尺规作图

苏州工业园区星湾学校　段广猛

“广猛说题”微信公众号

尺规作图发展史

尺规作图的渊源，可追溯至古埃及与巴比伦人丈量土地的实际需求。但真正将其淬炼为一种纯粹理性艺术的，是古希腊人。他们相信，直线与圆是宇宙最完美的形式，规与尺便是探索永恒真理的圣器。欧几里得在《几何原本》中将其公理化，构建了逻辑的殿堂。

随之而来的，是萦绕千年的三大几何难题：化圆为方、倍立方体、三等分任意角。无数智者在此折戟沉沙，其中不乏惊才绝艳之辈。传说，当雅典瘟疫肆虐，神谕告知必须将立方体祭坛体积加倍方能平息神怒，这“倍立方”问题便让工匠与哲人一同陷入了迷思。阿基米德曾巧解三等分角，却“犯规”地在尺上做了标记，这正体现了尺规作图的严格与魅力所在。

时光流转至文艺复兴，透视法的研究赋予了尺规作图新的生机。而真正的革命在19世纪到来。年轻的法国数学天才伽罗瓦，在决斗前夜写下了开创性的“群论”思想，为判断作图可能性提供了终极标尺。随后，数学家万芝尔与林德曼相继严格证明，三大难题在尺规框架下“不可能”完成——林德曼更是因证明了π的超越性，为“化圆为方”画上了永恒的句号。

正多边形的作图史，本质上是一部探索“费马素数”的史诗。这一跨越千年的智慧接力，在1801年迎来了巅峰：年仅24岁的高斯，在他划时代的著作《算术研究》中，惊人地宣布了他对正十七边形的尺规作图方法。这不仅是解决了一个具体问题，更是他深藏在结论背后的伟大洞见——他彻底解决了哪些正多边形是“可作图”的，给出了一个完整的判别准则：一个正n边形可以尺规作图的充要条件是，n等于2的k次幂与任意多个互异的“费马素数”的乘积。

后续的数学家们沿着高斯指明的道路继续前进。例如，在1832年，P. L. 万芝尔完成了正257边形的作图；而约半个世纪后，J. 赫尔梅斯更是耗费十年心血，给出了正65537边形的尺规作图方法，其手稿达200多页，堪称毅力与智慧的奇迹。

尺规作图问题是一块“试金石”与“导火索”。为了解决三等分角、化圆为方和倍立方体这些尺规作图难题，数学家们被迫超越了传统的几何方法，创造了全新的数学工具。伽罗瓦的“群论”和解决化圆为方所依赖的“超越数”理论，都成为了现代数学的基石。正是这些“不可能”的问题，催生了更强大的数学。

它是一座连接几何与代数的“桥梁”。从高斯对正多边形的判别开始，尺规作图不再仅仅是几何学的一个分支，它变成了“域论”和“抽象代数”最直观、最美丽的模型。哪些图形可作，等价于哪些数可以通过有限次有理运算与开平方得到。这深刻地揭示了，几何作图的可能性，完全由底层“数域”的代数结构所决定。

因此，尺规作图的历史，就是一部数学思想不断升华的缩影。它从测量土地的实用工具，发展为探索宇宙秩序的哲学追求，最终成为催生现代抽象数学的母体与温床。它用最朴素的规与尺，不仅画出了完美的图形，更勾勒出了整个数学王国宏伟的疆域。

知识储备

1．平面上的曲线可以看成是由满足一定条件的点组成的，我们把满足某种条件的点组成的集合叫做具有这种性质的点的轨迹．例如，圆可以看成是到定点的距离等于定长的点的轨迹．初中常见的轨迹有：

（1）与已知线段两个端点的距离相等的点的轨迹是这条线段的垂直平分线；

（2）与一条直线的距离等于定长的点的轨迹是平行于该直线且位于此直线两侧，并且到这条直线的距离
等于定长的两条平行线；

知识储备

1．平面上的曲线可以看成是由满足一定条件的点组成的，我们把满足某种条件的点组成的集合叫做具有这种性质的点的轨迹．例如，圆可以看成是到定点的距离等于定长的点的轨迹．初中常见的轨迹有：

（3）与两条平行直线的距离相等的点的轨迹是这两条平行线的公垂线段的垂直平分线；

（4）与两条相交直线距离相等的点的轨迹是分别平分两条已知直线交角的互相垂直的两条直线；

（5）到一个定点距离等于定长的点的轨迹是以定点为圆心，定长为半径的圆；

知识储备

1．平面上的曲线可以看成是由满足一定条件的点组成的，我们把满足某种条件的点组成的集合叫做具有这种性质的点的轨迹．例如，圆可以看成是到定点的距离等于定长的点的轨迹．初中常见的轨迹有：

（6）与已知线段两端点所连线段的交角等于定角α（$0°<\alpha<180°$）的点的轨迹，是以已知线段为弦，所含圆周角等于的两段圆弧；特别地，与已知线段两端点所连线段互相垂直的点的轨迹，是以已知线段为直径的一个圆．

知识储备

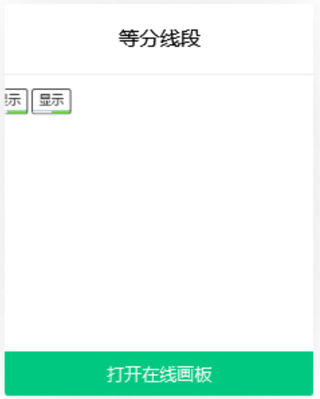
2．借助（无刻度）直尺和圆规可以：

（1）作一条线段等于已知线段；（2）作一个角等于已知角；

（3）作一个角的平分线；（4）作一条线段的垂直平分线；

（5）过一点作已知直线的垂线；（6）过圆外一点作已知圆的切线…

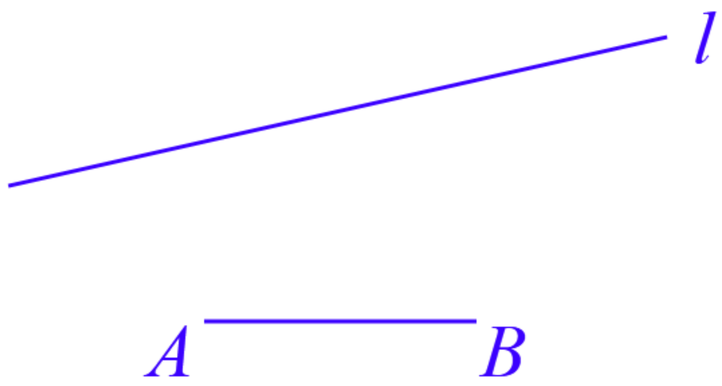
3．思考：如何利用尺规作已知线段的n等分点？

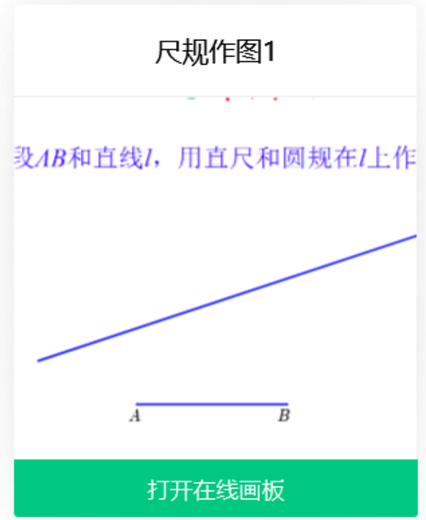




一道作图题

如图，已知线段AB和直线l，用直尺和圆规在l上作出所有的点P，使得$\angle APB=30°$.



