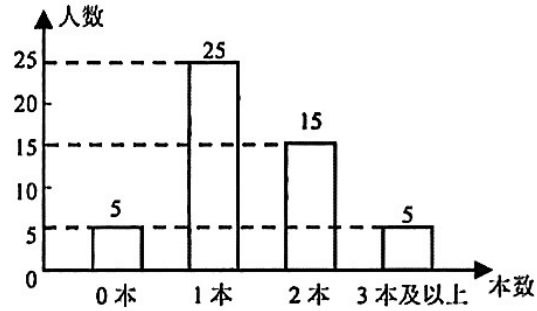
21. (1) C； …… 2 分

(2) 15；如右图所示 …… 6 分

(3) $800 \times \frac{15+5}{50} = 320$(人)

答：八年级学生暑期课外阅读数量达到 2 本及以上的学生约为 320 人. …… 8 分

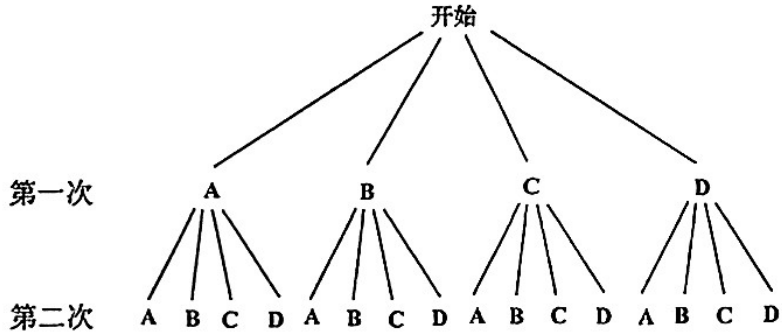
(4) 答案不唯一，只要合理即可. …… 10 分



第 21 题答案图

22. (1) $\frac{1}{4}$； …… 3 分

(2) 树状图如图所示：



由图可以看出一共有 16 种等可能结果，其中至少一张卡片图案为“A 唐僧”的结果有 7 种.

∴ P(至少一张卡片图案为“A 唐僧”) $= \frac{7}{16}$.

答：两次取出的 2 张卡片中至少有一张图案为“A 唐僧”的概率为 $\frac{7}{16}$. …… 10 分

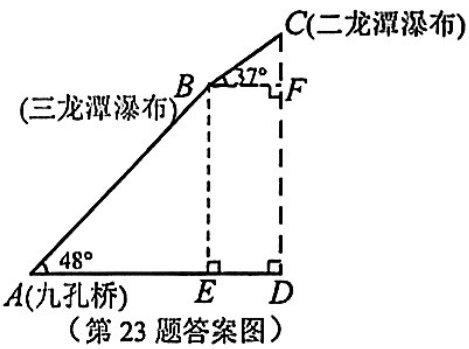
23. 过点 B 作 $BE \perp AD$，垂足为 E. 在 $Rt\triangle ABE$ 中，

$\sin\angle BAE = \frac{BE}{AB}$，

∴ $BE = AB\sin\angle BAE = 92\sin 48° \approx 92 \times 0.74 = 68.08$m.

…… 4 分

过点 B 作 $BF \perp CD$，垂足为 F.



（第 23 题答案图）

在 Rt△CBF 中，$\sin\angle CBF = \dfrac{CF}{BC}$，

$\therefore CF = BC\sin\angle CBF = 30\sin37° \approx 30 \times 0.60 = 18.00\text{m}$. …… 8 分

$\because FD = BE = 68.08\text{m}$，

$\therefore DC = FD + CF = 68.08 + 18.00 = 86.08 \approx 86.1\text{m}$.

答：从 A 处的九孔桥到 C 处的二龙潭瀑布上升的高度 DC 约为 86.1m . …… 10 分

24. (1) 方法不唯一，如图所示. …… 5 分

(2) $\because AB = AC, \therefore \angle ABC = \angle ACB$. 又 $\because AB \parallel CE$，

$\therefore \angle ABC = \angle BCF, \therefore \angle BCF = \angle ACB$.

$\because$ 点 D 在以 AB 为直径的圆上，$\therefore \angle ADB = 90°$，

$\therefore \angle BDC = 90°$.

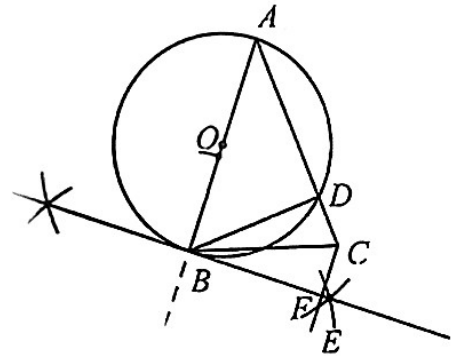
又 $\because BF$ 为 $\odot O$ 的切线，$\therefore \angle ABF = 90°$.

$\because AB \parallel CE, \therefore \angle BFC + \angle ABF = 180°$，

$\therefore \angle BFC = 90°, \therefore \angle BDC = \angle BFC$.