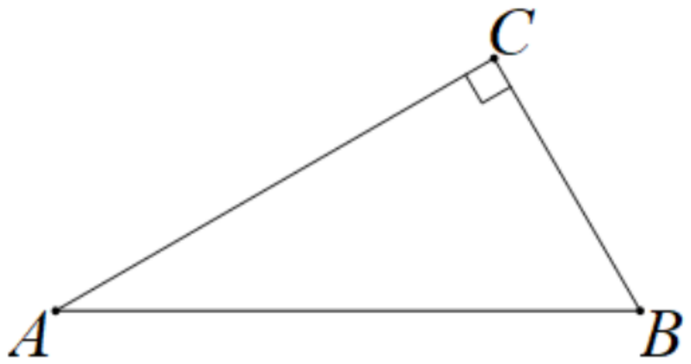


精讲精练

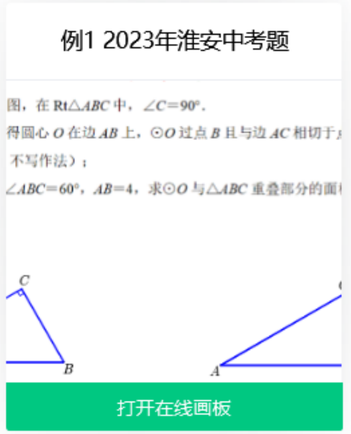
例 1．（2023 年淮安中考题）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$．

（1）尺规作图：作⊙O，使得圆心 O 在边 AB 上，⊙O 过点 B 且与边 AC 相切于点 D（请保留作图痕迹，标明相应的字母，不写作法）；

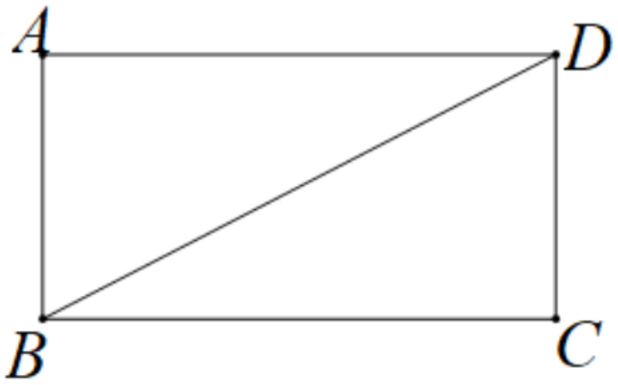
（2）在（1）的条件下，若$\angle ABC=60°$，$AB=4$，求⊙O 与△ABC 重叠部分的面积．

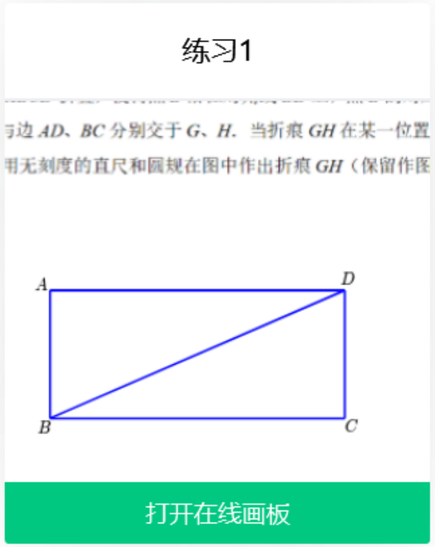


$\frac{16}{27}\pi+\frac{4}{9}\sqrt{3}$

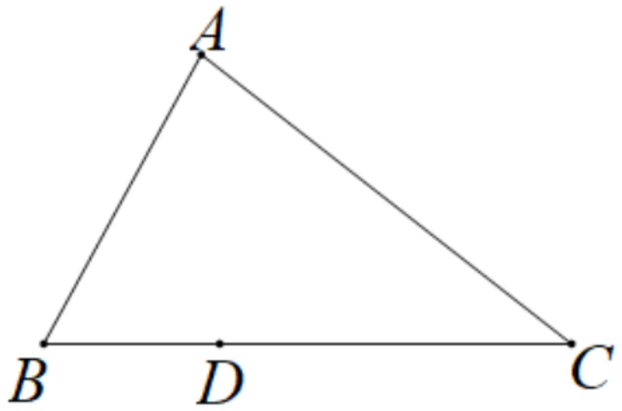


练习 1．如图，将矩形纸片 $ABCD$ 折叠，使得点 B 落在对角线 BD 上，点 B 的对应点记为点 E，点 A 的对应点记为点 F，折痕与边 AD、BC 分别交于 G、H．当折痕 GH 在某一位置时，能使 C、E、F 三点在同一条直线上．请用无刻度的直尺和圆规在图中作出折痕 GH（保留作图的痕迹，不写作法）．



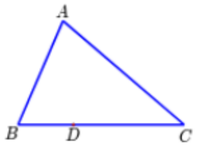


例 2．如图，$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边上的一点，且满足 $CD=2BD$，试在边 AC 上找一点 E，使得四边形 $ABDE$ 的面积与 $\triangle CDE$ 的面积相等．（要求：尺规作图，保留作图痕迹．）



例2 共角定理，面积比

相等．（要求：尺规作图，保留作图痕迹．）



打开在线画板

练习 2．如图，已知矩形 $ABCD$，求作一个正方形，使得该正方形的面积和矩形 $ABCD$ 的面积相等．

（要求：尺规作图，保留作图痕迹．）



练习2-正方形的面积等于给...

某留作图痕迹．）

A
D
B
C

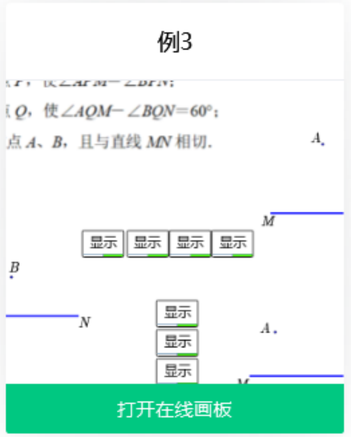
打开在线画板

例 3．如图，已知直线 MN 同侧有两点 A、B，分别按下列要求，用无刻度直尺和圆规作图：

（1）在直线 MN 上作一点 P，使 $\angle APM=\angle BPN$；

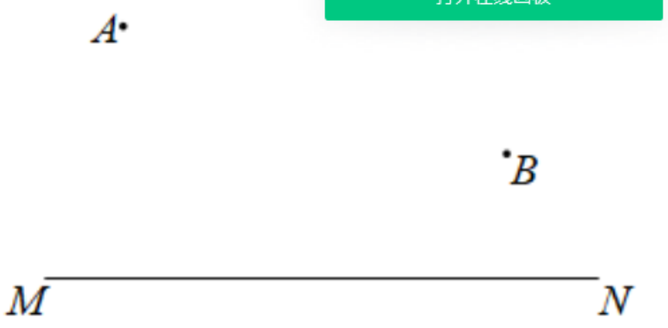
（2）在直线 MN 上作一点 Q，使 $\angle AQM-\angle BQN=60°$；

（3）作⊙O，使⊙O 经过点 A、B，且与直线 MN 相切．

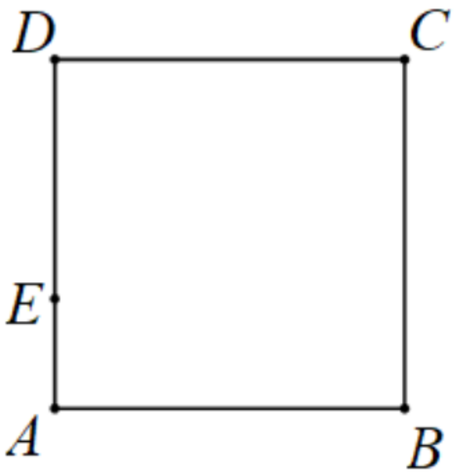


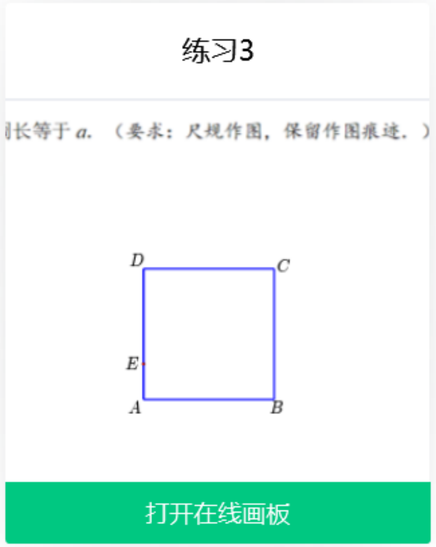






练习 3．如图，已知一个边长为 a 的正方形 $ABCD$，E 是边 AD 上的一定点，且 $AE<\frac{1}{2}a$，请在边 AB 上确定点 F，使 $\triangle AEF$ 的周长等于 a．（要求：尺规作图，保留作图痕迹．）





例 4. （2021 年南京中考题）如图，已知 P 是⊙O 外一点，用两种不同的方法过点 P 作⊙O 的一条切线.

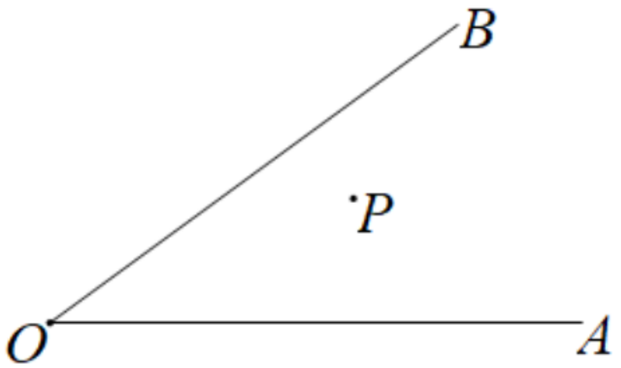
要求：（1）用直尺和圆规作图；（2）保留作图的痕迹，写出必要的文字说明.

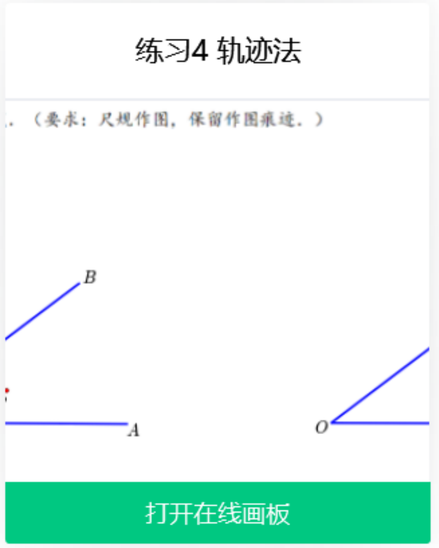




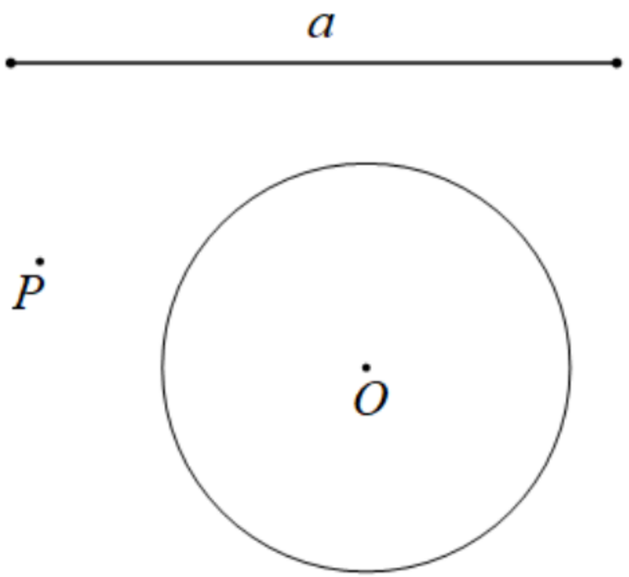


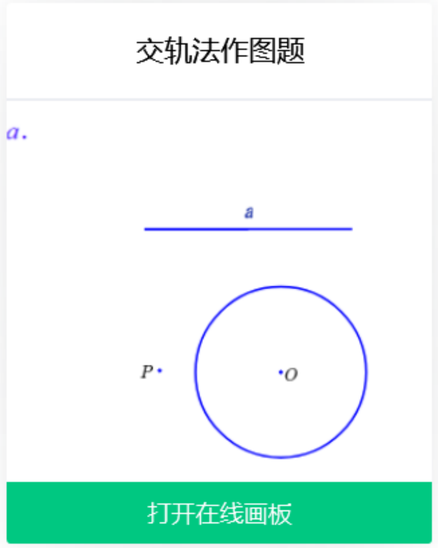
练习 4．如图，已知点 P 是锐角 $\angle AOB$ 内的一点，过点 P 作一条直线 l 分别与 OA、OB 交于 C、D，使得点 P 是线段 CD 的中点．（要求：尺规作图，保留作图痕迹．）





作图题 如图，从定⊙O外的一定点P，求作一割线PAB，使得$PA+PB=$定长a.