$\because$ 在 $\triangle BCD$ 和 $\triangle BCF$ 中，

$$\begin{cases} \angle BCD = \angle BCF, \\ \angle BDC = \angle BFC, \\ BC = BC, \end{cases}$$



（第 24 题答案图）

$\therefore \triangle BCD \cong \triangle BCF(\text{AAS}). \therefore BD = BF$. …… 10 分

25. (1)534； …… 3 分

(2) y 关于 x 的表达式为

$y = 400 \times 2.67 + (1200 - 400) \times 3.15 + 3.63(x - 1200) = 3.63x - 768 (x > 1200)$

…… 7 分

(3) $\because 400 \times 2.67 + (1200 - 400) \times 3.15 = 3588 < 3855, \therefore$ 甲户该年的用气量达到了第三阶梯.

由(2) 知，当 $y = 3855$ 时，$3.63x - 768 = 3855$，解得 $x \approx 1273.6$.

又 $\because 2.67 \times (100 + 400) + 3.15 \times (1200 + 200 - 500) = 4170 > 3855$，

且 $2.67 \times (100 + 400) = 1335 < 3855$，

$\therefore$ 乙户该年的用气量达到第二阶梯，但未达到第三阶梯.

设乙户年用气量为 $a\ \text{m}^3$. 则有 $2.67 \times 500 + 3.15(a - 500) = 3855$，解得 $a = 1300.0$，

$\therefore 1300.0 - 1273.6 = 26.4 \approx 26\text{m}^3$.

答：该年乙户比甲户多用约 26 立方米的燃气. …… 12 分

26. (1) $\because y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4, \therefore$ 抛物线 L_1 的顶点坐标 $P(1, -4)$.

$\because m = 1$，点 P 和点 D 关于直线 $y = 1$ 对称. $\therefore D(1,6)$. …… 3 分

(2) 由题意得，L_1 的顶点 $P(1, -4)$ 与 L_2 的顶点 D 关于直线 $y = m$ 对称，

$\therefore D(1,2m + 4)$，抛物线 $L_2: y = -(x - 1)^2 + (2m + 4) = -x^2 + 2x + 2m + 3$.

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时，可得 $C(0,2m + 3)$.

① 当 $\angle BCD = 90°$ 时，如图 1，过 D 作 $DN \perp y$ 轴，垂足为 N.

$\because D(1,2m + 4), \therefore N(0,2m + 4). \because C(0,2m + 3). \therefore DN = NC = 1. \therefore \angle DCN = 45°$.

$\because \angle BCD = 90°, \therefore \angle BCM = 45°. \because$ 直线 $l \parallel x$ 轴，$\therefore \angle BMC = 90°$.

$\therefore \angle CBM = \angle BCM = 45°, BM = CM$.

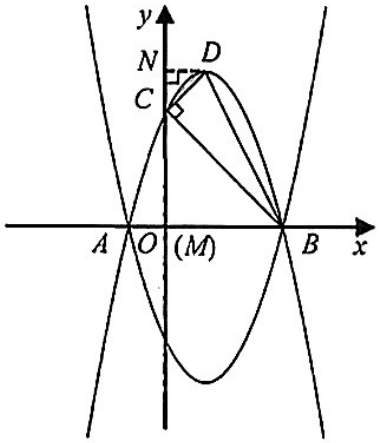
$\because m \geqslant -3, \therefore BM = CM = (2m + 3) - m = m + 3. \therefore B(m + 3, m)$.

又∵ 点 B 在 $y=x^2-2x-3$ 图像上，∴ $m=(m+3)^2-2(m+3)-3$.

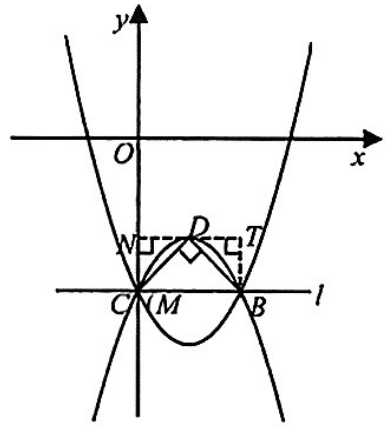
解得 $m=0$ 或 $m=-3$.

∵ 当 $m=-3$ 时，可得 $B(0,-3)$，$C(0,-3)$，此时 B、C 重合，舍去. 当 $m=0$ 时，符合题意.

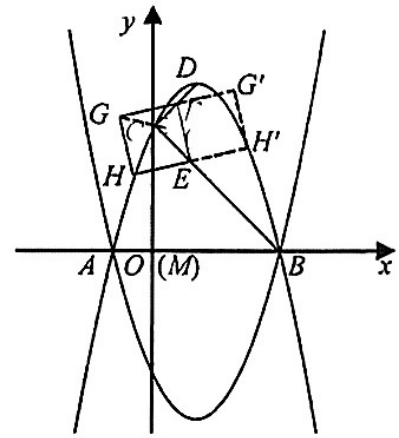
将 $m=0$ 代入 L_2：$y=-x^2+2x+2m+3$，得 L_2：$y=-x^2+2x+3$.