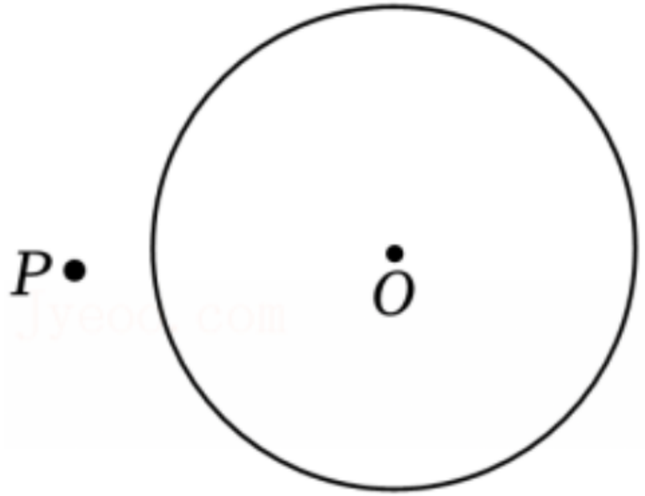


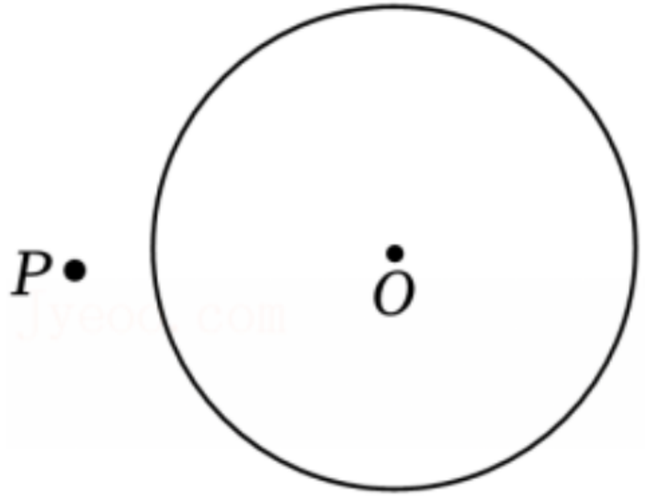


（2025年南京联合体一模）如图，⊙O的半径为r，点P在⊙O外．按下列要求分别求作一条直线l，使l过点P，并交⊙O于点A，B．

（1）$PB-PA=r$；（2）$PB+PA=2r$．

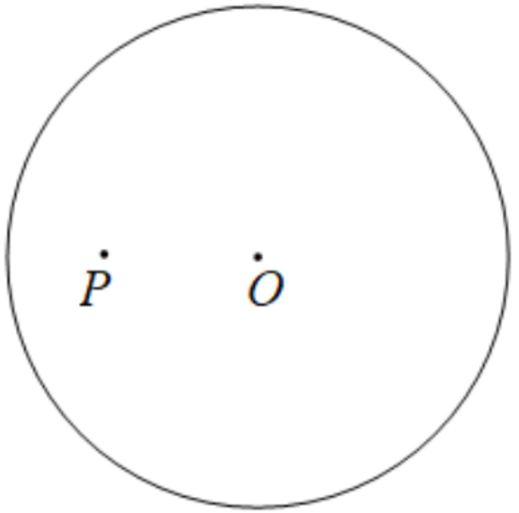
要求：①用直尺和圆规作图；②保留作图的痕迹，写出必要的文字说明．





2025年南京联合体一模作...
打开在线画板

例 5．如图，P 是⊙O 内一点，用直尺和圆规作弦 AB，使弦 AB 经过点 P，且 $PB=2PA$.

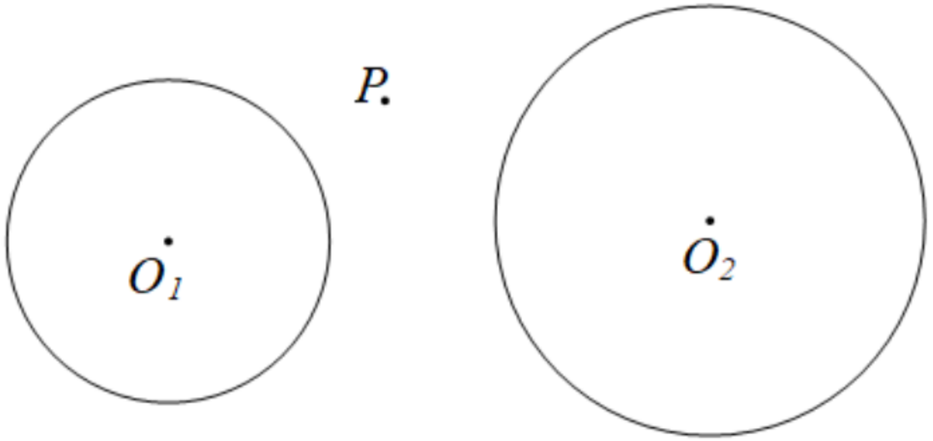


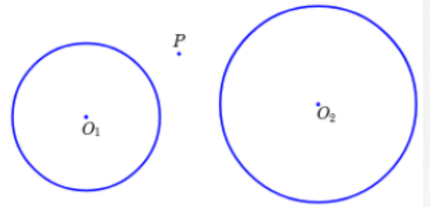
例5轨迹法-瓜豆原理+尺规...



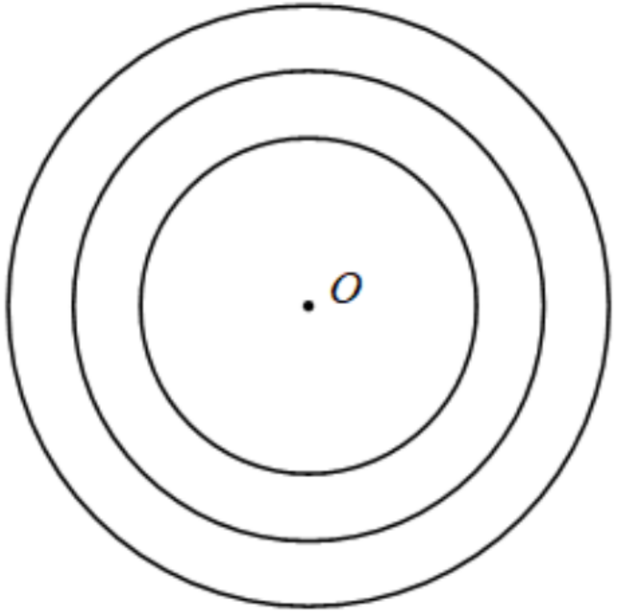
打开在线画板

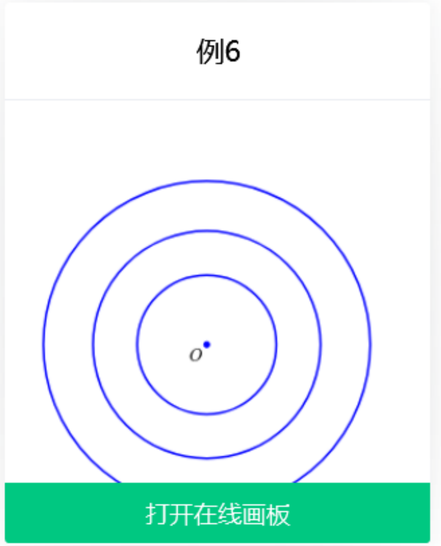
练习 5．如图，已知定圆 O_1、O_2 及定点 P，用直尺和圆规过点 P 作直线，分别与 O_1、O_2 交于点 A、B，使 $PA=PB$.



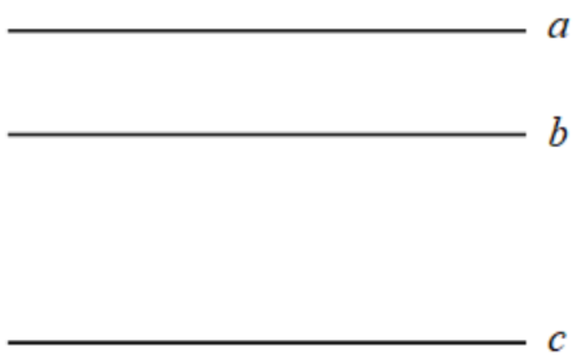


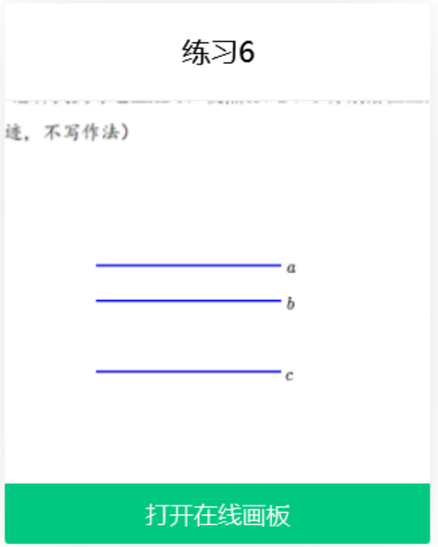
例 6．如图，用尺规作等边△ABC，使点 A、B、C 分别落在三个圆上．（保留作图痕迹）



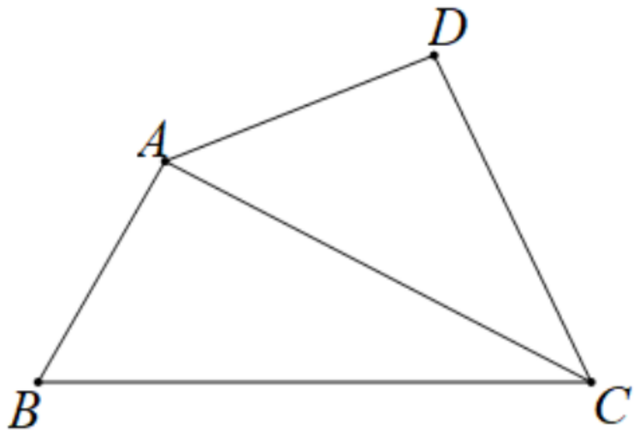


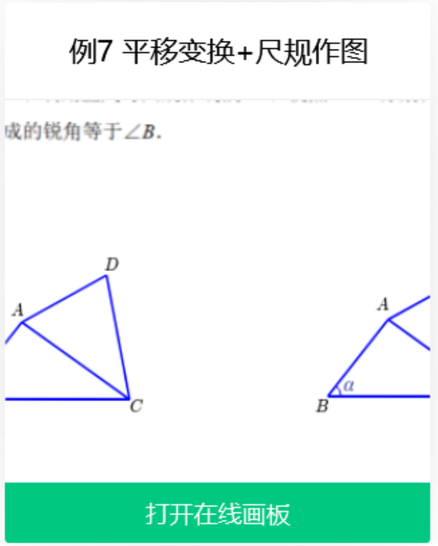
练习 6. 如图，直线 $a // b // c$，怎样找到等边△ABC，使点 A、B、C 分别落在三条直线上？用尺规作出该三角形. （保留作图痕迹，不写作法）



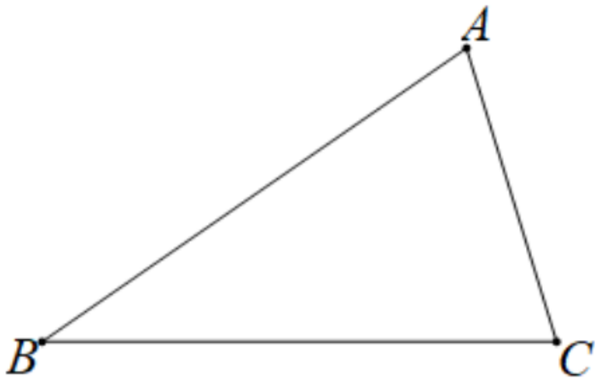


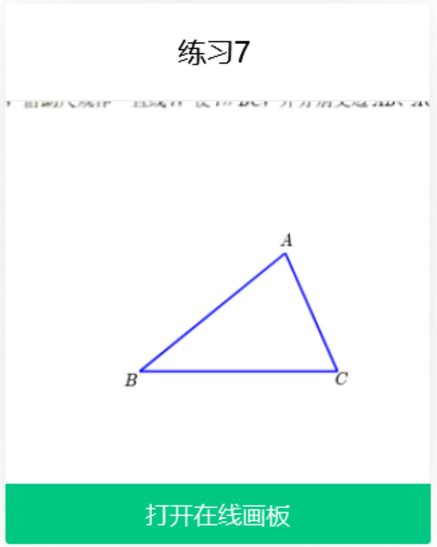
例 7. 如图，已知四边形 $ABCD$，利用直尺与圆规作线段 EF，使点 E、F 分别在 AB、CD 上，满足 $EF=AC$，且 EF 与 AC 相交所形成的锐角等于 $\angle B$.



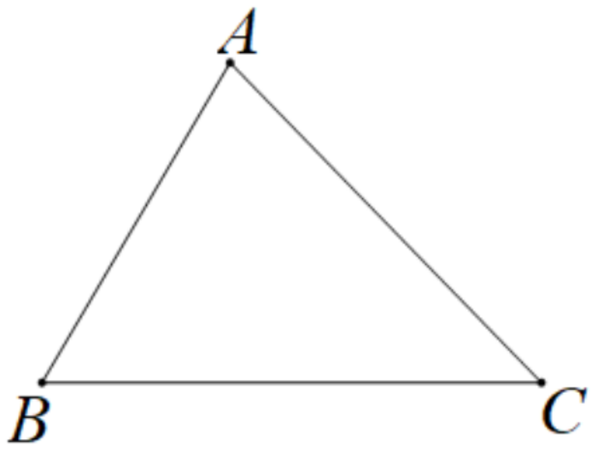


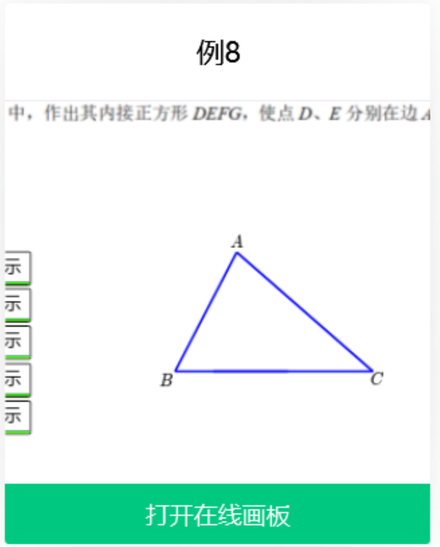
练习 7．如图，已知△ABC，借助尺规作一直线 l，使 $l /\!/ BC$，并分别交边 AB、AC 于点 D、E，且 $AD=CE$.



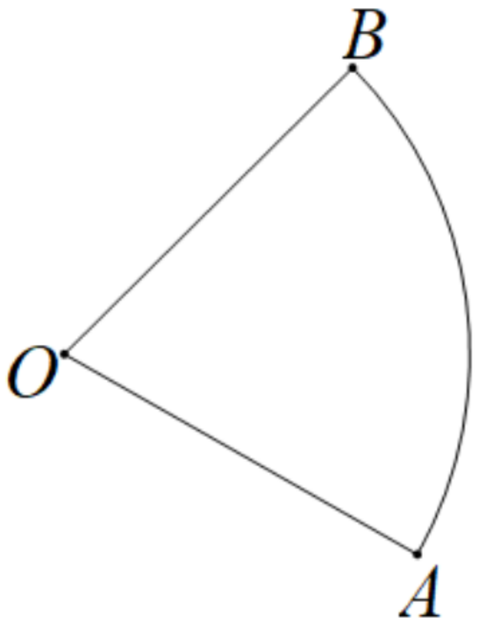


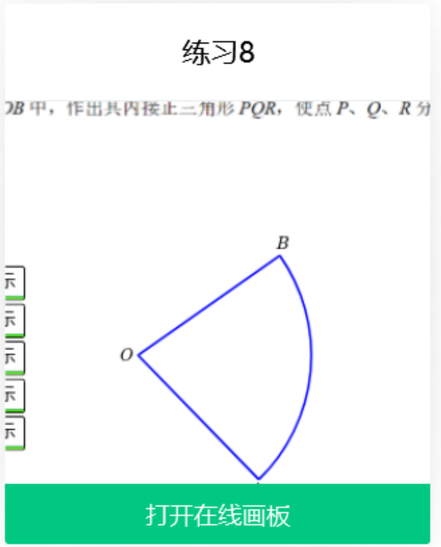
例 8．如图，在锐角△ABC 中，作出其内接正方形 $DEFG$，使点 D、E 分别在边 AC、AB 上，点 F、G 在边 BC 上．





练习 8．如图，在扇形 AOB 中，作出其内接正三角形 PQR，使点 P、Q、R 分别在 $\overset{\frown}{AB}$、OB、OA 上．



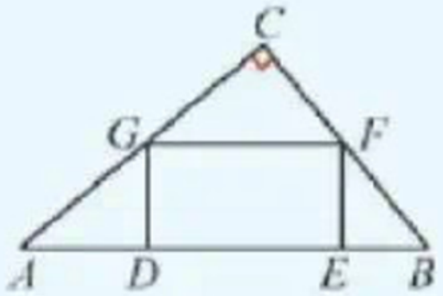


苏科版教材
九下《第6章
图形的相似》
P71习题3

1. 给形状相同且对应边的比为 1∶2 的两块多边形标牌的表面涂漆．如果小标牌用漆半听，那么大标牌需用漆多少听？

2. 两个相似多边形面积的比为 9∶16，其中较小的多边形的周长为 36 cm．求另一个多边形的周长．

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，矩形 $DEFG$ 的顶点 G、F 分别在 AC、BC 上，DE 在 AB 上．设 $AG=5$，$AD=4$，求 $\triangle ADG$ 与 $\triangle FEB$ 的面积的比．