（第 26 题答案图 1）



（第 26 题答案图 2）



（第 26 题答案图 3）

② 当 $\angle BDC=90°$ 时，如图 2，过 B 作 $BT\perp ND$，交 ND 的延长线于点 T.

同理可得 $BT=DT$. ∵ $D(1,2m+4)$，∴ $DT=BT=(2m+4)-m=m+4$.

∵ $DN=1$，∴ $NT=DN+DT=1+(m+4)=m+5$. ∴ $B(m+5,m)$.

又∵ 点 B 在 $y=x^2-2x-3$ 图像上，

∴ $m=(m+5)^2-2(m+5)-3$. 解得 $m=-3$ 或 $m=-4$.

∵ $m\geqslant -3$，∴ $m=-3$. 此时 $B(2,-3)$，$C(0,-3)$ 符合题意.

将 $m=-3$ 代入 L_2：$y=-x^2+2x+2m+3$，得 L_2：$y=-x^2+2x-3$.

③ 易知，当 $\angle DBC=90°$ 时，此情况不存在.

综上，L_2 所对应的函数表达式为 $y=-x^2+2x+3$ 或 $y=-x^2+2x-3$. …… 8 分

(3) 如图 3，由(2) 知，当 $\angle BDC=90°$ 时，$m=-3$，此时 $\triangle BCD$ 的面积为 1，不合题意舍去.

当 $\angle BCD=90°$ 时，$m=0$，此时 $\triangle BCD$ 的面积为 3，符合题意.

由题意可求得 $EF=FG=CD=\sqrt{2}$.

取 EF 的中点 Q，在 $\mathrm{Rt}\triangle CEF$ 中可求得 $CQ=\frac{1}{2}EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle FGQ$ 中可求得 $GQ=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

易知当 Q，C，G 三点共线时，CG 取最小值，最小值为 $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$. …… 12 分

27. (1) 在矩形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle BCM=90°$，∴ $\angle ABE+\angle MBC=90°$.

∵ $AE\perp BM$，∴ $\angle AEB=90°$，∴ $\angle BAE+\angle ABE=90°$.

∴ $\angle AEB=\angle BCM$，$\angle MBC=\angle BAE$.

∴ $\mathrm{Rt}\triangle ABE\backsim \mathrm{Rt}\triangle BMC$，∴ $\frac{AB}{BM}=\frac{AE}{BC}$.

∵ $AB=4$，点 M 是 CD 的中点，∴ $CM=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AB=2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BMC$ 中，$BM=\sqrt{BC^2+CM^2}=\sqrt{x^2+2^2}=\sqrt{x^2+4}$，

∴ $\frac{4}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{y}{x}$. ∴ $y=\frac{4x}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{4x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}$.

∴ y 关于 x 的表达式为：$y=\frac{4x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}(x>0)$. …… 3 分

(2) x 取任意实数时,对应的函数图像关于原点成中心对称.理由如下:

若 $P(a,b)$ 为图像上任意一点,则 $b=\dfrac{4a\sqrt{a^2+4}}{a^2+4}$.

设 $P(a,b)$ 关于原点的对称点为 Q ,则 $Q(-a,-b)$.

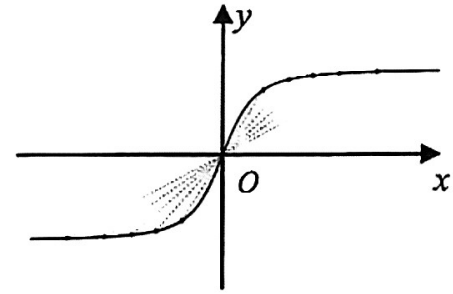
当 $x=-a$ 时,

$$y=\frac{4(-a)\sqrt{(-a)^2+4}}{(-a)^2+4}=-\frac{4a\sqrt{a^2+4}}{a^2+4}=-b.$$

$\therefore Q(-a,-b)$ 也在 $y=\dfrac{4x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}$ 的图像上.

$\therefore$ 当 x 取任意实数时,$y=\dfrac{4x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}$ 的图像关于原点对称.

函数图像如图所示. …… …… 7 分



(第 27 题答案图)

(3)①④ …… 9 分

(4) y 关于 x 的函数表达式为 $y=\dfrac{2kx\sqrt{x^2+k^2}}{x^2+k^2}$ $(x>0,k>0)$;

当 $k\neq 0$,x 取任意实数时,有如下相关性质:

当 $k>0$ 时,图像经过第一、三象限,函数值 y 随 x 的增大而增大,y 的取值范围为 $-2k<y<2k$;

当 $k<0$ 时,图像经过第二、四象限,函数值 y 随 x 的增大而减小,y 的取值范围为 $2k<y<-2k$;

函数图像经过原点;

函数图像关于原点对称;

……

…… …… 12 分

(备注:各题如有其它解法,只要正确,均可参照给分)