（第 3 题）

（原创题）

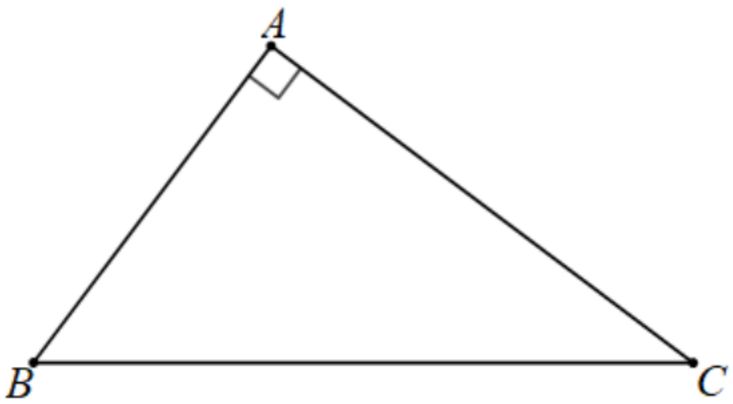
如图 1，在△ABC 中，$\angle A=90°$，矩形 $DEFG$ 的四个顶点都在△ABC 的边上（其中点 D 在边 AB 上，点 E、F 在边 BC 上，点 G 在边 AC 上），连接 EG．若△DEG 与△ABC 相似，则称矩形 $DEFG$ 是△ABC 的“内生矩形”．

（1）如图 2，当 $EG/\!/AB$ 时，求证：矩形 $DEFG$ 是△ABC 的“内生矩形”；

（2）若 $AB=3$，$AC=4$，矩形 $DEFG$ 是△ABC 的“内生矩形”，直接写出线段 AD 的长度；

（3）请利用无刻度直尺和圆规在备用图中作出 Rt△ABC 的一个“内生矩形”．（保留作图痕迹，并简要阐述作法）





备用图

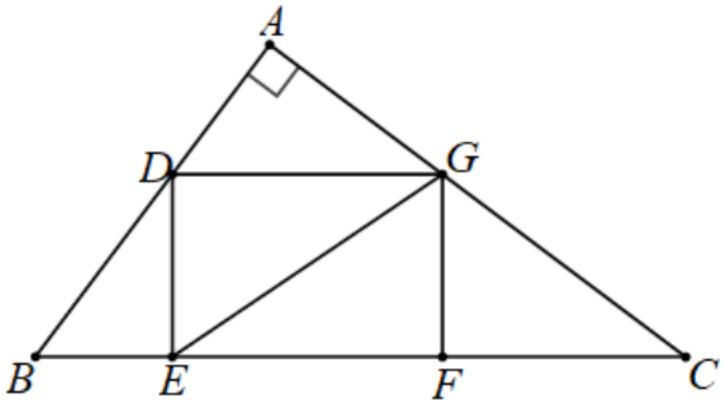


图 1

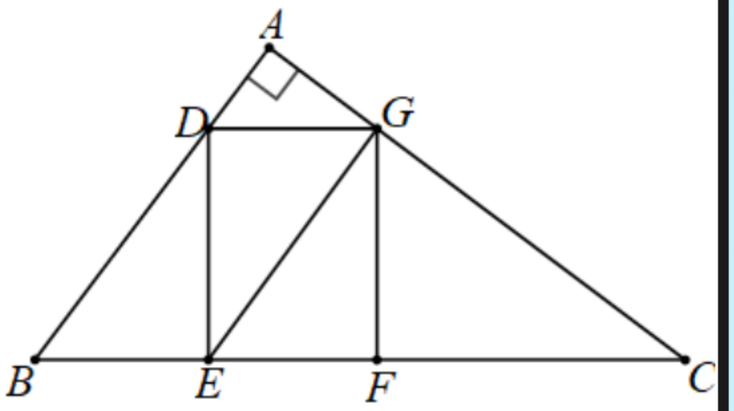


图 2

解：（1）∵$EG/\!/AB$，∴$\angle GEF=\angle B$；

∵四边形 $DEFG$ 是矩形，∴$\angle EDG=90°$，$DG/\!/EF$；∴$\angle DGE=\angle GEF=\angle B$；

∵$\angle A=90°$，∴$\angle EDG=\angle A$；∴$\triangle DGE\backsim\triangle ABC$；∴矩形 $DEFG$ 是$\triangle ABC$ 的“内生矩形”；

（2）$\frac{27}{34}$或$\frac{48}{41}$；

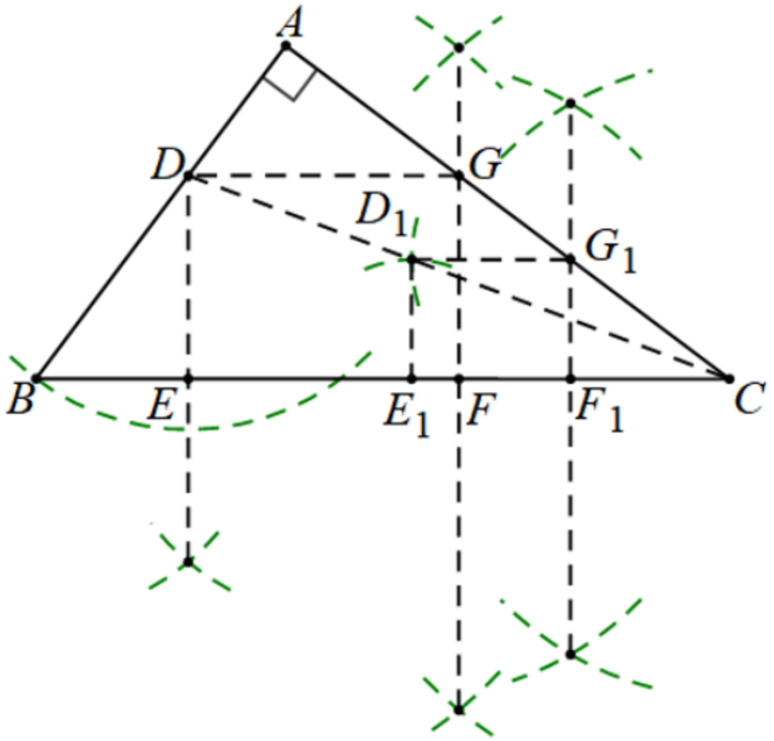
（3）作图痕迹如图 3 所示，具体步骤如下：

第一步：在 BC 上取点 E_1，作线段 CE_1 的垂直平分线，分别与 BC、AC 交于点 F_1、G_1；

第二步：以点 E_1 为圆心、F_1G_1 的长为半径作圆弧，再点 G_1 为圆心、E_1F_1 的长为半径作圆弧，两弧相交于点 D_1；

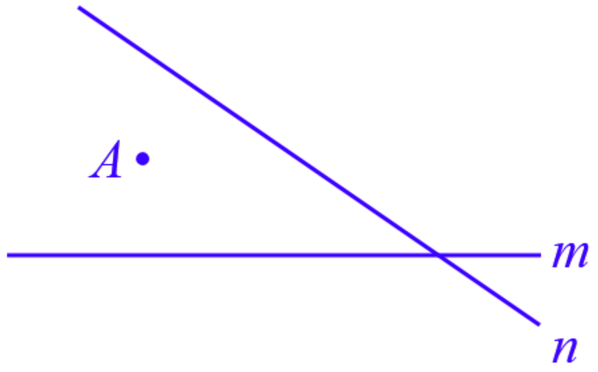
第三步：作射线 CD_1，与 AB 相交于点 D，过点 D 作 BC 的垂线，垂足为点 E；

第四步：作线段 CE 的垂直平分线，分别与 BC、AC 交于点 F、G，连接 DG，则矩形 $DEFG$ 即为所作.



一道原创题解法2-线束的妙...
E边 AC 上），连接 EG．若△DEG 与△ABC 相似，则称
时，求证：矩形 DEFG 是△ABC 的“内生矩形”；
矩形 DEFG 是△ABC 的“内生矩形”，直接写出线段 A
和圆规在备用图中作出 Rt△ABC 的一个“内生矩形”
另法：“平行线束”的妙用（两次）
打开在线画板

作图题 如图，已知点A和直线m、n，在直线m上求作点P，使得⊙P经过点A，且与直线n相切.

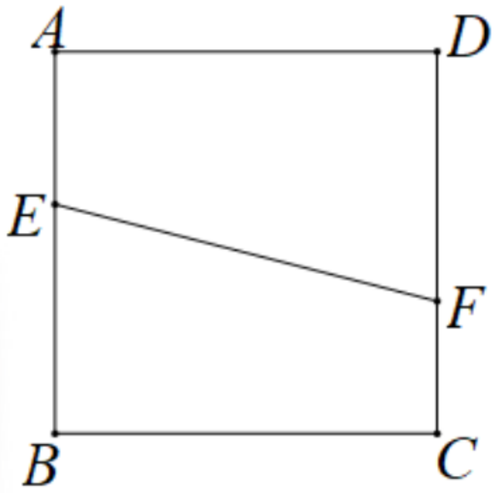




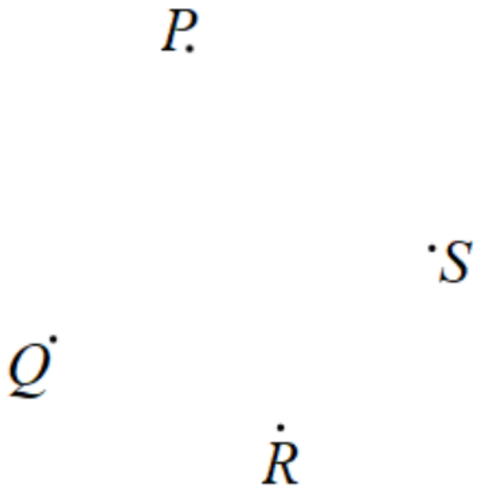
1. （2024 年南京中考题）尺规作图，并写出必要的文字说明.

（1）如图①，已知正方形 $ABCD$，E、F 分别在边 AB、CD 上，连接 EF，作 $GH \perp EF$，且 G 在 BC 上，H 在 AD 上（不与顶点重合）；

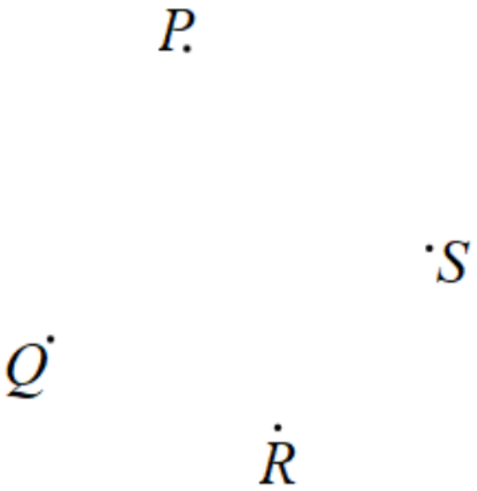
（2）如图②，点 P、Q、R、S 在一个正方形的四条边上，请用两种方法作出点 P 所在的正方形的边.



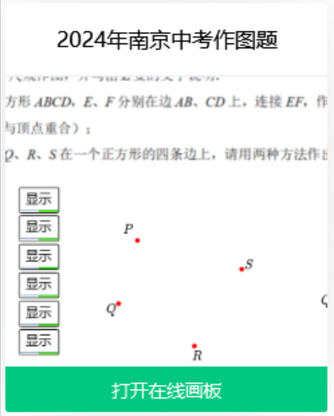
图①



图②

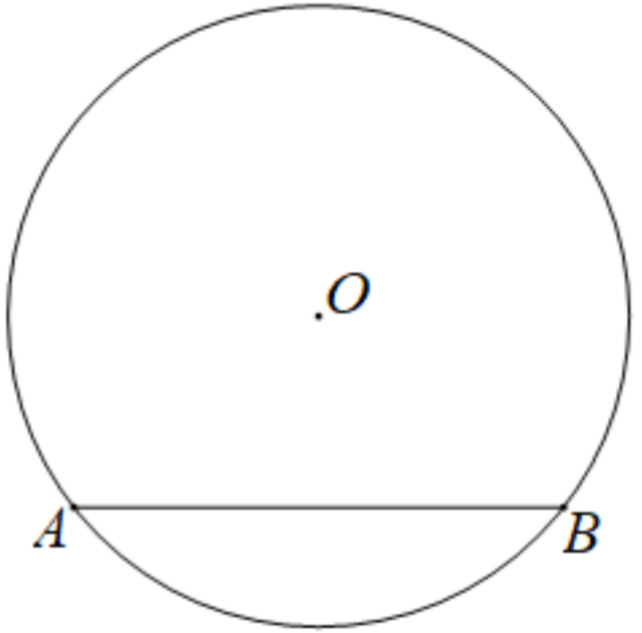


备用图

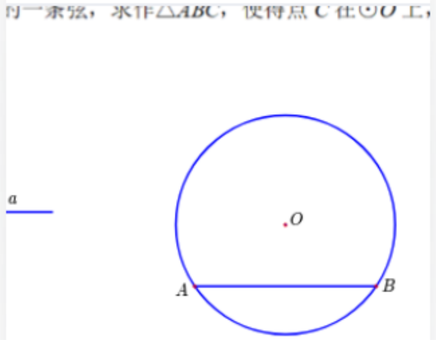


2. 如图，AB 是⊙O 的一条弦，求作△ABC，使得点 C 在⊙O 上，且 $CA-CB=a$.

a



拓展提升第2题



打开在线画板

方法总结

尺规作图常见方法总结

方法名称	核心思想	适用场景
几何性质法	利用图形的定义、定理和性质。	基础作图，如角平分线、中垂线。
轨迹法	将所求点视为两个轨迹（线或圆）的交点。	**定位点问题**的核心方法，应用极其广泛。
图形变换法	通过对称、旋转、平移化未知为已知。	路径最短问题、图形位置关系问题。
代数解析法	将问题转化为代数运算（尤其是开平方）。	涉及比例中项、黄金分割等问题。
三角形奠基法	先作一个确定的三角形，再扩展成全图。	作多边形，当已知条件能确定一个三角形时。

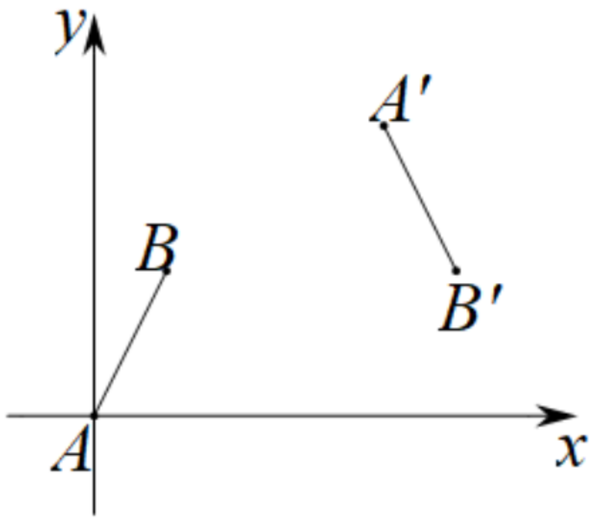
综合运用：一个复杂的作图题通常需要多种方法的组合。例如，先用轨迹法确定一个点，再用几何性质法完成图形，其中可能还用到倍边或缩并的技巧。

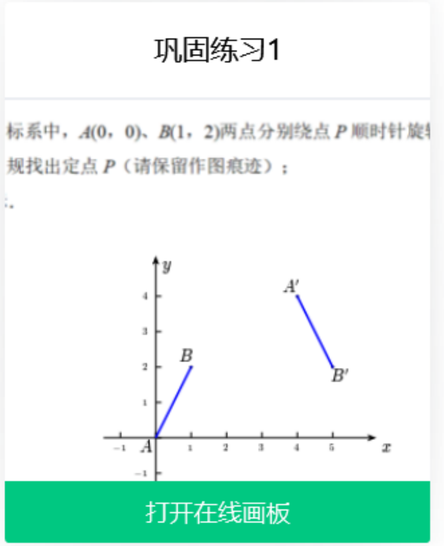
巩固练习

1．如图，在平面直角坐标系中，$A(0，0)$、$B(1，2)$两点分别绕点 P 顺时针旋转得到 $A'(4，4)$、$B'(5，2)$.

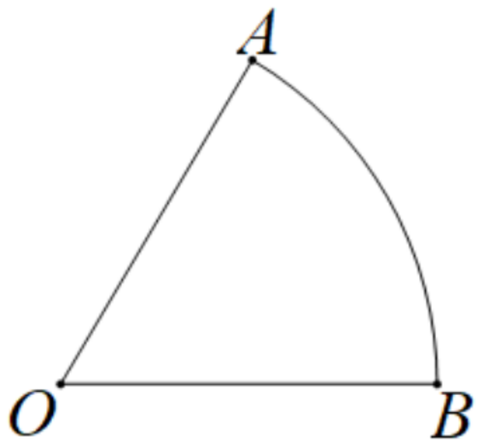
（1）请借助直尺和圆规找出定点 P（请保留作图痕迹）；

（2）求定点 P 的坐标.





2．（2022 年扬州中考题）如图，已知扇形OAB，请用圆规和无刻度的直尺作一条以点O为圆心的圆弧，使扇形的面积被这条圆弧平分．



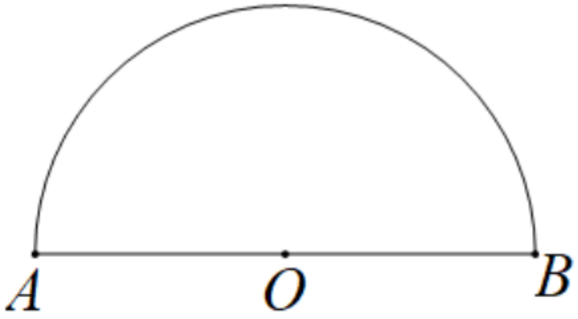
巩固练习第2题-2022扬州...
条圆弧平分．
A
O
B
打开在线画板

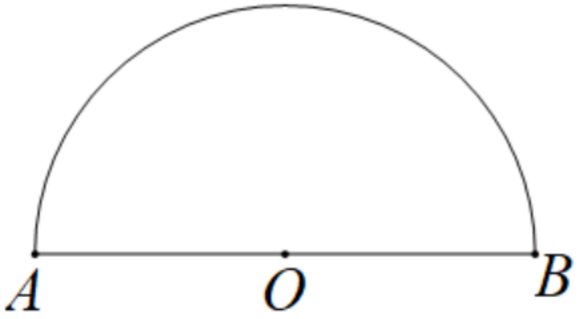
3. （2022 年常州中考压轴题）现有若干张相同的半圆形纸片，点 O 是圆心，直径 AB 的长是 12 cm，C 是半圆弧上的一点（点 C 与点 A、B 不重合），连接 AC、BC.

（1）沿 AC、BC 剪下△ABC，则△ABC 是_____三角形（填“锐角”、“直角”或“钝角”）；

（2）分别取半圆弧上的点 E、F 和直径 AB 上的点 G、H. 已知剪下的由这四个点顺次连接构成的四边形是一个边长为 6 cm 的菱形. 请用直尺和圆规在图中作出一个符合条件的菱形（保留作图痕迹，不要求写作法）；

（3）经过数次探索，小明猜想，对于半圆弧上的任意一点 C，一定存在线段 AC 上的点 M、线段 BC 上的点 N 和直径 AB 上的点 P、Q，使得由这四个点顺次连接构成的四边形是一个边长为 4 cm 的菱形. 小明的猜想是否正确？请说明理由.

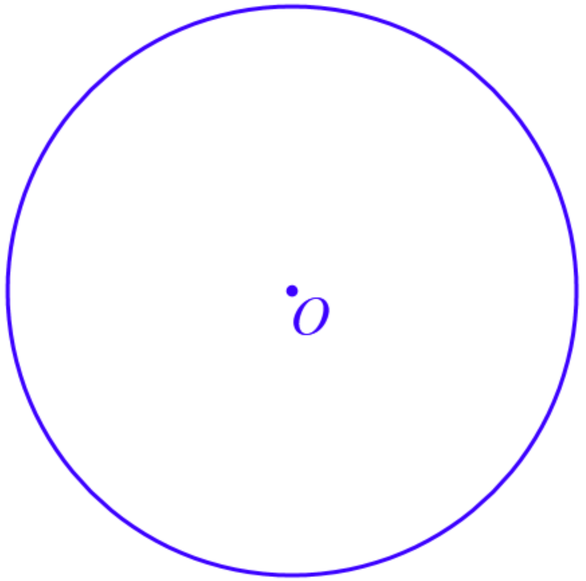




备用图

巩固练习第3题-2022年常...
打开在线画板

思考：如何用尺规作圆的内接正五边形？

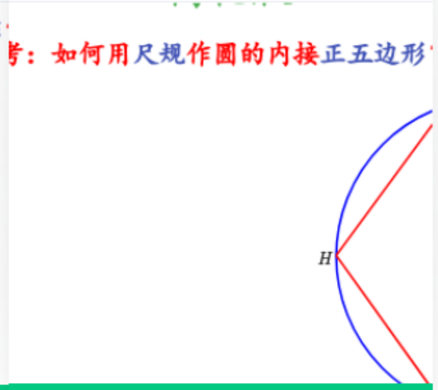


尺规作图作圆的内接正五边...



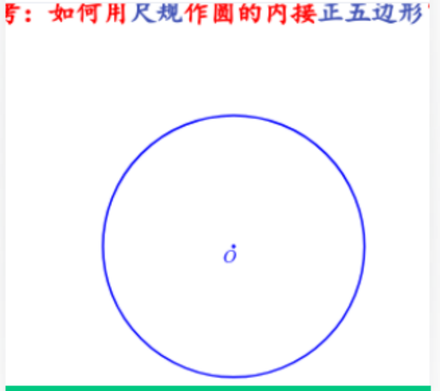
打开在线画板

圆的内接正五边形作法2简...



打开在线画板

思考：如何用尺规作圆的内...



打开在线画板

轨迹与作图

有趣嘛！ end…